

УДК 512.541.7

Ю.В. Костромина

ДВОЙСТВЕННОСТЬ АРНОЛЬДА И МАТРИЦЫ МАЛЬЦЕВА

В работе исследуются соотношения между матрицами Мальцева факторно делимой группы G и матрицами Мальцева группы, двойственной группе G в смысле Д. Арнольда.

Ключевые слова: абелева группа, факторно делимая группа, матрицы Мальцева.

Одной из первых работ, полностью посвященных абелевым группам без кручения, является статья А.И. Мальцева [1]. В ней он установил взаимно однозначное соответствие между системами p -матриц и группами без кручения конечного ранга, при котором каждой совокупности изоморфных между собой групп соответствует класс эквивалентных между собой систем совершенных p -матриц.

В 2007 г. в [2] А. А. Фомин ввел категорию матриц специального вида и доказал, что она эквивалентна категории факторно делимых групп и двойственна категории групп без кручения. А. А. Фомин матрицы данной категории называл редуцированными. Заметим, что это фактически те матрицы, которые А.И. Мальцев называл совершенными, а функторы двойственности категории матриц и категории групп без кручения можно рассматривать как новую версию описания А.И. Мальцева [1].

Определение 1. Матрицы вида (1) мы будем называть p -матрицами Мальцева группы G :

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{1} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{1} \end{array} \right) \in \begin{array}{l} \hat{Z}_p \\ \hat{Z}_p \\ \dots \\ \hat{Z}_p \\ Z_{p^{\alpha_1}} \\ Z_{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ Z_{p^{\alpha_n}} \end{array}, \quad (1)$$

где $n = r_p(G)$ – p -ранг группы G , $m = r(G) - r_p(G)$, $\hat{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел.

Рассмотрим совокупность p -матриц $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$, по всем простым p они определяют набор характеристик

$$\chi_1 = (\alpha_1^{(p_1)}, \alpha_1^{(p_2)}, \dots), \chi_2 = (\alpha_2^{(p_1)}, \alpha_2^{(p_2)}, \dots), \dots, \chi_r = (\alpha_r^{(p_1)}, \alpha_r^{(p_2)}, \dots),$$

где $[\chi_r]$ и $[\chi_1]$ – соответственно внутренний и внешний типы группы G .

Далее исследуем вопрос о том, как будут устроены матрицы Мальцева факторно делимой группы G ранга r . Найдется свободная подгруппа F группы G , такая, что $G/F \cong \bigoplus_{r-r_p} Z_{p^\infty}$. Тогда p -матрица факторно делимой группы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \hat{Z}_p \quad (2)$$

Пусть G – факторно делимая группа с базисом $x_1, x_2, \dots, x_r$, $G/\langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$ – делимая и периодическая. Группа G относительно данного базиса определена набором p -матриц по всем простым числам p :

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & \dots & \alpha_{1r}^{(p)} \\ \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \dots & \alpha_{2r}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1}^{(p)} & \alpha_{r2}^{(p)} & \dots & \alpha_{rr}^{(p)} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Z_{\chi_1} \\ Z_{\chi_2} \\ \dots \\ Z_{\chi_r} \end{matrix},$$

где $r=r(G)$ – ранг группы G .

Для характеристик $\chi = (m_p)$ положим $K_p = Z/p^{m_p}Z$, если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{Z}_p$, если $m_p = \infty$, тогда кольцо $Z_\chi = \prod_p K_p$. Обозначим через $n = r_p(G)$ –

p -ранг группы G . И пусть $m = r - n$. Тогда из определения факторно делимой группы следует, что $(\chi_1)_p = (\chi_2)_p = \dots = (\chi_m)_p = \infty$, $(\chi_{m+1})_p = \dots = (\chi_r)_p = 0$. Отсюда следует, что последние n строк в матрице $A^{(p)}$ состоят из одних нулей, поэтому их можно опустить.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_r & & \\ y_1 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & \dots & \alpha_{1r}^{(p)} & = & 0 \\ y_2 & \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \dots & \alpha_{2r}^{(p)} & = & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m & \alpha_{m1}^{(p)} & \alpha_{m2}^{(p)} & \dots & \alpha_{mr}^{(p)} & = & 0 \\ & \parallel & \parallel & \dots & \parallel & & \\ & x_1^* & x_2^* & \dots & x_r^* & & \end{array}$$

А.А. Фомин в [2] доказал, что эта диаграмма однозначно определяет группу G и двойственную ей группу G^* вместе с их базисами $x_1, x_2, \dots, x_r \in G$ и $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^* \in G^*$. Данная диаграмма одновременно определяет две системы равенств:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha_{11}^{(p)} y_1 + \alpha_{21}^{(p)} y_2 + \dots + \alpha_{m1}^{(p)} y_m \\ x_2^* &= \alpha_{12}^{(p)} y_1 + \alpha_{22}^{(p)} y_2 + \dots + \alpha_{m2}^{(p)} y_m \\ &\dots \\ x_r^* &= \alpha_{1r}^{(p)} y_1 + \alpha_{2r}^{(p)} y_2 + \dots + \alpha_{mr}^{(p)} y_m \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^{(p)}x_1 + \alpha_{12}^{(p)}x_2 + \dots + \alpha_{1r}^{(p)}x_r &= 0 \\ \alpha_{21}^{(p)}x_1 + \alpha_{22}^{(p)}x_2 + \dots + \alpha_{2r}^{(p)}x_r &= 0 \\ &\dots \\ \alpha_{m1}^{(p)}x_1 + \alpha_{m2}^{(p)}x_2 + \dots + \alpha_{mr}^{(p)}x_r &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

Из (3) следует, что $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ принадлежат конечно-представимому $\hat{Z}_p$ -модулю $M = y_1 Z_{\chi_1} \oplus y_2 Z_{\chi_2} \oplus \dots \oplus y_m Z_{\chi_m}$. Тогда сервантная оболочка $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^* \rangle^*$ – группа, двойственная группе G , с базисом $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$.

Теперь мы можем сформулировать теорему, позволяющую перевести двойственность Арнольда на язык матриц Мальцева.

Теорема 1. Пусть G – факторно делимая группа ранга r с базисом $x_1, x_2, \dots, x_r$, относительно которого она определена набором p -матриц Мальцева по всем простым числам p :

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{12}^{(p)} & \dots & \alpha_{1n}^{(p)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \dots & \alpha_{2n}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m1}^{(p)} & \alpha_{m2}^{(p)} & \dots & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Z_{\chi_1} \\ Z_{\chi_2} \\ \dots \\ Z_{\chi_m} \\ Z_{\chi_{m+1}} \\ Z_{\chi_{m+2}} \\ \dots \\ Z_{\chi_r} \end{matrix}$$

и набором подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & \dots & i_r^{(p)} \end{pmatrix}$. И пусть G^* – группа двойственная группе G в смысле Арнольда, тогда группа G^* определяется следующим набором p -матриц Мальцева:

$$A^{*(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{21}^{(p)} & \dots & \alpha_{m1}^{(p)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{12}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \dots & \alpha_{m2}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{1n}^{(p)} & \alpha_{2n}^{(p)} & \dots & \alpha_{mn}^{(p)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Z_{\kappa_{m+1}} \\ Z_{\kappa_{m+2}} \\ \dots \\ Z_{\kappa_r} \\ Z_{\kappa_1} \\ Z_{\kappa_2} \\ \dots \\ Z_{\kappa_m} \end{matrix}$$

и набором подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & \dots & i_r^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для того чтобы найти p -матрицу Мальцева группы двойственной факторно делимой группе G , зафиксируем простое число p и рассмотрим p -матрицу группы G .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

где $m = r(G) - r_p(G)$. Заметим, что p -матрицы Мальцева – это квадратные матрицы, но так как группа G – факторно делимая, то последние n строк матрицы нулевые и исключаем их из рассмотрения.

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{cccccccccccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \dots & x_r & & & \\ y_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & = & 0 & \\ y_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & = & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots & \\ y_m & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & = & 0 & \\ & \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & & & \\ & x_1^* & x_2^* & \dots & x_m^* & x_{m+1}^* & x_{m+2}^* & \dots & x_r^* & & & \end{array}$$

Данная диаграмма одновременно определяет две системы равенств:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & + & \alpha_{11}x_{m+1} + \alpha_{12}x_{m+2} + \dots + \alpha_{1n}x_r = 0 \\ x_2 & + & \alpha_{21}x_{m+1} + \alpha_{22}x_{m+2} + \dots + \alpha_{2n}x_r = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m & + & \alpha_{m1}x_{m+1} + \alpha_{m2}x_{m+2} + \dots + \alpha_{mn}x_r = 0 \end{array} \quad (5)$$

и

$$\begin{array}{lcl} x_1^* & = & y_1, \\ x_2^* & = & y_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m^* & = & y_m, \\ x_{m+1}^* & = & \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{m1}y_m, \\ x_{m+2}^* & = & \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{m2}y_m, \\ \dots & \dots & \dots \\ x_r^* & = & \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{mn}y_m. \end{array} \quad (6)$$

Подставим в последние n уравнений системы (6) вместо y_i элемент x_i^* ($i = 1, 2, \dots, m$), получим следующую систему равенств:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{11}x_1^* + \alpha_{21}x_2^* + \dots + \alpha_{m1}x_m^* - x_{m+1}^* & = & 0, \\ \alpha_{12}x_1^* + \alpha_{22}x_2^* + \dots + \alpha_{m2}x_m^* - x_{m+2}^* & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n}x_1^* + \alpha_{2n}x_2^* + \dots + \alpha_{mn}x_m^* - x_r^* & = & 0. \end{array} \quad (7)$$

Запишем основную матрицу полученной системы

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы – фундаментальная система решений для системы (5), и, наоборот, строки p -матрицы группы G – фундаментальная система решений для системы (7). И так как система (6) определяет группу, двойственную группе G с базисом $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$, то относительно этого базиса двойственная группа будет определяться следующим набором p -матриц Мальцева:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{11}^{(p)} & \alpha_{21}^{(p)} & \dots & \alpha_{m1}^{(p)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{12}^{(p)} & \alpha_{22}^{(p)} & \dots & \alpha_{m2}^{(p)} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_{1n}^{(p)} & \alpha_{2n}^{(p)} & \dots & \alpha_{mn}^{(p)} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \in \begin{matrix} Z_{\kappa_1} \\ \dots \\ Z_{\kappa_m} \\ Z_{\kappa_{m+1}} \\ Z_{\kappa_{m+2}} \\ \dots \\ Z_{\kappa_r} \end{matrix}.$$

Для того чтобы данную матрицу привести к нормальному виду, необходимо каждую строку матрицы домножить на (-1) , и переставить столбцы и строки в обратном порядке. Для того чтобы избавиться от минусов перед коэффициентами α_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$, необходимо домножать на (-1) столбцы матриц системы, а затем при необходимости домножать на (-1) строки каждой матриц системы в отдельности. ■

Замечание 1. Пусть G – факторно делимая группа, p -матрицы Мальцева определяют набор характеристик $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$, для которых выполняются равенства $(\chi_1)_p = (\chi_2)_p = \dots = (\chi_m)_p = \infty$, $(\chi_{m+1})_p = \dots = (\chi_r)_p = 0$. Аналогичные равенства характеристик выполняются для двойственной группы G^* (заметим, что для приведения матрицы A^* к нормальному виду была выполнена некоторая перестановка строк, после которой индексы характеристик κ_i мы не перенумеровываем): $(\kappa_1)_p = (\kappa_2)_p = \dots = (\kappa_m)_p = 0$, $(\kappa_{m+1})_p = \dots = (\kappa_r)_p = \infty$. Таким образом, мы получаем, что если $(\chi_i)_p = 0$, то $(\kappa_i)_p = \infty$, и, наоборот, если $(\chi_i)_p = \infty$, то $(\kappa_i)_p = 0$ для $i = 1, 2, \dots, r$.

Используя язык матриц Мальцева, легко можно доказать следующие факты для взаимодвойственных по Арнольду групп, установленные Д. Арнольдом в [3].

Замечание 2. Для двойственности категорий факторно делимых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов на себя справедливы следующие утверждения:

- (1) $r(G) = r(G^*)$;
- (2) $r_p(G^*) = r(G) - r_p(G)$.

Доказательство. Из строения p -матриц Мальцева групп G и G^* ясно, что $r(G) = r(G^*)$.

Рассмотрим p -матрицы A и A^* групп G и G^* соответственно. Как мы отмечали выше, p -матрицы Мальцева являются квадратными, но так как в нашем случае несколько последних строк оказываются нулевыми, мы их опускаем из рассмотрения.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \hat{Z}_p,$$

где $r=r(G)$ – ранг группы G , $n=r_p(G)$ – p -ранг группы G . Получим, что $m = r(G) - r_p(G)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \hat{Z}_p.$$

Из вида p -матрицы группы G^* получим, что $r_p(G^*) = m$, где $m = r(G) - r_p(G)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А.И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. 1938. № 4. С. 45–68.
2. Фомин А.А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 223–244.
3. Arnold D. A duality for quotient divisible abelian groups of finite rank // Pacific J. of Math. 1972. V. 42. No. 1. P. 11–15.

Статья поступила 08.02.2012 г.

Kostromina Ju. V. ARNOLD'S DUALITY AND MALCEV'S MATRICES. In this work we investigate the relations between Malcev's matrices of a quotient divisible group G and Malcev's matrices of a group that is dual to the group G in the sense of D. Arnold.

Keywords: abelian group, quotient divisible group, Malcev's matrices

KOSTROMINA Julia Vladimirovna (Ryazan High Airborne Command School)
E-mail: jykos@mail.ru