

УДК 512.541

Д.С. Чистяков

ОБОБЩЕНИЕ СВОЙСТВА ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В данной работе изучаются однородные отображения абелевых групп без кручения конечного ранга; в частности обобщается понятие вполне транзитивности.

Ключевые слова: вполне транзитивная абелева группа без кручения, однородное отображение, *rfi*-подгруппа, псевдоокольцо.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, G – унитарный левый R -модуль, $E_R(G)$ – кольцо эндоморфизмов модуля G . Множество

$$M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid rf(x) = f(rx), r \in R\}$$

является поттикольцом относительно операций сложения и композиции отображений. Элементы данного поттикольца называют однородными (R -однородными) отображениями.

Если $M_R(G) = E_R(G)$, то модуль G называется эндоморфным. Абелеву группу будем называть эндоморфной, если она является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов.

Для построения однородных отображений нам потребуются понятия замкнутости и сильной сервантности модуля. Множество A называется R -замкнутым, если для любых $r \in R$, $a \in A$ справедливо $ra \in A$. Непустое подмножество A левого R -модуля V называется сильно R -сервантным, если $0 \neq rv \in A$ влечет $v \in A$ для всех $r \in R$, $v \in V$ ([1]).

Лемма 1 ([1]). Пусть H – R -замкнутое и сильно R -сервантное подмножество R -модуля G и $h: H \rightarrow G$ – R -однородное отображение.

Отображение $f: G \rightarrow G$, определяемое по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in H, \\ 0, & x \notin H, \end{cases}$$

является R -однородным.

В [2, гл. 4.] дается определение подпоттикольца N поттикольца $M(G) = \{f: G \rightarrow G\}$, удовлетворяющего условию конечной интерполяции: для любых различных $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ и любых $h_1, h_2, \dots, h_k \in G$ существует $n \in N$, такой, что $n(g_1) = h_1, n(g_2) = h_2, \dots, n(g_k) = h_k$.

В теории абелевых групп хорошо изучен класс вполне транзитивных групп без кручения (см. [3, гл. 7], а также [5, 6]). Группа G называется вполне транзитивной, если она удовлетворяет условию: для любых $a, b \in G$, таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ ($\chi(g)$ – характеристика элемента $g \in G$), существует $f \in E(G)$ со свойством $f(a) = b$.

В данной работе изучаются абелевы группы без кручения G конечного ранга, обладающие следующим свойством: для любых $a, b \in G$, таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует $f \in E_{E(G)}(G)$ со свойством $f(a) = b$.

Группы с таким свойством будем называть M_E -вполне транзитивными.

Прежде чем перейти к изложению основных результатов, напомним понятия с приставкой «квази», поскольку данная терминология часто используется при работе с абелевыми группами без кручения конечного ранга.

Пусть A и B – абелевы группы без кручения. Говорят, что A квазисодержится в B , если $nA \subseteq B$ для некоторого натурального числа n . Говорят, что A квазиравна B ($A \approx B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A . Квазиравенство $A \approx \bigoplus_{i \in I} A_i$, где I – конечное множество, называется квазиразложением (квазипрямым разложением) группы A . Подгруппы A_i называются квазислагаемыми группами A . Абелева группа без кручения A называется сильно неразложимой, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Абелеву группу без кручения A можно естественным образом вложить в $\mathcal{Q}$ -пространство $\mathcal{Q} \otimes A$, которое является делимой оболочкой группы A (элемент $a \in A$ отождествляется с элементом $1 \otimes a \in \mathcal{Q} \otimes A$). Каждый эндоморфизм $\alpha \in E(A)$ единственным образом продолжается до линейного преобразования $1 \otimes \alpha$ $\mathcal{Q}$ -пространства $\mathcal{Q} \otimes A$. Кольцо $E(A)$ содержится в $End_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q} \otimes A)$. Таким образом, $E(A) = \{\alpha \in End_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q} \otimes A) \mid \alpha A \subseteq A\}$.

$\mathcal{Q}$ -алгебра $\mathcal{Q} \otimes E(A)$ называется кольцом квазиэндоморфизмов группы A .

Неопределяемые нами понятия можно найти в [3].

Теорема 2. Однородная M_E -вполне транзитивная группа G является циклическим модулем над центром $CE(G)$ своего кольца эндоморфизмов.

Доказательство. Пусть H – сервантная подгруппа группы G , инвариантная относительно всех $E(G)$ -однородных отображений, и $0 \neq a \in H$, $0 \neq b \in G$. Однородность группы G позволяет выбрать натуральное число n таким образом, что $\chi(a) \leq \chi(nb)$. Существует $f \in M_{E(G)}(G)$ со свойством $f(a) = nb$. Поскольку подгруппа H инвариантна относительно всех $E(G)$ -однородных отображений, то $nb \in H$. На основании сервантности H заключаем $b \in H$. Поэтому $H = G$. Отсюда, в частности, следует, что группа G неразложима.

Покажем, что группа G сильно неразложима. Пусть $G \approx A = B \oplus C$ – некоторое нетривиальное квазиразложение группы G . В работе [4] доказано, что $M_{E(G)}(G) \approx M_{E(A)}(A)$. Поскольку

$$M_{E(A)}(A)B = M_{E(A)}(A)e_B B = e_B M_{E(A)}(A) B \subseteq B \quad (e_B: A \rightarrow B \text{ – проекция}),$$

то для некоторого натурального числа n справедливо $M_{E(G)}(G)nB \subseteq nB \subseteq G$. По доказанному выше $nB = G$. Поэтому $C = 0$.

Пусть H – минимальная pfi -подгруппа группы G и $x, y \in H$. Тогда существуют такие $\varphi \in E(G)$, $k \in \mathbb{N}$, что $\varphi(x) = ky$. Для $f \in M_{E(G)}(G)$ имеем

$$\begin{aligned} kf(x+y) &= f(kx+ky) = f(kx+\varphi(x)) = f((k+\varphi)(x)) = \\ &= (k+\varphi)f(x) = kf(x) + \varphi f(x) = kf(x) + kf(y). \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Получили, что каждое $E(G)$ -однородное отображение действует аддитивно на каждой минимальной pfi -подгруппе группы G . Поэтому $f(H) \subseteq H$. Тогда $H = G$ и группа G неприводима. Сильно неразложимые неприводимые группы эндоморфны [4]. Откуда следует, что $M_{E(G)}(G) = CE(G)$. Заключаем, что G – неприводимый $CE(G)$ -модуль. Теорема доказана.

Теорема 3. Абелева группа без кручения с сильно однородным кольцом эндоморфизмов M_E -вполне транзитивна.

Доказательство. Пусть G – группа из условия теоремы, $a, b \in G$, такие, что $\chi(a) \leq \chi(b)$, и A – подгруппа группы G , сервантно порожденная циклическим модулем $E(G)a$. Понятно, что A – вполне характеристическая подгруппа группы G . Докажем ее сильную сервантность. Если $\varphi(x) = y$ для некоторых $\varphi \in E(G)$, $y \in A$.

На основании сильной однородности кольца $E(G)$ эндоморфизм φ есть целое кратное обратимого элемента, то есть $n\psi = \varphi$ для некоторых $\psi \in \text{Aut}(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $n\psi(x) = y$. Откуда $\psi(x) = y' \in A$, $x = \psi^{-1}(y') \in A$.

Построим $E(G)$ -однородное отображение $f: G \rightarrow G$, переводящее a в b , по правилу

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(b), x = \varphi(a) \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

Заметим, что данное отображение не аддитивно. Поэтому группа G не является эндоморфной. Теорема доказана.

Следствие 4. Неоднородная вполне транзитивная абелева группа конечного ранга, кольцо квазиэндоморфизмов которой является телом, M_E -вполне транзитивна.

Доказательство следует из [3, теорема 41.2.].

Предложение 5. Если $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – M_E -вполне транзитивная абелева группа без кручения, то M_E -вполне транзитивны все слагаемые G_i .

Доказательство. Пусть $f \in M_{E(G)}(G)$ и G_j – прямое слагаемое группы G ($j \in I$). Тогда $f(G_j) \subseteq G_j$ (см. доказательство теоремы 2). Эндоморфизм $\varphi_j \in E(G_j)$ можно продолжить до эндоморфизма $\varphi \in E(G)$. Рассмотрим отображение $f^{(j)}$, являющееся ограничением f на G_j . Тогда

$$f^{(j)}(\varphi_j G_j) = f(\varphi G_j) = \varphi f(G_j) = \varphi_j f^{(j)}(G_j).$$

Поэтому $f^{(j)} - E(G_j)$ -однородное отображение слагаемого G_j .

Пусть $0 \neq a, b \in G_j$, такие, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ (в группе G_j и, следовательно, в группе G). В силу M_E -вполне транзитивности группы G найдется однородное отображение $f \in M_{E(G)}(G)$ со свойством $f(a) = b$. Следовательно, $f^{(j)}(a) = b$ и G_j – M_E -вполне транзитивное слагаемое группы G . Предложение доказано.

Полагаем $\Pi(G) = \{p \mid pG \neq G\}$.

Предложение 6. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ – абелева группа без кручения, удовлетворяющая условиям:

- 1) все прямые слагаемые G_i M_E -вполне транзитивны,
- 2) все прямые слагаемые G_i вполне характеристичны и сильно $E(G)$ -сервантны,
- 3) $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда M_E -вполне транзитивна группа G .

Доказательство. Пусть $0 \neq a, b \in G$, такие, что $\chi(a) \leq \chi(b)$. По условию предположения

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n, b = b_1 + b_2 + \dots + b_n, \text{ где } a_i, b_i \in G_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку $\Pi(G_i) \cap \Pi(G_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\chi(a_i) \leq \chi(b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. На основании M_E -вполне транзитивности всех слагаемых G_i найдутся $E(G_i)$ -однородные отображения $f_i: G_i \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющие условию $f_i(a_i) = b_i$. Для отображения $f: G \rightarrow G$, определяемого правилом

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x), x \in G_i, \\ 0, x \notin G_i, \end{cases}$$

и проекций $e_1, e_2, \dots, e_n, e^*$, соответствующих разложению $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n \oplus G^*$, имеем

$$\begin{aligned} f(a) &= (e_1 + e_2 + \dots + e_n + e^*)f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \\ &= e_1 f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + e_2 f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \dots + \\ &\quad + e_n f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + e^* f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(e_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n)) + f(e_2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)) + \dots + \\
&+ f(e_n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)) + f(e^*(a_1 + a_2 + \dots + a_n)) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) = \\
&= f_1(a_1) + f_2(a_2) + \dots + f_n(a_n) = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Заметим, что если G – абелева группа без кручения, то для любых $a, b \in G$, таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует $f \in M_Z(G)$ со свойством $f(a) = b$.

Пусть A – сервантная подгруппа, порожденная элементом a . Тогда

$$f(x) = \begin{cases} nb, x = na \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

Автор благодарен Крылову П.А. за постановку задачи и внимание к работе, а также Цареву А.В. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hausen J. and Johnson J.A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc. 1995. V. 59. P. 173–183.
2. Pilz G. Near-rings: the theory and its applications. North Holland Publ., 1983.
3. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2006.
4. Чистяков Д.С., Любимцев О.В. Абелевы группы как эндоморфные модули над своим кольцом эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 1. С. 229–233.
5. Grinshpon S.Ya., Krylov P.A. Fully invariant subgroups, full transitivity and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sciences. 2005. V. 128. No. 3. P. 2894–2997.
6. Чехлов А.Р. Е-энгелевы абелевы группы степени ≤ 2 // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 54–60.

Статья поступила 28.02.2012 г.

Chistyakov D.S. A GENERALIZATION OF THE FULL TRANSITIVITY PROPERTY FOR TORSION-FREE ABELIAN GROUPS. In this paper we study homogeneous mappings of torsion-free Abelian groups of finite rank; in particular, the notion of full transitivity is generalized.

Keywords: fully transitive torsion-free Abelian group, homogeneous mapping, *pfi*-subgroup, pseudosocle.

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Nizhny Novgorod Commercial Institute)

E-mail: chistyakovds@yandex.ru