

УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА
В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОГО
МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА***

В рамках энергетической теории гидродинамической устойчивости выведено уравнение энергетического баланса для плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. Течение газа описывается системой уравнений двухтемпературной аэродинамики. В уравнениях учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. На основе энергетического уравнения рассмотрена вариационная задача вычисления критических значений числа Рейнольдса Re_c . Получены асимптотические оценки Re_c , которые в главном порядке имеют характерную зависимость от числа Маха, коэффициента объемной вязкости, степени неравновесности колебательной энергии и времени колебательной релаксации.

Ключевые слова: *энергетическая теория, гидродинамическая устойчивость, колебательная релаксация, уравнения двухтемпературной аэродинамики, критическое число Рейнольдса.*

В работах [1, 2] на основе энергетической теории в рамках модели Навье – Стокса было исследовано влияние умеренного термического возбуждения на устойчивость сжимаемого течения Куэтта. В [1], исходя из сформулированной спектральной задачи, получены асимптотические оценки критических чисел Рейнольдса Re_c в пределе малых волновых чисел возмущений, содержащие характерную зависимость от коэффициента объемной вязкости (степени возбуждения). В [2] спектральная задача решена численно в достаточно широком диапазоне изменения волновых чисел. В результате было показано, что возрастание объемной вязкости в реальных пределах приводит к увеличению Re_c более чем на 30 %. Вместе с тем анализ полученных результатов позволил сделать вывод о том, что дальнейшее возрастание термической неравновесности с возбуждением колебательных уровней молекул, выходящее за рамки использованной модели, может привести к еще более существенному росту критических чисел Рейнольдса.

В данной работе на основе энергетической теории аналитически исследуется влияние глубокого термического возбуждения на критические числа Re_c . Рассматривается течение Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа, описываемого системой уравнений двухтемпературной аэродинамики, в которых учитывается зависимость коэффициентов переноса от температуры потока. В качестве температурной зависимости коэффициентов переноса выбран степенной закон T^n с показателем $n \leq 1$. Выбранная зависимость соответствует условиям относительно холодного несущего потока (мягким потенциалам межмолекулярного взаимодействия) [3, 4]. Предполагается, что удельные теплоемкости не зависят от

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 11-01-00064).

статической и колебательной температур потока и постоянны. В соответствии с физическими представлениями [4 – 6] модель двухтемпературной аэродинамики является общепринятой физико-математической моделью течений колебательно-возбужденного молекулярного газа, когда диссоциацией молекул, возбуждением верхних колебательных уровней и поправками на ангармонизм колебаний можно пренебречь.

Основные уравнения и энергетические функционалы

Задача устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного молекулярного газа рассматривается в расчетной области Ω , представляющей собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3) , а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2 .

В качестве характерных величин для обезразмеривания использованы полуширина канала L по оси x_2 , модуль скорости потока U_0 на непроницаемых стенках канала, постоянные плотность ρ_0 и температура T_0 основного течения и образованные из них время $\rho_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. Коэффициенты переноса обезразмеривались на их значения при температуре T_0 : сдвиговая и объемная вязкости на η_0 и $\eta_{b,0}$, а коэффициенты теплопроводности, обусловленные упругими энергообменами между поступательными степенями свободы молекул и неупругими обменами энергией вращательных и колебательных степеней свободы молекул с поступательными модами молекул, соответственно на $\lambda_{tr,0}$, $\lambda_{rot,0}$, $\lambda_{vib,0}$. В безразмерных переменных система уравнений двухтемпературной аэродинамики с учетом зависимости коэффициентов переноса от температуры потока записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\eta(T) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right], \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + (\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\gamma}{\text{RePr}} \left[\eta(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \frac{\gamma_v \rho (T_{vib} - T)}{\tau_{VT}}, \\ \gamma_v \rho \left(\frac{\partial T_{vib}}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_{vib}}{\partial x_i} \right) &= \frac{\gamma \alpha_2}{\text{RePr}} \left[\eta(T) \frac{\partial T_{vib}}{\partial x_i} \right] - \frac{\gamma_v \rho (T_{vib} - T)}{\tau_{VT}}, \\ \gamma M^2 p &= \rho T, \quad \eta(T) = T^n, \quad \gamma_v = \gamma_{vib} / (1 - \gamma_{vib}), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , u_i , p , T , T_{vib} , τ_{VT} – плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа и время колебательной релаксации соответственно, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В уравнении энергии системы (1) опущена группа нелинейных слагаемых, составляющих диссипативную функцию. Такое приближение является распространенным в задачах устойчивости сжимаемых течений [7].

Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом: $\alpha_1 = \eta_{b,0} / \eta_0$ – отношение объемной и сдвиговой вязкостей; $\alpha_2 = \lambda_{vib,0} / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0})$; параметр $\gamma_{vib} = c_{vib} / (c_{tr} + c_{rot} + c_{vib})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних [5, 8]; безразмерные критерии $Re = U_0 L \rho_0 / \eta_0$, $M = U_0 / \sqrt{\gamma R T_0}$ и $Pr = \eta_0 (c_{tr} + c_{rot}) / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0})$ есть соответственно числа Рейнольдса, Маха и Прандтля несущего потока, где $\gamma = (c_{tr} + c_{rot} + R) / (c_{tr} + c_{rot})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr} , c_{rot} , c_{vib} – соответственно удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [4–6]: $\tau_{TT} \sim \tau_{RT} \ll \tau_{VV} \ll \tau_{VT} \sim \tau_0$. Причем в этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми соизмеримыми временами релаксации $\tau_{TT} \sim \tau_{RT}$ на временах порядка характерного времени течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T . В подсистеме же колебательных уровней энергии по истечению времени τ_{VT} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_{vib} . Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау – Теллера с характерным временем τ_{VT} . Такое представление позволяет уменьшить число независимых параметров в системе (1) следующим образом.

Используя соотношения Эйкена [4, 5], связывающие парциальные коэффициенты теплопроводности с коэффициентом сдвиговой вязкости, запишем параметр α_2 в виде

$$\alpha_2 = \lambda_{vib,0} / (\lambda_{tr,0} + \lambda_{rot,0}) = 12\gamma_v (c_{tr} + c_{rot}) / (25c_{tr} + 12c_{rot}).$$

Так как поступательные и вращательные степени свободы молекул находятся в состоянии квазиравновесия, для их внутренней энергии справедливо равнораспределение по степеням свободы. Отсюда значения соответствующих теплоемкостей выражаются как $c_{tr} = 3R/2$, $c_{rot} = R$. В результате имеем, что $\alpha_2 = 20\gamma_v/33$.

В качестве основного (несущего) потока выбрано плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости и однородным распределением плотности и температур:

$$U_S(x_2) = (x_2, 0, 0), T_S = T_{vib,S} = \rho_S = 1, p_S = 1/(\gamma M^2). \quad (2)$$

Представляя мгновенные значения гидродинамических переменных в виде

$$u_i = U_{S,i} + u'_i, \rho = 1 + \rho', T = 1 + T', T_{vib} = 1 + T'_{vib}, p = 1/(\gamma M^2) + p',$$

получим систему уравнений для возмущений ρ' , u'_i , T' , T'_{vib} , основного течения с точность до членов первого порядка малости по возмущениям:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_{S,i} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{n}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T' \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right]; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} + \frac{\gamma_v (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}}}; \quad (5)$$

$$\gamma_v \left(\frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial t} + U_{S,j} \frac{\partial T'_{\text{vib}}}{\partial x_j} \right) = \frac{20\gamma}{33\text{RePr}} \frac{\partial^2 T'_{\text{vib}}}{\partial x_j^2} - \frac{\gamma_v (T'_{\text{vib}} - T')}{\tau_{\text{VT}}}; \quad (6)$$

$$\gamma M^2 p' = \rho' + T', \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Предполагается, что при $x_1 = \pm\pi/\alpha$, $x_1 = \pm\pi/\delta$ (где α , δ – модули проекций волнового вектора возмущения $\mathbf{k}$ на оси координат x_1 , x_3) возмущения гидродинамических переменных удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1$ принимают нулевые значения.

Определим кинетическую энергию возмущений как интеграл по области течения вида $E(t) = \langle u_i'^2 / 2 \rangle$, где угловые скобки обозначают усреднение по пространству расчетной области Ω :

$$\langle \dots \rangle = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} dx_1 \int_{-\pi/\delta}^{\pi/\delta} dx_2 \int_{-1}^1 dx_3 (\dots).$$

Для описания эволюции величины $E(t)$ из уравнений (3), (4) выводится уравнение энергетического баланса. Для этого уравнения (3) и (4) умножаются соответственно на $u_i'^2$ и u'_i и складываются. В полученном соотношении выделяется ряд слагаемых в дивергентной форме, которые при интегрировании по области Ω переходят в интегралы по границе, которые в силу граничных условий на возмущения обращаются в нуль. В результате интегральное уравнение баланса кинетической энергии возмущений примет вид

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left\langle \frac{u_i'^2}{2} \right\rangle = - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)^2 + n T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right\rangle, \quad (8)$$

где первое слагаемое в правой части описывает обмен энергией между возмущениями и основным (несущим) потоком, второе – интерпретируется как работа при пульсационном сжатии или расширении газа, а последнее слагаемое описывает процессы диссипации энергии.

Уравнение (8) имеет универсальный характер, поскольку при его выводе использовались лишь уравнения неразрывности (3) и импульсов (4). Поэтому уравнение (8) не может явно учесть особенностей эволюции возмущений в сжимаемых колебательно-неравновесных течениях. В частности, полная энергия возмущений в молекулярном газе помимо кинетической составляющей $E(t)$ должна

учитывать внутреннюю энергию и, кроме того, в (8) отсутствует явная зависимость от числа Маха M , которое характеризует степень сжимаемости течения.

Чтобы учесть особенности энергетического баланса возмущений в колебательно-возбужденном газе, преобразуем второе слагаемое в правой части уравнения (8) с помощью уравнений неразрывности (3), состояния (7) и уравнений энергии (5) и Ландау – Теллера (6). В результате получим, что в левой части уравнения (8) выделяется производная по времени от следующей квадратичной формы:

$$E_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2} \left\langle u_i'^2 + \frac{1}{\gamma M^2} \left[\rho'^2 + \frac{T'^2 + \gamma_v T_{\text{vib}}'^2}{\gamma - 1} \right] \right\rangle,$$

которая интерпретируется как полная пульсационная энергия возмущений, а преобразованное таким образом уравнение (8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\Sigma}}{dt} \equiv \Phi = & - \left\langle u_i' u_j' \frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\gamma_v}{\gamma(\gamma-1)\tau_{\text{vT}} M^2} \left\langle (T_{\text{vib}}' - T')^2 \right\rangle - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} \right)^2 + n T' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_{S,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{S,j}}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \\ & - \frac{1}{(\gamma-1)\text{RePr}M^2} \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{20\gamma_v}{33} \left(\frac{\partial T_{\text{vib}}'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что для фиксированных значений параметров M , α_1 , τ_{vT} и γ_v уменьшение числа Рейнольдса, начиная с некоторого критического значения Re_c , сделают правую часть уравнения (9) отрицательной. При этом $dE_{\Sigma}/dt < 0$ и любые возмущения будут затухать. Критическое число Рейнольдса Re_c соответствует нейтральным возмущениям, когда $dE_{\Sigma}/dt = 0$, и вычисляется как минимум функционала Φ в правой части энергетического уравнения (9).

Асимптотические оценки критических значений числа Рейнольдса

Из условия экстремума функционала Φ на множестве допустимых функций следуют уравнения Эйлера – Лагранжа, определяющие обобщенную дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re . После подстановки в уравнения Эйлера – Лагранжа вектора возмущений

$$\mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{q}(x_2) \exp[-i(\alpha x_1 + \delta x_3)]$$

(где $\mathbf{q}' = (u_1', u_2', u_3', T', T_{\text{vib}}')$, $\mathbf{q}(x_2) = (u, v, w, \theta, \theta_v)$, а i – мнимая единица) спектральная задача с учетом профилей гидродинамических величин основного потока (2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд пульсаций u , v , w , θ и θ_v :

$$\begin{aligned} u'' - \left[\alpha^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) + \delta^2 \right] u + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w + \frac{n}{2} \theta' &= \frac{\text{Re} v}{2}, \\ \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) v'' - (\alpha^2 + \delta^2) v + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u' + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) w' - \frac{i\alpha n}{2} \theta &= \frac{\text{Re} u}{2}, \\ w'' - \left[\alpha^2 + \delta^2 \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) \right] w - \alpha \delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u + i\delta \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\theta'' - (\alpha^2 + \delta^2)\theta - a_1(v' - i\alpha u) = \frac{20a_2\gamma_v}{33} \operatorname{Re}(\theta - \theta_{\text{vib}}),$$

$$\theta''_{\text{vib}} - (\alpha^2 + \delta^2)\theta_{\text{vib}} = a_2 \operatorname{Re}(\theta_{\text{vib}} - \theta),$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_{\text{vib}}|_{x_2=\pm 1} = 0,$$

где параметры a_1 и a_2 имеют вид

$$a_1 = n(\gamma - 1)M^2 \operatorname{Pr}/2, \quad a_2 = 33 \operatorname{Pr}/(20\gamma\tau_{\text{VT}}), \quad (11)$$

а штрихи у неизвестных функций обозначают производные соответствующего порядка по переменной x_2 .

Рассмотрим постоянную и длинноволновые продольные и трансверсальные моды возмущений и соответствующие им оценки критических значений числа Рейнольдса Re_c .

Постоянная мода возмущений

Для постоянной моды волновые числа $\alpha = \delta = 0$. В результате получим, что система (10) примет вид

$$u'' + n\theta'/2 = \operatorname{Re} v/2, \quad (\alpha_1 + 4/3)v'' = \operatorname{Re} u/2, \quad w'' = 0, \quad (12)$$

$$\theta'' - a_1 v' = 20a_2\gamma_v \operatorname{Re}(\theta - \theta_{\text{vib}})/33, \quad \theta''_{\text{vib}} = a_2 \operatorname{Re}(\theta_{\text{vib}} - \theta), \quad \gamma_v = \gamma_{\text{vib}}/(1 - \gamma_{\text{vib}}),$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_{\text{vib}}|_{x_2=\pm 1} = 0.$$

Третье уравнение данной системы интегрируется отдельно и имеет общее решение $w = c_1 x_2 + c_2$, которое при нулевых граничных условиях тождественно обращается в нуль.

Характеристическое уравнение сокращенной таким образом системы (12) принимает вид

$$\lambda^2 \left\{ (\lambda^2 - a_2 \operatorname{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{na_1}{2} \lambda^2 - \frac{\operatorname{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - a_2 \operatorname{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 - \frac{\operatorname{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] \right\} = 0 \quad (13)$$

и распадается на два уравнения: $\lambda^2 = 0$, решение которого есть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и

$$(\lambda^2 - a_2 \operatorname{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{na_1}{2} \lambda^2 - \frac{\operatorname{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - a_2 \operatorname{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 - \frac{\operatorname{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] = 0. \quad (14)$$

Далее будем рассматривать течения газа с малыми значениями параметров $M^2 \ll 1$ и $\gamma_{\text{vib}} \ll 1$. Это позволяет искать решение уравнения (14) в виде

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \gamma_{\text{vib}} \lambda^{(1)}. \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), получим, что $\lambda^{(0)}$ будет удовлетворять уравнениям

$$\lambda^{(0)2} - a_2 \operatorname{Re} = 0; \quad (16)$$

$$2\lambda^{(0)4} + na_1 \lambda^{(0)2} - 2b = 0, \quad b = \operatorname{Re}^2/[4(\alpha_1 + 4/3)], \quad (17)$$

а $\lambda^{(1)}$ определяться по формуле

$$\lambda^{(1)} = \frac{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}(\lambda^{(0)} - b)}{\gamma \tau_{\text{VT}} \lambda^{(0)} [2\lambda^{(0)4} + na_1 \lambda^{(0)2} + (\lambda^{(0)2} - a_2 \operatorname{Re})(4\lambda^{(0)2} + na_1) - 2b]}. \quad (18)$$

Расчеты корней уравнений (16) – (18) показали, что корни характеристического уравнения (13) с точностью до членов порядка $O(\gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}} M^2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{a_2 \operatorname{Re}} \left(1 + \frac{\gamma_{\text{vib}} d_{11}}{a_2 \operatorname{Re}} \right), \\ \lambda_{5,6} = \pm \left(d_0 + \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(-)} \right), \quad \lambda_{7,8} = \pm i \left(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)} \right), \\ d_0 = y - n a_1 / (8y), \quad d_{11} = \frac{\operatorname{Pr}}{2 \gamma \tau_{\text{VT}}} \left[\operatorname{Re} - \frac{n a_1 a_2}{2(a_2^2 - 3/(12 a_1 + 16))} \right], \\ d_{12}^{(\pm)} = \frac{n a_1 \operatorname{Pr}}{8 y \gamma \tau_{\text{VT}} [a_2 \pm 1/(2\sqrt{a_1 + 4/3})]}, \quad y = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{2}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Общее решение сокращенной системы (12) записывается в виде

$$\begin{aligned} V = c_1 V_1 + c_2 V_2 x_2 + c_3 V_3 \exp(\lambda_3 x_2) + c_4 V_4 \exp(-\lambda_3 x_2) + c_5 V_5 \exp(\lambda_5 x_2) + \\ + c_6 V_6 \exp(-\lambda_5 x_2) + c_7 V_7 \cos \left[\left(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)} \right) \right] + c_7 V_7 \sin \left[\left(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)} \right) \right], \end{aligned}$$

где $V = (u, v, w, \theta, \theta_v)$, а $V_k = (u_k, v_k, w_k, \theta_k, \theta_{v,k})$ ($k=1, 2, \dots, 8$) – собственные векторы. Используя однородные граничные условия, получим, что $V_k \equiv 0$ для $k=1, 2, \dots, 6$, а нетривиальные решения возможны в двух случаях: либо $V_7 \neq 0, V_8 = 0$, $\cos[(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)})] = 0$; либо $V_7 = 0, V_8 \neq 0$, $\sin[(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)})] = 0$.

В результате имеем два уравнения для определения собственных значений Re :

$$y - \frac{n a_1}{8 y} - \frac{n a_1 \operatorname{Pr}}{8 y \gamma \tau_{\text{VT}} [a_2 + 1/(2\sqrt{a_1 + 4/3})]} = \begin{cases} \pi(2m-1)/2, & \text{для } V_7 \neq 0, V_8 = 0, \\ \pi m, & \text{для } V_7 = 0, V_8 \neq 0, \end{cases} \\ m = 1, 2, 3, \dots,$$

из решения которых следует, что с точностью до членов порядка $O(\gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}} M^2)$ спектры собственных значений Re примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_{c,m}^{(0)} = \frac{\pi^2(2m-1)^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 \operatorname{Pr}}{2 \pi^2 (2m-1)^2} \left(1 - \frac{20 \gamma_{\text{vib}} \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right], \\ \operatorname{Re}_{s,m}^{(0)} = 2 \pi^2 m^2 \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 \operatorname{Pr}}{8 \pi^2 m^2} \left(1 - \frac{20 \gamma_{\text{vib}} \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right], \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Критическое значение числа Рейнольдса $\operatorname{Re}_c^{(0)}$ определится как минимальное из множеств $\operatorname{Re}_{c,m}^{(0)}$ и $\operatorname{Re}_{s,m}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_c^{(0)} = \min_{m \in N} (\operatorname{Re}_{c,m}^{(0)}, \operatorname{Re}_{s,m}^{(0)}) = \\ = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 \operatorname{Pr}}{2 \pi^2} \left(1 - \frac{20 \gamma_{\text{vib}} \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \operatorname{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Если в качестве молекул несущего газа рассматриваются «максвелловские» молекулы [3, 4], то $n = 1$, а $\operatorname{Re}_c^{(0)}$ принимает вид

$$\text{Re}_c^{(0)} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M^2 \text{Pr}}{2\pi^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{\text{vib}} \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right].$$

Продольные моды возмущений

В длинноволновом приближении для продольных мод имеем $\alpha \ll 1$, $\delta = 0$. Оставляя в системе уравнений (10) члены порядка $O(\alpha)$, получим, что при $\delta = 0$ она примет вид

$$u'' + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' + \frac{n}{2} \theta' = \frac{\text{Re} v}{2}, \quad \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) v'' + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u' - \frac{i\alpha n}{2} \theta = \frac{\text{Re} u}{2},$$

$$w'' = 0, \quad \theta'' - a_1 v' = \frac{20 a_2 \gamma_v}{33} \text{Re}(\theta - \theta_{\text{vib}}), \quad \theta_{\text{vib}}'' = a_2 \text{Re}(\theta_{\text{vib}} - \theta), \quad (21)$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_{\text{vib}}|_{x_2=\pm 1} = 0.$$

Третье уравнение системы (21) интегрируется отдельно и имеет общее решение $w = c_1 x_2 + c_2$, которое при нулевых граничных условиях тождественно обращается в нуль.

Введя новую переменную $\phi = (\alpha_1 + 4/3)v'' + i\alpha(\alpha_1 + 1/3)u'$, получим, что второе уравнение в системе (21) примет вид

$$2\phi - i\alpha n \theta = \text{Re} u. \quad (22)$$

Из равенства (22) и однородных граничных условий (21) следует, что $\phi|_{x_2=\pm 1} = 0$. Выполним в (22) двойное дифференцирование по переменной x_2 . После этого, подставляя в полученное равенство величину θ'' из четвертого уравнения системы (21) и отбрасывая слагаемые порядка $O(\alpha M^2)$ и $O(\alpha \gamma_{\text{vib}})$, которыми мы пренебрегали при выводе уравнений (21), получим следующее уравнение:

$$2\phi'' - \text{Re} u'' = 0, \quad \phi|_{x_2=\pm 1} = u|_{x_2=\pm 1} = 0.$$

Решение данного уравнения при однородных граничных условиях имеет вид $2\phi - \text{Re} u = 0$.

В результате получаем, что сокращенная и преобразованная таким образом система (21) с точностью до членов порядка $O(\alpha)$ может быть записана как

$$u'' + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) v' + \frac{n}{2} \theta' = \frac{\text{Re} v}{2}, \quad \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) v'' + i\alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right) u' = \frac{\text{Re} u}{2},$$

$$\theta'' - a_1 v' = \frac{20 a_2 \gamma_v}{33} \text{Re}(\theta - \theta_{\text{vib}}), \quad \theta_{\text{vib}}'' = a_2 \text{Re}(\theta_{\text{vib}} - \theta), \quad (23)$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_{\text{vib}}|_{x_2=\pm 1} = 0.$$

Характеристическое уравнение системы (23) имеет вид

$$\lambda^2 \left\{ (\lambda^2 - a_2 \text{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{2\alpha^2 (\alpha_1 + 1/3)^2 + n a_1 (\alpha_1 + 4/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 + \frac{i\alpha \text{Re}(\alpha_1 + 1/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - \right.$$

$$\left. - a_2 \text{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 + \frac{\alpha^2 (\alpha_1 + 1/3)^2}{(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 + \frac{i\alpha \text{Re}(\alpha_1 + 1/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] \right\} = 0 \quad (24)$$

и распадается на два уравнения: $\lambda^2 = 0$, решение которого есть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и

$$(\lambda^2 - a_2 \text{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{2\alpha^2(\alpha_1 + 1/3)^2 + na_1(\alpha_1 + 4/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 + \frac{i\alpha \text{Re}(\alpha_1 + 1/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - a_2 \text{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 + \frac{\alpha^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 + \frac{i\alpha \text{Re}(\alpha_1 + 1/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] = 0. \quad (25)$$

Будем рассматривать течения газа с малыми значениями параметров $M^2 \ll 1$ и $\gamma_{\text{vib}} \ll 1$, что позволяет искать решение уравнения (25) в виде (15). Подставив (15) в (25), получаем, что $\lambda^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям (16) и

$$\lambda^{(0)4} + \beta_1 \lambda^{(0)2} + \beta_2 \lambda^{(0)} - \beta_3 = 0, \quad (26)$$

а $\lambda^{(1)}$ определяться по формуле

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{PrRe}}{2\gamma_{\text{vib}} \tau_{\text{VT}}} \left[\frac{2\lambda^{(0)4} + (2\beta_1 - na_1)\lambda^{(0)2} + 2\beta_2\lambda^{(0)} - 2\beta_3}{(\lambda^{(0)} - a_2 \text{Re})(4\lambda^{(0)3} + 2\beta_1\lambda^{(0)} + \beta_2) + 2\lambda^{(0)}(\lambda^{(0)4} + \beta_1\lambda^{(0)2} + \beta_2\lambda^{(0)} - \beta_3)} \right], \quad (27)$$

где параметры a_1, a_2 определены в (11), а β_k ($k=1, 2, 3$) имеют вид

$$\beta_1 = \frac{na_1}{2} + \frac{\alpha^2(1 + 3\alpha_1)^2}{9\alpha_1 + 12}, \quad \beta_2 = \frac{i\alpha \text{Re}(1 + 3\alpha_1)}{3\alpha_1 + 4}, \quad \beta_3 = \frac{3\text{Re}^2}{4(3\alpha_1 + 4)}.$$

Используя решения уравнения (16) и формулу (27), получаем, что два корня уравнения (25) из шести с точностью до членов порядка $O(\alpha + \gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}}M^2)$ имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a_2 \text{Re}} \pm \gamma_{\text{vib}} d_{11} / \sqrt{a_2 \text{Re}}$, где параметр d_{11} определен в (19). Для определения оставшихся четырех корней уравнения (25) необходимо решить уравнение (26).

Уравнение (26) представляет собой неполное уравнение четвертой степени, корни которого определяются через корни его приведенной кубической резольвенты [9]

$$z^3 + pz + q = 0, \quad p = 4\beta_3 - \frac{\beta_1^2}{3}, \quad q = -\frac{2\beta_1}{3} \left(4\beta_3 + \frac{\beta_1^2}{9} \right) - \beta_2^2.$$

Для произвольных значений Re, α и M дискриминант этого кубического уравнения $D = (p/3)^3 + (q/2)^2 > 0$. Следовательно, приведенная кубическая резольвента имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня. В длинноволновом приближении $\alpha \ll 1$ для течений с умеренными числами Маха эти корни с точностью до членов порядка $O(\alpha^2 + M^2)$ имеют вид

$$z_1 = \frac{1}{6} \left[(\gamma - 1)n^2 M^2 \text{Pr} - \frac{2\alpha^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{\alpha_1 + 4/3} \right], \quad z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm \frac{i \text{Re}}{\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}.$$

В общем случае корни уравнения (26) вычисляются по формулам [9]

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{z_1 - \frac{2\beta_1}{3}} + \sqrt{z_2 - \frac{2\beta_1}{3}} + \sqrt{z_3 - \frac{2\beta_1}{3}} \right), \quad \lambda_2^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{z_1 - \frac{2\beta_1}{3}} - \sqrt{z_2 - \frac{2\beta_1}{3}} - \sqrt{z_3 - \frac{2\beta_1}{3}} \right),$$

$$\lambda_3^{(0)} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{z_1 - \frac{2\beta_1}{3}} + \sqrt{z_2 - \frac{2\beta_1}{3}} - \sqrt{z_3 - \frac{2\beta_1}{3}} \right), \quad \lambda_4^{(0)} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{z_1 - \frac{2\beta_1}{3}} - \sqrt{z_2 - \frac{2\beta_1}{3}} + \sqrt{z_3 - \frac{2\beta_1}{3}} \right),$$

где z_k , ($k = 1, 2, 3$) – корни приведенной кубической резольвенты. В длинноволновом приближении для течений с умеренными числами Маха эти корни с точностью до членов порядка $O(\alpha + M^2)$ будут иметь вид

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \pm \omega_1^{(0)} + ib, \quad \lambda_{3,4}^{(0)} = \pm i(\omega_2^{(0)} \mp b), \quad (28)$$

$$\omega_{1,2}^{(0)} = y \mp \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 \text{Pr}}{16y}, \quad b = \frac{\alpha(\alpha_1 + 1/3)}{2\sqrt{\alpha_1 + 4/3}}, \quad y = \sqrt{\frac{\text{Re}}{2}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/4}.$$

Подставив решения (28) в формулу (27), получим поправки порядка $O(\gamma_{\text{vib}})$ к этим решениям

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \pm \omega_1^{(1)}, \quad \lambda_{3,4}^{(0)} = \mp i\omega_2^{(1)}, \quad \omega_{1,2}^{(1)} = \frac{5(\gamma-1)n^2 M^2 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{4y[33\text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3} \mp 10\gamma \tau_{\text{VT}}]}.$$

Таким образом, резюмируя полученные выше результаты, приходим к тому, что с точностью до членов порядка $O(\alpha + \gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}} M^2)$ корни характеристического уравнения (24) примут вид

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \mp \sqrt{\frac{33\text{Pr} \text{Re}}{20\gamma \tau_{\text{VT}}}} \left[1 + \frac{10\gamma_{\text{vib}}}{33} \left[1 + \frac{55\gamma(\gamma-1)(12\alpha_1 + 16)n^2 M^2 \text{Pr}^2 \tau_{\text{VT}}}{\text{Re}(400\gamma \tau_{\text{VT}} - 363(12\alpha_1 + 16)\text{Pr}^2)} \right] \right],$$

$$\lambda_{5,6} = \pm (\omega_1^{(0)} + \gamma_{\text{vib}} \omega_1^{(0)}) + ib, \quad \lambda_{7,8} = \pm i(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(0)} \mp b).$$

Поскольку в сокращенной системе (23) имеются комплексные коэффициенты, то общее решение этой системы будет комплекснозначным и иметь вид

$$\mathbf{V} = c_1 \mathbf{V}_1 + c_2 \mathbf{V}_2 x_2 + \sum_{k=3}^8 c_k \mathbf{V}_k \exp(\lambda_k x_2),$$

где $\mathbf{V}_k = (u_{k1} + i u_{k2}, v_{k1} + i v_{k2}, w_{k1} + i w_{k2}, \theta_{k1} + i \theta_{k2}, \theta_{v,k1} + i \theta_{v,k2})$ ($k = 1, 2, \dots, 8$) – комплекснозначные собственные векторы.

Рассматривая каждое слагаемое в данном равенстве отдельно, с учетом однородных граничных условий получаем, что собственные вектора $\mathbf{V}_k \equiv 0$ для $k = 1, 2, 3, 4$, а для компонент собственных векторов при $k = 5, 6$ получаем системы

$$q_{k1} \cos(b) - q_{k2} \sin(b) = 0, \quad q_{k1} \cos(b) + q_{k2} \sin(b) = 0,$$

$$q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}, \theta_{kj}, \theta_{v,kj}), \quad j = 1, 2.$$

Нетривиальные решения этих систем имеют место при условии $\sin(2b) = 0$, что в случае $\alpha \neq 0$ исключено. Отсюда следует $\mathbf{V}_5 = \mathbf{V}_6 = 0$. Аналогично для компонент собственных векторов при $k = 7, 8$ имеют место однородные системы вида

$$q_{k1} \cos(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(1)} \mp b) \mp q_{k2} \sin(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(1)} \mp b) = 0,$$

$$q_{k1} \cos(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(1)} \mp b) \pm q_{k2} \sin(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(1)} \mp b) = 0,$$

$$q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}, \theta_{kj}, \theta_{v,kj}), \quad j = 1, 2,$$

где верхние знаки соответствуют случаю $k = 7$, а нижние $k = 8$. Для нетривиальной разрешимости этих систем необходимо выполнение условий

$$\sin 2(\omega_2^{(0)} - \gamma_{\text{vib}} \omega_2^{(1)} \mp b) = 0, \quad (29)$$

из которых следуют уравнения для определения собственных значений Re :

$$y^2 - p_{\pm} y + s = 0,$$

$$y = \sqrt{\frac{Re}{2}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/4}, \quad p_{\pm} = \frac{\pi m}{2} \left[1 \pm \frac{\alpha(1+3\alpha_1)}{3\pi m} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/2} \right],$$

$$s = \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 Pr}{16} \left[1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где знаки «+» и «-» соответствует первому и второму условию в (29).

Корни полученного квадратного уравнения с точностью до членов порядка $O(\alpha + \gamma_{vib} + M^2 + \gamma_{vib} M^2)$ имеют вид

$$y_1 = \frac{\pi^2 m^2}{2} \left[1 - \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 Pr}{4\pi^2 m^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \pm \frac{\alpha(1+3\alpha_1)}{3\pi m \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right],$$

$$y_2 = \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 Pr}{8\pi m} \left(1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right).$$

Корень y_2 в дальнейшем не рассматривается, так как ему соответствует непорядковая зависимость $Re \sim O(M^4 + \gamma_{vib} M^4)$, которой пренебрегалось выше в выражениях для корней λ_k характеристического уравнения (24). Спектры собственных значений Re определяются соотношениями

$$Re_m^{(\alpha)} = \frac{\pi^2 m^2}{2} \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{(\gamma-1)n^2 M^2 Pr}{2\pi^2 m^2} \left(1 - \frac{20\gamma_{vib} Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10\gamma \tau_{VT} + 33 Pr \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \pm \frac{2\alpha(1+3\alpha_1)}{3\pi m} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/2} \right], \quad (30)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$, а знаки где знаки «+» и «-» соответствует первому и второму условию в (29).

Из (30) следует, что с точностью до членов порядка $O(\alpha + \gamma_{vib} + M^2 + \gamma_{vib} M^2)$ минимальное число Рейнольдса $Re_c^{(\alpha)}$, определяемое для длинноволновых продольных мод, есть

$$Re_c^{(\alpha)} = Re_c^{(0)} - \pi \alpha \left(\alpha_1 + \frac{1}{3} \right),$$

где $Re_c^{(0)}$ определено в (20).

Трансверсальные моды возмущений

В длинноволновом приближении для трансверсальных мод имеем, что $\alpha = 0$, $\delta \ll 1$. Изучение данных мод представляет интерес, так как для несжимаемого течения Куэтта критическое число Рейнольдса, наиболее близкое к экспериментальным значениям, получено именно для трансверсальной моды [10]. Оставляя в системе уравнений (10) члены порядка $O(\delta)$, получим, что при $\alpha = 0$ она примет вид

$$u'' + \frac{n}{2}\theta' = \frac{\text{Re } v}{2}, \quad \left(\alpha_1 + \frac{4}{3}\right)v'' + i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)w' = \frac{\text{Re } u}{2}, \quad w'' + i\delta\left(\alpha_1 + \frac{1}{3}\right)v' = 0, \quad (31)$$

$$\theta'' - a_1 v' = \frac{20a_2\gamma_v}{33}\text{Re}(\theta - \theta_{\text{vib}}), \quad \theta''_{\text{vib}} = a_2 \text{Re}(\theta_{\text{vib}} - \theta),$$

$$u|_{x_2=\pm 1} = v|_{x_2=\pm 1} = w|_{x_2=\pm 1} = \theta|_{x_2=\pm 1} = \theta_{\text{vib}}|_{x_2=\pm 1} = 0.$$

Характеристическое уравнение этой системы записывается следующим образом:

$$\lambda^4 \left\{ (\lambda^2 - a_2 \text{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{2\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2 + na_1(\alpha_1 + 4/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 - \frac{\text{Re}^2 - 2na_1\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - \right. \\ \left. - a_2 \text{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 + \frac{\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] \right\} = 0 \quad (32)$$

и распадается на два уравнения: $\lambda^4 = 0$, решение которого есть $\lambda_k = 0$ ($k = 1, 2, 3, 4$), и

$$(\lambda^2 - a_2 \text{Re}) \left[\lambda^4 + \frac{2\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2 + na_1(\alpha_1 + 4/3)}{2(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 - \frac{\text{Re}^2 - 2na_1\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] - \\ - a_2 \text{Re} \frac{20\gamma_v}{33} \left[\lambda^4 + \frac{\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{(\alpha_1 + 4/3)} \lambda^2 - \frac{\text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)} \right] = 0. \quad (33)$$

Будем рассматривать течения газа с малыми значениями параметров $M^2 \ll 1$ и $\gamma_{\text{vib}} \ll 1$, что позволяет искать решение уравнения (33) в виде (15). Подставив (15) в (33), получаем, что $\lambda^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям (16) и

$$\lambda^{(0)4} + \varepsilon_1 \lambda^{(0)2} - \varepsilon_2 = 0, \quad (34)$$

а $\lambda^{(1)}$ определяться по формуле

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{Pr Re}}{8\gamma\tau_{\text{VT}}(\alpha_1 + 4/3)\lambda^{(0)}} \left[\frac{4(\alpha_1 + 4/3)\lambda^{(0)4} + 4\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2\lambda^{(0)2} - \text{Re}^2}{\lambda^{(0)4} + \varepsilon_1\lambda^{(0)2} + (\lambda^{(0)2} - a_2\text{Re})(2\lambda^{(0)} + \varepsilon_1) + \varepsilon_2} \right], \quad (35)$$

где параметры a_1, a_2 определены в (11), а ε_k ($k=1, 2$) имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2}{\alpha_1 + 4/3} + \frac{na_1}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2na_1\delta^2(\alpha_1 + 1/3)^2 - \text{Re}^2}{4(\alpha_1 + 4/3)}.$$

Расчеты корней уравнений (16), (34) и (35) показали, что корни характеристического уравнения (32) с точностью до членов порядка $O(\delta + \gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}}M^2)$ совпадают с решениями (19), а общее решение системы (31) имеет вид

$$V = c_1 V_1 + c_2 V_2 x_2 + c_3 V_3 x_2^2 + c_4 V_4 x_2^3 + \sum_{k=5}^{10} c_k V_k \exp(\lambda_k x_2),$$

где $V_k = (u_{k1} + i u_{k2}, v_{k1} + i v_{k2}, w_{k1} + i w_{k2}, \theta_{k1} + i \theta_{k2}, \theta_{v,k1} + i \theta_{v,k2})$ ($k = 1, 2, \dots, 10$) – комплекснозначные собственные векторы, а параметры $d_0, d_{11}, d_{12}^{(\pm)}$ определены в равенствах (19).

Используя однородные граничные условия, получаем, что собственные вектора $V_k = 0$ для $k = 1, 2, \dots, 8$, а для компонент собственных векторов при $k = 9, 10$ получаем системы

$$q_{k1} \cos(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)}) - q_{k2} \sin(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)}) = 0,$$

$$q_{k1} \cos(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)}) + q_{k2} \sin(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)}) = 0,$$

$$q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}, \theta_{kj}, \theta_{v,kj}), \quad j=1,2.$$

Для нетривиальной разрешимости этих систем необходимо выполнение условия $\sin 2(d_0 - \gamma_{\text{vib}} d_{12}^{(+)}) = 0$, из которого следует уравнение для определения собственных значений Re :

$$y^2 - p y + s = 0, \quad y = \sqrt{\frac{\text{Re}}{2}} \left(\alpha_1 + \frac{4}{3} \right)^{-1/4}, \quad p = \frac{\pi m}{2},$$

$$s = \frac{(\gamma - 1)n^2 M^2 \text{Pr}}{16} \left[1 + \frac{20 \gamma_{\text{vib}} \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Решая данное уравнение, получаем, что спектр собственных значений Re с точностью до членов порядка $O(\delta + \gamma_{\text{vib}} + M^2 + \gamma_{\text{vib}} M^2)$ имеет вид

$$\text{Re}_m^{(\delta)} = \sqrt{\alpha_1 + \frac{4}{3}} \left[\frac{\pi^2 m^2}{2} - (\gamma - 1)n^2 M^2 \text{Pr} \left(\frac{1}{4} - \frac{5 \gamma_{\text{vib}} \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}}{10 \gamma \tau_{\text{VT}} + 33 \text{Pr} \sqrt{\alpha_1 + 4/3}} \right) \right],$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$, а критическое значение числа Рейнольдса $\text{Re}_c^{(\delta)} = \text{Re}_c^{(0)}$, где $\text{Re}_c^{(0)}$ определено в (20).

Выводы

В рамках энергетической теории гидродинамической устойчивости построено уравнение энергетического баланса для плоскопараллельных течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. На его основе рассмотрена вариационная задача вычисления критических значений числа Рейнольдса Re_c , определяющих нижнюю границу возможного развития ламинарно-турбулентного перехода.

Для течения Куэтта получены асимптотические оценки устойчивости различных мод возмущений, которые в главном порядке содержат характерную зависимость от числа Маха, коэффициента объемной вязкости, степени неравновесности колебательных мод молекул и времени колебательной релаксации. Эта зависимость определяется равенством (20). Из (20) следует, что при фиксированных значениях числа Маха и времени колебательной релаксации возрастание параметров α_1 и γ_{vib} приводит к росту значения Re_c . Выполненные оценки не противоречат данным по влиянию релаксационного процесса на устойчивость пограничных слоев на пластине, полученным в рамках линейной теории в [11, 12], так как в пристенных и свободных сдвиговых слоях механизмы ламинарно-турбулентного перехода различны. Рассмотренные асимптотики являются длинноволновыми приближениями, следовательно, полученная зависимость обусловлена воздействием релаксационного процесса на крупномасштабные вихревые структуры, характерные для развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина – Гельмгольца // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 3. С. 73–84.
2. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 5. С. 59–67.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
4. Жданов В.М., Алиевский М.Е. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
5. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2003. 272 с.
6. Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газокинетические процессы в неравновесной молекулярной физике // УФН. 1992. Т. 162. № 11. С. 1–42.
7. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 145 с.
8. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011. Т. 45. Вып. 4. С. 581–593.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
10. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
11. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. К вопросу о влиянии вращательной релаксации на ламинарно-турбулентный переход // Тез. докл. юбил. науч. конф., посвящ. 40-летию Ин-та механики Моск. гос. ун-та, Москва, 22–26 нояб. 1999 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. С. 65–66.
12. Bertolotti F.B. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 93–118.

Статья поступила 25.04.2012 г.

Ershov I.V. ENERGY ESTIMATE OF THE CRITICAL REYNOLDS NUMBERS IN THE COUETTE FLOW OF A VIBRATIONALLY NONEQUILIBRIUM MOLECULAR GAS. The equation of energy balance is deduced for plane-parallel flows of a vibrationally excited molecular gas in the context of the energy theory of the hydrodynamic stability. The flow is described by a system of equations of two-temperature aerodynamics. The dependence of the transport coefficients on the flow temperature is taken into account. The variational problem of calculating the critical Reynolds numbers is considered on the basis of the energy equation. The obtained asymptotical estimates of the critical Reynolds numbers are shown to have in the main order the typical dependence on the Mach number, bulk viscosity, degree of non-equilibrium of the vibrational energy, and time of the vibrational relaxation.

Keywords: energy theory, hydrodynamic stability, vibrational relaxation, equations of two-temperature aerodynamics, critical Reynolds number.

ERSHOV Igor Valer'evich (Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering)
E-mail: i_ershov@ngs.ru