УДК 512.541

Д.С. Чистяков

ЭНДОПРИМАЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

В статье изучаются однородные отображения прямой суммы копий модуля в этот модуль, коммутирующие с элементами кольца, устанавливается связь между обобщенной эндопримальностью модуля и свойством однозначности сложения на этом кольце.

Ключевые слова: *эндопримальный* (*обобщенно эндопримальный*) *модуль*, *кольцо с однозначным сложением*, EE-*группа.*

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, G – унитарный левый R-модуль, $E = E_R(G)$ – кольцо эндоморфизмов модуля G. Рассмотрим множества

$$M_R(G^n, G) = \{f{:}G^n \to G \mid rf(x_1, \ldots, x_n) = f(rx_1, \ldots, rx_n),\ r \in R\},$$

$$M_E(G^n, G) = \{f{:}G^n \to G \mid \varphi f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n),\ \varphi \in E\},$$

$$P_R(G^n, G) = \{f \in M_R(G^n, G) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n,\ \varphi_i \in E,\ x_i \in G\},$$

$$P_E(G^n, G) = \{f \in M_E(G^n, G) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n,\ r_i \in R,\ x_i \in G\}.$$

Если $M_E(G^n, G) = P_E(G^n, G)$ ($M_R(G^n, G) = P_R(G^n, G)$), то модуль G будем называть *n-эндопримальным* (обобщенно *n-эндопримальным*); n-эндопримальный (обобщенно n-эндопримальный) для всех натуральных чисел n модуль будем называть *эндопримальным* (*обобщенно эндопримальным*). В частности, абелева группа называется обобщенно эндопримальной, если она является обобщенно эндопримальным модулем над своим кольцом эндоморфизмов ([1]).

Например, периодическая p-группа, имеющая прямое слагаемое $Z(p^\infty) \oplus Z(p^\infty)$ обобщенно эндопримальна. С другой стороны, абелева группа $A = Z(p^\infty) \oplus B$, где $p^k B = 0$ для некоторого целого числа k, не обобщенно эндопримальна. Еще отметим, что p-группа, имеющая неограниченную базисную подгруппу, обобщенно эндопримальна. Эти и другие примеры групп, обладающих указанным свойством, можно найти в работе [1].

Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (*UA–кольцом*), если на его мультипликативной полугруппе $(R, *)$ можно задать единственную бинарную операцию +, превращающую ее в кольцо $(R, *, +)$. Это эквивалентно следующему: кольцо R будет *UA*–кольцом тогда и только тогда, когда любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец α: $R \to S$ является изоморфизмом колец [2–4].

Стоит сказать, что рассмотренные выше обобщенно эндопримальные группы имеют *UA*-кольцо эндоморфизмов. В данной работе доказано, что кольцо эндоморфизмов обобщенно 2-эндопримальной *EE*-группы обладает свойством однозначности сложения. Абелева группа A называется *EE-группой* при условии существования группового эпиморфизма F: $A \to End(A)$ [5].

Предложение 1. Кольцо эндоморфизмов обобщенно *2*-эндопримальной *EE*-группы есть кольцо с однозначным сложением.

Доказательство. Эпиморфизм F позволяет задать на группе A кольцо, умножение в котором определяется правилом $a * b = F(a)(b)$. Предположим, что A не

UA-кольцо. Тогда для некоторого неаддитивного мультипликативного изоморфизма α: $A \to S$ определим тождественно не равную нулю функцию g: $A^2 \to A$ по правилу

$$g(x, y) = \alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y)).$$

Для $\varphi \in E(A)$ имеем $\varphi = F(z)$, где $z = \alpha^{-1}(z') \in A$, $z' \in S$. Покажем, что $g \in M_{E(A)}(A^2, A)$. Действительно,

$$\varphi g(x,y) = \varphi\alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y)) = F(z)\ \alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y)) =$$
$$= z * \alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y)) = \alpha^{-1}(z') * \alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y)) =$$
$$= \alpha^{-1}(z'\alpha(x + y) - z'\alpha(x) - z'\alpha(y)) = \alpha^{-1}(\alpha(z)\alpha(x + y) - \alpha(z)\alpha(x) - \alpha(z)\alpha(y)) =$$
$$= \alpha^{-1}(\alpha(z * x + z * y) - \alpha(z * x) - \alpha(z * y)) = \alpha^{-1}(\alpha(\varphi x + \varphi y) - \alpha(\varphi x) - \alpha(\varphi y)) =$$
$$= g(\varphi x, \varphi y).$$

Поскольку рассматриваемая группа обобщенно *2*-эндопримальна как модуль над своим кольцом эндоморфизмов, то для некоторых центральных эндоморфизмов u и v имеем $g(x, y) = ux + vy$. Полагая в этом равенстве сначала $x = 0$, а затем $y = 0$, и учитывая, что $\alpha(0) = 0$, получим $ux = 0$ и $vy = 0$ для всех $x,y \in A$. Таким образом, кольцо A есть кольцо с однозначным сложением. Предположение о наличии иного сложения в кольце $E(A)$ приводит к противоречию с тем фактом, что A – кольцо с однозначным сложением. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть R – кольцо такое, что существует модульный эпиморфизм $R \to R^2$. Тогда каждый R-модуль обобщенно эндопримален и R – *UA*-кольцо.

Доказательство. Согласно [6, утверждение 9.53], каждый модуль G над кольцом R есть модуль Безу. Поэтому для каждого $f \in M_R(G^n, G)$ имеем

$$f(x + y) = f(rz + sz) = f((r + s)z) = (r + s)f(z) = rf(z) + sf(z) = f(rz) + f(sz) = f(x) + f(y),$$

для любых $x, y \in G^n$ и некоторых $z \in G^n$, $r, s \in R$. Откуда следует аддитивность отображения f.

Пусть δ_i: $G \to G^n$ – канонические вложения ($i = 1, \ldots, n$). Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\delta_1(x_1)) + \ldots + f(\delta_n(x_n)) = \varphi_1 x_1 + \ldots + \varphi_n x_n,\ \varphi_i = f\delta_i \in E_R(G).$$

Поэтому G – обобщенно эндопримальный R-модуль.

Предположим, что R не обладает свойством однозначности сложения. Пусть α: $R \to S$ – неаддитивный мультипликативный изоморфизм. Определим отображение F: $R^2 \to R^2$ по правилу

$$F(x, y) = (x, \alpha^{-1}(\alpha(x + y) - \alpha(x) - \alpha(y))).$$

Непосредственно проверяется, что отображение F не является аддитивным и $F \in M_R(R^2, R^2)$, что противоречит, в частности, обобщенной 1-эндопримальности любого R-модуля. Поэтому R – *UA*-кольцо. Предложение доказано.

Заметим, что обобщенно 1-эндопримальные модули это в точности эндоморфные модули [7].

Указанным в условии предложения 2 свойством обладают кольцо всех конечно-столбцовых, кольцо всех конечно-строчных, кольцо всех конечно-столбцовых и конечно-строчных матриц над кольцом S.

Во многом, при описании абелевых групп с *UA*-кольцом эндоморфизмов используется теорема 2.12 работы [4] или ее модифицированный вариант [8, теорема 1]. Иногда достаточно выполнения условий предложения 3, с той лишь оговоркой, что, если кольцо квазиэндоморфизмов $\mathbf{Q}\otimes E(G)$ группы без кручения G обладает свойством однозначности сложения, то и $E(G)$ – *UA*-кольцо. Заметим, что из работ [1] и [8] следует, что свойства обобщенной эндопримальности сепа-

рабельной группы без кручения и однозначности сложения на ее кольце эндоморфизмов равносильны. Это же замечание относится и к некоторым другим классам абелевых групп.

Предложение 3. Пусть R – кольцо, обладающее системой попарно ортогональных идемпотентов $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и пусть для каждого $e_i \in E$ найдется $e_j \in E\backslash\{e_i\}$ такое, что левые R-модули Re_i и Re_j изоморфны. Тогда R – UA-кольцо.

Доказательство. Если $x \in R\backslash\{0\}$, то для некоторых e_i, $e_j \in E$, в силу условия предложения, $e_ixe_j \neq 0$. Предположим теперь, что φ: $Re_i \to Re_j$ – R-модульный изоморфизм и $e_ixe_iRe_j = 0$. Тогда

$$\varphi^{-1}(e_ixe_iRe_j) = e_ixe_i\varphi^{-1}(Re_j) = e_ixe_iRe_i = 0.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $e_ixe_i = 0$.

Известно, что изоморфизм левых R-модулей Re_i и Re_j равносилен изоморфизму правых R-модулей e_iR и e_jR. Поэтому можно повторить рассуждения, как и для правостороннего случая, и получить, что из равенства $e_jRe_ixe_i = 0$ следует $e_ixe_i = 0$. Таким образом, выполняются все требования теоремы 1 из работы [8]. Следовательно, R – UA-кольцо. Предложение доказано.

Хорошо известно [9, теорема 7.3], что абелева группа без кручения G конечного ранга, совпадающая со своим псевдоцоколем (сервантной подгруппой, порожденной всеми минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами группы G), квазиравна группе $A = \oplus A_i$, $i = 1, \ldots, n$, где все слагаемые A_i – вполне характеристичны в группе A, при этом $A_i = \oplus A_{ij}$, $j = 1, \ldots, n(i)$, группы A_{ij} попарно квазиизоморфны и $\mathbf{Q}\otimes E(A_{ij})$ – тело.

В обозначениях, принятых выше, имеет место

Следствие 4. Если G – абелева группа без кручения конечного ранга и $n(i) > 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то группа G обобщенно эндопримальна и имеет UA-кольцо эндоморфизмов.

Доказательство. Обобщенная эндопримальность группы G доказана в работе [1]. Ясно, что кольцо квазиэндоморфизмов $\mathbf{Q}\otimes E(G)$ удовлетворяет условию предложения 3 и, более того, изоморфно прямому произведению нетривиальных матричных колец над телами. Следовательно, $\mathbf{Q}\otimes E(G)$ – кольцо с однозначным сложением. Поэтому $E(G)$ – UA-кольцо.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ – класс колец, над которыми каждый модуль обобщенно эндопримален. Класс $\mathfrak{R}$ не пуст. Непосредственно проверяется, что рассматриваемый класс содержит нетривиальные (размерность больше двух) полные матричные кольца.

Теорема 5. Пусть $S \in \mathfrak{R}$ и ψ: $S \to R$ – гомоморфизм колец. Тогда $R \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Если G – R-модуль, то определим S-модуль G правилом $s * g = \psi(s)g$, где $s \in S$, $g \in G$. Для $f \in M_R(G^n, G)$ имеем

$$f(s * x_1, \ldots, s * x_n) = f(\psi(s)x_1, \ldots, \psi(s)x_n) = \psi(s)f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= s * f(x_1, \ldots, x_n), f \in M_S(G^n, G).$$

Поэтому $f(x_1, \ldots, x_n) = \eta_1 \circ x_1 + \ldots + \eta_n \circ x_n$ для некоторых $\eta_i \in E_S(G)$, где $\eta_i \circ x_i = F(\eta_i)x_i$, F: $E_S(G) \to E_R(G)$ – кольцевой гомоморфизм. Таким образом, $f \in P_R(G^n, G)$. Теорема доказана.

Следствие 6. Если $S \in \mathfrak{R}$ может быть вложено в кольцо R вместе с единицей, то $R \in \mathfrak{R}$.

Следствие 7. Если подпрямое произведение некоторого семейства колец принадлежит $\mathfrak{R}$, то каждый множитель этого подпрямого произведения принадлежит $\mathfrak{R}$.

Следствие 8. Если *rad* – это некоторый радикал в категории колец и $R \in \mathfrak{R}$, то $R/rad(R) \in \mathfrak{R}$.

Следствие 9. Пусть S – область целостности и ψ: $R \to S$ – кольцевой гомоморфизм. Тогда $R \notin \mathfrak{R}$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что доказываемое утверждение будет следовать из того факта, что $S \notin \mathfrak{R}$. Определим отображение f: $S^2 \to S$ правилом $f(x, y) = y$, если $x \neq 0$, $f(x, y) = 0$, если $x = 0$. На основании точности S-модуля S нетрудно показать, что $f \in M_S(S^2,S) \setminus P_S(S^2,S)$.

Поскольку для каждого коммутативного кольца и кольца, не имеющего ненулевых нильпотентных элементов, можно построить гомоморфизм в область целостности, то справедливы следующие два утверждения.

Следствие 10. Пусть S – коммутативное кольцо и ψ: $R \to S$ – кольцевой гомоморфизм. Тогда $R \notin \mathfrak{R}$.

Следствие 11. Каждое кольцо класса $\mathfrak{R}$ имеет ненулевые нильпотентные элементы.

Автор благодарен Крылову П.А. за введение в тематику эндопримальных модулей и внимание к работе, а также Цареву А.В. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Albrecht U.*, *Breaz S.*, *Wickless W.* Generalized endoprimal abelian groups // J. Alg. and Its Appl. 2006. V. 5. No. 1. P. 1–17.
2. *Nelius Chr.-F.* Ring emit eindentiger Addition. Padeborn, 1974.
3. *Stephenson W.* Unique addition rings // Can. J. Math. 1969. V. 21. No. 6. P. 1455–1461.
4. *Михалев А.В.* Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Мат. сб. 1988. Т.135 (177). № 2. С. 210–224.
5. *Feigelstock S.*, *Hausen J.*, *Raphael R.* Groups which map onto their endomorphism rings // Proc. Dublin Conference. Basel, 1999. P. 231–241.
6. *Туганбаев А.А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
7. *Hausen J. and Johnson J.A.* Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc. 1995. V. 59. P. 173–183.
8. *Любимцев О.В.* Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 4. С. 1419–1422.
9. *Крылов П.А.*, *Михалев А.В.*, *Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал пресс, 2006.

Статья поступила 28.02.2012 г.

Chistyakov D.S. ENDOPRIMAL ABELIAN GROUPS AND MODULES. In this paper we study homogeneous mappings of a direct sum of copies of a module to this module, the mapping are commuting with elements of the ring. The relation between the generalized endoprimality of the module and the property of unique addition on this ring is established.

Keywords: endoprimal (generalized endoprimal) module, ring with unique addition, *EE*-group.

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Nizhny Novgorod Commercial Institute)
E-mail: chistyakovds@yandex.ru