ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2007 Управление, вычислительная техника и информатика № 1

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 681.513.3

В.В. Домбровский, Д.В. Домбровский, Е.А. Ляшенко

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ФИНАНСОВЫМИ АКТИВАМИ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ С УЧЕТОМ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

В работе представлена робастная модель управления инвестиционным портфелем в пространстве состояний, учитывающая транзакционные издержки и ограничения на объемы торговых операций. Цены рисковых финансовых активов подчиняются стохастическим разностным уравнениям со случайной волатильностью. Целью управления является отслеживание гипотетического эталонного портфеля. Получены уравнения, определяющие оптимальные стратегии прогнозирующего управления с обратной связью при ограничениях.

Проблема выбора оптимальной структуры портфеля ценных бумаг (инвестиционного портфеля – ИП) – одна из основных в финансовом менеджменте. Существуют различные подходы к управлению ИП, которые отличаются способами описания эволюции цен финансовых активов, представления динамики ИП, целями управления (выбором функции риска) [1 – 5].

В работе рассматривается задача управления ИП, состоящим из рисковых вложений (обыкновенных акций) и безрискового вклада (банковского счета), допускается также возможность займа по безрисковой ставке и участие в операциях продажи без покрытия. Предложена модель управления ИП в пространстве состояний, учитывающая транзакционные издержки и ограничения на объемы торговых операций. Предполагается, что цены рисковых финансовых активов описываются дискретными аналогами уравнений диффузионного типа со стохастической волатильностью. Целью управления является отслеживание желаемой траектории роста капитала, которая задается инвестором [5].

Для оптимизации ИП предлагается использовать методологию управления с прогнозирующей моделью [5]. Привлекательной чертой такого подхода является возможность достаточно просто в явном виде учитывать ограничения на переменные состояния и управления. Получены уравнения, определяющие оптимальные стратегии прогнозирующего управления ИП с обратной связью при ограничениях на управляющие переменные.

1. Динамическая модель инвестиционного портфеля с учетом транзакционных издержек и ограничений на объемы торговых операций

Рассмотрим ИП, состоящий из n рисковых активов и одного безрискового актива. Динамика вложения $x_i(k)$, $i=\overline{1,n}$, в рисковый актив i-го вида подчиняется стохастическому разностному уравнению

$$x_i(k+1)=[1+\eta_i(k)]\left[x_i(k)+u_i^+(k)-u_i^-(k)\right],\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $\eta_i(k)$ – доходность рискового финансового актива i-го вида (случайная величина), $u_i^+(k)\geq 0$ – капитал, переводимый из безрискового вложения в i-й рисковый актив, $u_i^-(k)\geq 0$ – капитал, переводимый из i-го рискового вложения в безрисковый актив. Если какая-либо переменная $x_i(k)<0$, $i=\overline{1,n}$, то это означает участие в операции «продажи без покрытия» на сумму $|x_i(k)|$.

Предполагается, что пропорциональные транзакционные издержки при покупке и продаже рисковых активов удерживаются из безрискового вложения, динамика которого имеет следующий вид:

$$x_{n+1}(k+1)=[1+r_1(k)]\times$$
$$\times\left[x_{n+1}(k)+g(k)-\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^+)u_i^+(k)+\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^-)u_i^-(k)\right], \tag{2}$$

где $r_1(k)$ – ставка доходности безрискового актива; $\lambda_i^+\geq 0$ – доля капитала $u_i^+(k)$, отчисляемая на оплату транзакционных издержек при покупке рискового актива i-го вида; $\lambda_i^-\geq 0$ – доля капитала $u_i^-(k)$, идущая на оплату транзакционных издержек при продаже рискового актива i-го вида; переменная $g(k)>0$ означает заем безрискового капитала в размере $g(k)$, если $g(k)<0$, то происходит возврат безрискового долга в размере $|g(k)|$. Переменная $x_{n+1}(k+1)$ не может быть отрицательной, откуда следует, что

$$0\leq x_{n+1}(k)+g(k)-\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^+)u_i^+(k)+\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^-)u_i^-(k). \tag{3}$$

Динамика заемного капитала описывается следующим уравнением:

$$x_{n+2}(k+1)=[1+r_2(k)][x_{n+2}(k)-g(k)], \tag{4}$$

где $r_2(k)$ – ставка займа безрискового актива ($r_1(k)<r_2(k)$). Переменная $x_{n+2}(k)$ означает, что на сумму, равную $|x_{n+2}(k)|$, сделан заем безрискового актива, она принимает только неположительные значения, откуда следует, что

$$x_{n+2}(k)-g(k)\leq 0. \tag{5}$$

Общий капитал портфеля $V(k)=\sum_{i=1}^{n+2}x_i(k)$.

При управлении портфелем также учитываются следующие ограничения:

$$x_i^{\min}(k)\leq x_i(k)+u_i^+(k)-u_i^-(k)\leq x_i^{\max}(k),\quad i=\overline{1,n}; \tag{6}$$

$$x_{n+1}(k)+g(k)-\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^+)u_i^+(k)+\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^-)u_i^-(k)\leq x_{n+1}^{\max}(k); \tag{7}$$

$$x_{n+2}^{\min}\leq x_{n+2}(k)-g(k). \tag{8}$$

Если нижняя граница $x_i^{\min}(k)<0$, $i=\overline{1,n}$, то для акций i-го вида допустимо участие в операции «продажи без покрытия» на сумму не больше, чем $\left|x_i^{\min}(k)\right|$;

если $x_i^{\min}(k) \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, то операции «продажи без покрытия» для акций i-го вида запрещены; $x_i^{\max}(k) \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в акции i-го вида; $x_{n+1}^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный объем капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив; $x_{n+2}^{\min}(k) \leq 0$ определяет максимальный размер $\left| x_{n+2}^{\min}(k) \right|$ займа безрискового актива.

Отметим, что величины $x_i^{\max}(k)$, $i = \overline{1,n+1}$, и $x_i^{\min}(k)$, $i = \overline{1,n}, n+2$, на практике часто зависят от величины общего капитала ИП, что можно учесть, положив $x_i^{\min}(k) = \gamma_i' V(k)$, $x_i^{\min}(k) = \gamma_i'' V(k)$, где γ_i' и γ_i'' – постоянные коэффициенты.

Структуру такого ИП можно описать в виде стохастической сети (рис. 1), узлы которой представляют капитал x_i, помещенный в финансовый актив i-го вида (при $i = \overline{1,n}$ – рисковые вклады, при $i = n + 1$ – безрисковый вклад, при $i = n + 2$ – безрисковый заем), а дуги – направления и объемы перераспределяемого капитала.

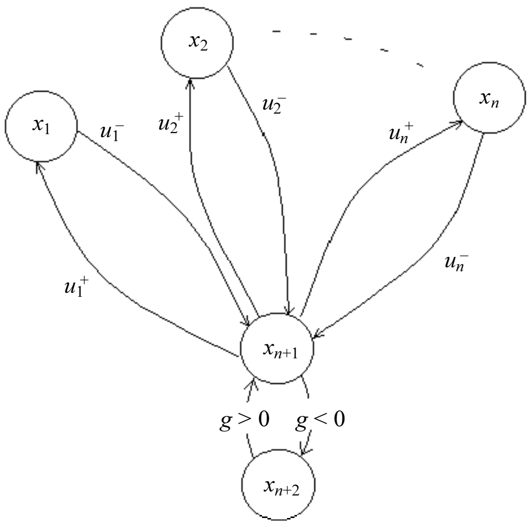

Рис. 1. Сетевая стуктура ИП

Для описания эволюции цен рисковых финансовых активов используем модель вида

$$S_i(k+1) = S_i(k)\left[1 + \mu_i(k) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}[\theta(k), k] w_j(k)\right],$$

где $S_i(k)$ – цена i-й ценной бумаги в момент времени k, $i = \overline{1,n}$; $\mu_i(k)$ – ожидаемая доходность i-й ценной бумаги; $w(k) = [w_1, \ldots, w_n]^{\mathrm{T}}$ – вектор белых шумов размерности n с нулевым средним и единичной матрицей ковариации; $\sigma_{ij}[\theta(k),k]$ – элементы матрицы волатильности $\|\sigma_{ij}[\theta(k),k]\|$, зависящие от $\theta(k)$ линейно; $\theta(k)$ – последовательность независимых q-мерных случайных векторов с известными первым и вторым моментами: $\mathrm{M}\{\theta(k)\} = \bar{\theta}(k)$, $\mathrm{M}\{\theta(k)\,\theta^{\mathrm{T}}(k)\} = \Theta$, $\mathrm{M}\{\theta(k)\, w^{\mathrm{T}}(k)\} = 0$.

Уравнения (1), (2), (4) можно представить в матричной форме:

$$x(k+1)=a_0(k)x(k)+b_0(k)u(k)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}a_j[\theta(k),k]w_j(k)x(k)+\sum_{j=1}^{n}b_j[\theta(k),k]w_j(k)u(k), \tag{9}$$

где
$$x(k)=[x_1(k),\quad \ldots,\quad x_n(k),\quad x_{n+1}(k),\quad x_{n+2}(k)]^T,$$
$$u(k)=\left[u_1^+(k),\ldots,u_n^+(k),u_1^-(k),\ldots,u_n^-(k),g(k)\right]^T,$$
$$a_0(k)=\operatorname{diag}(a(k),\ 1+r_1(k),\ 1+r_2(k)),$$
$$a(k)=\operatorname{diag}(1+\mu_1(k),\ \ldots,\ 1+\mu_n(k)),$$
$$a_j[\theta(k),k]=\operatorname{diag}\left(d_j[\theta(k),k],0,0\right),\ j=\overline{1,n},$$
$$d_j[\theta(k),k]=\operatorname{diag}\left(\sigma_{1,j}[\theta(k),k],\ldots,\sigma_{n,j}[\theta(k),k]\right),\ j=\overline{1,n},$$
$$b_0(k)=\begin{bmatrix} a(k) & -a(k) & 0_n^T \\ -(1+r_1(k))\lambda^+ & (1+r_1(k))\lambda^- & 1+r_1(k) \\ 0_n & 0_n & -[1+r_2(k)] \end{bmatrix},$$
$$\lambda^+=\left[1+\lambda_1^+\ \ldots\ 1+\lambda_n^+\right],\ \lambda^-=\left[1-\lambda_1^-\ \ldots\ 1-\lambda_n^-\right],$$
$$b_j[\theta(k),k]=\begin{bmatrix} d_j[\theta(k),k] & -d_j[\theta(k),k] & 0_n^T \\ 0_n & 0_n & 0 \\ 0_n & 0_n & 0 \end{bmatrix},\quad j=\overline{1,n},$$

0_n – нулевая вектор-строка размерности n. Ограничения (3), (5), (6) – (8) и ограничения на положительность переменных $u_i^+(k)$ и $u_i^-(k)$ в матричном виде запишутся следующим образом:

$$u^{\min}(k)\le Su(k), \tag{10}$$

где

$$S=\begin{bmatrix} E_n & 0_n^{\mathrm T}0_n & 0_n^{\mathrm T} \\ 0_n^{\mathrm T}0_n & E_n & 0_n^{\mathrm T} \\ E_n & -E_n & 0_n^{\mathrm T} \\ -E_n & E_n & 0_n^{\mathrm T} \\ -\lambda^+ & \lambda^- & 1 \\ \lambda^+ & -\lambda^- & -1 \\ 0_n & 0_n & -1 \\ 0_n & 0_n & 1 \end{bmatrix},\quad u^{\min}(k)=\begin{bmatrix} 0_n^{\mathrm T} \\ 0_n^{\mathrm T} \\ x^{\min}(k)-x_{1\ldots n}(k) \\ x_{1\ldots n}(k)-x^{\max}(k) \\ -x_{n+1}(k) \\ x_{n+1}(k)-x_{n+1}^{\max}(k) \\ x_{n+2}^{\min}(k)-x_{n+2}(k) \\ x_{n+2}(k) \end{bmatrix},$$

$$x_{1\ldots n}(k)=[x_1(k)\ \ldots\ x_n(k)]^{\mathrm T},$$

$$x^{\min}(k) = \left[x_1^{\min}(k) \ \dots \ x_n^{\min}(k)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$x^{\max}(k) = \left[x_1^{\max}(k) \ \dots \ x_n^{\max}(k)\right]^{\mathrm{T}},$$

E_n – единичная матрица размерности n.

2. Управление инвестиционным портфелем

Рассмотрим задачу слежения за эталонным портфелем. Необходимо определить стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с наименьшими отклонениями следовал капиталу $V^0(k)$ некоторого определяемого инвестором гипотетического эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = \left[1+\mu^0(k)\right]V^0(k), \tag{11}$$

где $\mu^0(k)$ – заданная желаемая доходность портфеля. В начальный момент $V^0(0) = V(0)$ и распределение капитала по активам известно $x(0) = x^0$.

Для управления портфелем используем стратегии с прогнозирующей моделью, которые определяются по следующему правилу. На каждом шаге k минимизируем критерий (функцию риска) со скользящим горизонтом управления

$$J(k+p/k) =$$

$$= \mathrm{M}\left\{\sum_{i=k}^{k+p-1} \left[(V(i+1)-V^0(i+1))^2 + u^{\mathrm{T}}(i)R(i)u(i)\right] \Big/ x(k)\right\}, \tag{12}$$

по последовательности программных управлений $u(k/k), \dots, u(k+p-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент k при ограничениях (10) на $u(k/k)$, где $u(s/k) = \left[u_1^+(s/k), \dots, u_n^+(s/k), u_1^-(s/k), \dots, u_n^-(s/k), g(s/k)\right]^{\mathrm{T}}$, $M\{a/b\}$ – оператор условного математического ожидания, $R(s) > 0$ – матрица весовых коэффициентов, p – горизонт прогноза, k – текущий момент времени. В качестве управления в момент k берем $u(k) = u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний $x(k)$, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управления $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для текущего момента $k+1$ и т.д.

Теорема. Вектор прогнозирующих управлений

$$U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k), u^{\mathrm{T}}(k+1/k), \dots, u^{\mathrm{T}}(k+p-1/k)]^{\mathrm{T}},$$

минимизирующий критерий (12) при ограничениях вида (10) на траекториях системы (9), (11), на каждом шаге k определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+p/k) = 2z^{\mathrm{T}}(k)G(k)U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \tag{13}$$

при ограничениях

$$u^{\min}(k) \le \overline{S}U(k), \tag{14}$$

где $z(k) = [x^{\mathrm{T}}(k),\ V^{0}(k)]^{\mathrm{T}}$, $\overline{S}$, $G(k)$, $H(k)$ – блочные матрицы:

$$\overline{S} = [S\ \ 0^{\mathrm{T}}_{4n+4} 0_{(2n+1)(p-1)}]\,,$$

$$G(k) = \left[G_1(k), \dots, G_p(k)\right],$$

$$H(k) = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & \dots & H_{1p}(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{p1}(k) & \dots & .H_{pp}(k) \end{bmatrix},$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$H_{is}(k) = \begin{cases} B_0^{\mathrm{T}}(k+i-1)\left\{\prod\limits_{j=i}^{s-2} A_0(k+j)\right\} L_{12}(p-s), & i<s, \\ L_{22}(p-i) + R(k+i-1), & i=s, \\ H_{si}^{\mathrm{T}}(k), & i>s, \end{cases}$$

$$G_i(k) = \left\{\prod\nolimits_{s=0}^{i-2} A_0(k+s)\right\} L_{12}(p-i)\,,$$

$$\prod\nolimits_{j=s}^{s-1} A_0(k+j) = \mathrm{E}_{n+2}\,,$$

$$Q(s+1) = L_{11}(s) + C^{\mathrm{T}}C\,,\ Q(0) = C^{\mathrm{T}}C\,,$$

$$L_{11}(s) = A_0(k+p-1-s)Q(s)A_0(k+p-1-s) +$$

$$+\sum\nolimits_{j=1}^{n} M\left\{A_j(k+p-1-s)Q(s)A_j(k+p-1-s)\right\},$$

$$L_{12}(s) = A_0(k+p-1-s)Q(s)B_0(k+p-1-s) +$$

$$+\sum\nolimits_{j=1}^{n} M\left\{A_j(k+p-1-s)Q(s)B_j(k+p-1-s)\right\},$$

$$L_{22}(s) = B_0^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)B_0(k+p-1-s) +$$

$$+\sum\nolimits_{j=1}^{n} M\left\{B_j^{\mathrm{T}}(k+p-1-s)Q(s)B_j(k+p-1-s)\right\},$$

где

$$A_0(s) = diag\left(a_0(s),\quad 1+\mu^{0}(s)\right); \tag{15}$$

$$A_j[\theta(s),s] = diag\left(a_j[\theta(s),s],\ 0\right); \tag{16}$$

$$B_0(s) = \begin{bmatrix} b_0(s) \\ 0_{2n+1} \end{bmatrix}; \tag{17}$$

$$B_j[\theta(s),s] = \begin{bmatrix} b_j[\theta(s),s] \\ 0_{2n+1} \end{bmatrix}; \tag{18}$$

$$C = \left[e_{n+2}^{\mathrm{T}} \quad -1 \right], \tag{19}$$

e_n – вектор-столбец размерности n, состоящий из единиц.

Оптимальное управление

$$u(k) = \left[E_{2n+1} \quad 0_{2n+1}^{\mathrm{T}} 0_{(2n+1)(p-1)} \right] U(k).$$

Доказательство. Введя вектор $z(s) = \left[x^{\mathrm{T}}(s) \;\; V^0(s) \right]^{\mathrm{T}}$, систему уравнений (9), (11) можно переписать в следующем виде:

$$z(k+1) = \left(A_0(k) + \sum_{j=1}^{n} A_j[\theta(k), k] w_j(k) \right) z(k) +$$

$$+ \left(B_0(k) + \sum_{j=1}^{n} B_j[\theta(k), k] w_j(k) \right) u(k), \tag{20}$$

где матрицы $A_0(s)$, $B_0(s)$, $A_j[\theta(s),s]$, $B_j[\theta(s),s]$ определяются соотношениями (15) – (18). Критерий (12) перепишется следующим образом:

$$J(k+p/k) = \mathrm{M}\left\{ \sum_{i=k}^{k+p-1} \left[z^{\mathrm{T}}(i+1) C^{\mathrm{T}} C z(i+1) + u^{\mathrm{T}}(i) R(i) u(i) \right] \Big/ z(k) \right\}, \tag{21}$$

где вектор-строка C определяется из соотношений (19).

Таким образом, минимизацию критерия (12) по последовательности прогнозирующих управлений на траекториях систем (9) и (11) при ограничениях вида (10) на $u(k/k)$ можно свести к минимизации критерия (21) по последовательности прогнозирующих управлений на траекториях системы (20) при ограничениях вида (10) на $u(k/k)$. Из теоремы 2, приведенной в [5], следует, что оптимальный вектор прогнозирующих управлений $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k/k),\ u^{\mathrm{T}}(k+1/k),\ \ldots,\ u^{\mathrm{T}}(k+p-1/k)]^{\mathrm{T}}$ определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида (13) при ограничениях (14).

Литература

1. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. *Cadenillas A.* Consumption-investment problems with transaction costs: Survey and open problems // Mathematical Methods of Operational Research. 2000. No. 51. P. 43 – 68.
3. *Merton R.C.* Continuous-time finance. Cambridge MA: Blackwell, 1990.
4. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. № 4. С. 527 – 555.
5. *Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 8 июня 2007 г.