УДК 621.391.1; 519.21

С.В. Лопухова, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО ПОТОКА

Асимптотическим методом третьего порядка исследуется рекуррентный поток событий. Рассматривается допредельная модель потока. Сравниваются результаты асимптотического анализа и аналитического исследования допредельной модели.

1. Математическая модель

Известно, что стационарный поток восстановления называется рекуррентным [1]. Он характеризуется единственной функцией распределения

$$A_1(x) = \frac{1}{a}\int_0^x (1 - A(y))dy\,,\ \ a = \int_0^\infty (1 - A(x))dx = M\tau_n\,,$$

где распределение $A_1(x)$ характеризует так называемую величину перескока в потоках восстановления.

Случайный поток однородных событий будем определять в виде случайного процесса $n(t)$ – числа событий, наступивших за время t.

Обозначим через $z(t)$ длину интервала от текущего момента времени t до момента наступления следующего события. Тогда процесс $\{n(t), z(t)\}$ является марковским, что позволит нам для его исследования применить теорию марковских процессов.

Таким образом, нам необходимо найти распределение вероятностей двумерного случайного процесса $\{n(t), z(t)\}$, то есть

$$P(n, z, t) = P\{n(t), z(t) < z\}.$$

Так как процесс $\{n(t), z(t)\}$ является двумерным процессом Маркова, то для распределения вероятностей $P(n,z,t)$ нетрудно составить систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(0,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(0,0,t)}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial P(n,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(n,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(n,0,t)}{\partial z} + A(z)\dfrac{\partial P(n-1,0,t)}{\partial z}. \end{cases} \tag{1}$$

2. Асимптотика первого порядка

Определим функцию

$$H(u,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,z,t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Тогда в силу (1) можно записать

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \left(A(z)e^{ju} - 1\right)\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\,. \tag{2}$$

Модифицируя метод асимптотического анализа аналогично [2, 3] введем величину T – длину интервала наблюдений за рассматриваемым потоком. В уравнении (2) выполним замены

$$\frac{1}{T}=\varepsilon\,,\ \frac{t}{T}=t\varepsilon=\tau\,,\ u=w\varepsilon\,,\ H(u,z,t)=F_1(w,z,\tau,\varepsilon)\,,$$

тогда (2) примет вид

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\left(A(z)e^{jw\varepsilon}-1\right)\frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\,. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если при* $\varepsilon\to 0$ *существует предел* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_1(w,z,\tau,\varepsilon)=F_1(w,z,\tau)$, *то* $F_1(w,\tau)$ *имеет вид*

$$F_1(w,\tau)=e^{jw\text{æ}_1\tau}R(z),$$

где $R(z)=\frac{1}{a}\int\limits_0^z\{1-A(x)\}dx$ *– стационарное распределение процесса* $z(t)$, *а величина* æ$_1$ *определяется равенством* (9).

Доказательство. Выполним указанный предельный переход в (3), получим систему уравнений

$$\frac{\partial F_1(w,z,\tau)}{\partial z}=(1-A(z))\frac{\partial F_1(w,0,\tau)}{\partial z}\,. \tag{4}$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$F_1(w,z,\tau)=R(z)\Phi_1(w,\tau)\,. \tag{5}$$

Подставим это решение в систему (4):

$$\frac{\partial R(z)}{\partial z}=(1-A(z))\frac{\partial R(0)}{\partial z}\,. \tag{6}$$

Проинтегрировав выражение (6), имеем

$$R(z)=\frac{\partial R(0)}{\partial z}\int\limits_0^z(1-A(x))dx\,.$$

Введем следующие обозначения $\int\limits_0^\infty\{1-A(x)\}dx=a$. Тогда

$$\lim_{z\to\infty}R(z)=R(\infty)=\frac{\partial R(0)}{\partial z}a=Ca\,. \tag{8}$$

$$1=Ca\,.$$

Обозначим
$$C=\frac{1}{a}=\text{æ}_1\,, \tag{9}$$

тогда
$$\frac{\partial R(0)}{\partial z}=\text{æ}_1\,.$$

Следовательно,
$$R(z)=\frac{1}{a}\int\limits_0^z\{1-A(x)\}dx\,.$$

Теперь найдем функции $\Phi_1(w,\tau)$. Устремим z в бесконечность в выражении (3):

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,\infty,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\left(e^{jw\varepsilon}-1\right)\frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z},$$

разложим в ряд экспоненту

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,\infty,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=(1+jw\varepsilon-1)\frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+O(\varepsilon).$$

Учитывая (5), получим

$$\frac{\partial\Phi_1(w,\tau)}{\partial\tau}=jw\text{æ}_1\Phi_1(w,\tau),$$

Таким образом, имеем

$$\Phi_1(w,\tau)=e^{jw\text{æ}_1\tau}.\ F_1(w,\tau)=e^{jw\text{æ}_1\tau}\text{æ}_1\int_0^z\{1-A(x)\}dx.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для достаточно больших значений времени* t $(t=\tau T\to\infty)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$Me^{jun(t)}=\lim_{z\to\infty}H(u,z,t)\approx e^{ju\text{æ}_1 t}. \tag{10}$$

Равенство (10) будем называть *асимптотикой первого порядка* характеристической функции процесса $n(t)$.

3. Асимптотика второго порядка

Рассмотрим функцию

$$H(u,z,t)=e^{ju\text{æ}_1 t}H_2(u,z,t).$$

Тогда, подставив ее в уравнение (2) для функции $H_2(u,z,t)$, имеем

$$\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial z}-ju\text{æ}_1H_2(u,z,t)+\left(A(z)e^{ju}-1\right)\frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z}. \tag{11}$$

Аналогично асимптотике первого порядка, введем обозначения $\frac{1}{T}=\varepsilon^2$ и выполним замены

$$\frac{t}{T}=t\varepsilon^2=\tau,\ u=w\varepsilon,\ H_2(u,z,t)=F_2(w,z,\tau,\varepsilon).$$

Тогда (11) примет вид

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}-jw\varepsilon\text{æ}_1F_2(w,z,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\left(A(z)e^{jw\varepsilon}-1\right)\frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если при* $\varepsilon\to0$ *существует предел* $\lim_{\varepsilon\to0}F_2(w,z,\tau,\varepsilon)=F_2(w,z,\tau)$, *то* $F_2(w,\tau)$ *имеет вид*

$$F_2(w,\tau)=e^{\frac{(jw)^2}{2}æ_2\tau}R(z),$$

где функция R(z) определена выше, а семиинвариант $æ_2$ *определяется выражением*

$$æ_2=2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}+æ_1.$$

Доказательство. Равенство (12) запишем с точностью до бесконечно малой величины порядка $O(\varepsilon^2)$, получим уравнение

$$O(\varepsilon^2)=\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}-jw\varepsilon æ_1 F_2(w,0,\tau,\varepsilon)+$$

$$+(A(z)(1+jw\varepsilon)-1)\frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}, \qquad (13)$$

решение которого аналогично (5) запишем в виде

$$F_2(w,z,\tau,\varepsilon)=\Phi_2(w,\tau)\{R(z)+jw\varepsilon f_2(z)\}+O(\varepsilon). \qquad (14)$$

Подставив решение (14) в выражение (12), получим

$$O(\varepsilon^2)=\frac{\partial R(z)}{\partial z}+jw\varepsilon\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}-jw\varepsilon æ_1 R(z)+(A(z)(1+jw\varepsilon)-1)\left(\frac{\partial R(z)}{\partial z}+jw\varepsilon\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}\right).$$

Учитывая выражение (6), имеем

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}-æ_1 R(z)+A(z)æ_1+(A(z)-1)\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}=0. \qquad (15)$$

Устремив z в бесконечность, положив $f_2(\infty)=0$, получим

$$f_2(\infty)=æ_1\int_0^\infty(R(x)-A(x))dx+\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}\int_0^\infty(1-A(x))dx, \qquad (16)$$

тогда

$$\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}=-æ_1^2\int_0^\infty(R(x)-A(x))dx. \qquad (17)$$

Найдем функции $\Phi_2(w,\tau)$. Устремим переменную z к бесконечности в выражении (12) и, учитывая (14), получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi_2(w,\tau)}{\partial\tau}=\frac{(jw)^2}{2}\left\{2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}+æ_1\right\}\Phi_2(w,\tau),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi_2(w,\tau)=\exp\left(\frac{(jw)^2}{2}æ_2\tau\right),$$

где $æ_2$ определяется выражением

$$æ_2=2\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}+æ_1. \qquad (18)$$

Здесь $\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}$ – частное решение (17). Теорема доказана.

Следствие. *Для достаточно больших значений времени* t $(t = \tau T \to \infty)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$Me^{jun(t)} = \lim_{z\to\infty} H(u,z,t) \approx e^{\left\{ju\text{æ}_1 t + \frac{(ju)^2}{2}\text{æ}_2 t\right\}}. \quad (19)$$

Равенство (19) будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции процесса $n(t)$.

4. Асимптотика третьего порядка

Рассмотрим функцию

$$H_2(u,z,t) = e^{\frac{(ju)^2}{2}\text{æ}_2 t} H_3(u,z,t).$$

Тогда, подставив ее в уравнение (11) для функции $H_3(u,z,t)$, имеем

$$\frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_3(u,z,t)}{\partial z} - \left(ju\text{æ}_1 + \frac{(ju)^2}{2}\text{æ}_2\right) H_3(u,z,t) +$$

$$+ \left(A(z)e^{ju} - 1\right)\frac{\partial H_3(u,0,t)}{\partial z}, \quad (20)$$

Аналогично предыдущим случаям, введем обозначения $\frac{1}{T} = \varepsilon^3$ и выполним замены

$$\frac{t}{T} = t\varepsilon^3 = \tau, \; u = w\varepsilon, \; H_3(u,z,t) = F_3(w,z,\tau,\varepsilon).$$

Тогда (20) примет вид

$$\varepsilon^3 \frac{\partial F_3(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F_3(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} -$$

$$-\left(jw\varepsilon\text{æ}_1 + \frac{(jw\varepsilon)^2}{2}\text{æ}_2\right) F_3(w,z,\tau,\varepsilon) + \left(A(z)e^{jw\varepsilon} - 1\right)\frac{\partial F_3(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}. \quad (21)$$

Теорема 3. *Если при* $\varepsilon \to 0$ *существует предел* $\lim_{\varepsilon\to 0} F_3(w,z,\tau,\varepsilon) = F_3(w,z,\tau)$, *то* $F_3(w,\tau)$ *имеет вид*

$$F_3(w,\tau) = e^{\frac{(jw)^3}{3!}\text{æ}_3\tau} R(z),$$

где функция $R(z)$ *определена выше,* æ_3 *определяется равенством*

$$\text{æ}_3 = \text{æ}_1 + 3\frac{\partial f_2(0)}{\partial z} + 3\frac{\partial f_3(0)}{\partial z}. \quad (22)$$

Здесь $\frac{\partial f_3(0)}{\partial z}$ *имеет вид*

$$\frac{\partial f_3(0)}{\partial z} = -\text{æ}_1\text{æ}_2 \int_0^\infty (R(x) - A(x))dx - 2\text{æ}_1^2 \int_0^\infty f_2(x)dx.$$

Доказательство этой теоремы выполняется аналогично доказательствам вышеприведенных теорем.

Следствие. *Для достаточно больших значений времени* t $(t = \tau T \to \infty)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$Me^{jun(t)} = \lim_{z\to\infty} H(u,z,t) \approx e^{\left\{ju\text{æ}_1 t + \frac{(ju)^2}{2}\text{æ}_2 t + \frac{(ju)^3}{3}\text{æ}_3 t\right\}}. \tag{23}$$

Равенство (23) будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции процесса $n(t)$.

5. Допредельная модель

Имеем дифференциальное уравнение (2):

$$\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \left(A(z)e^{ju} - 1\right)\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z},$$

решение $H(u, z, t)$ которого удовлетворяет начальному условию

$$H(u,z,0) = R(z).$$

Обозначим преобразование Фурье – Стилтьеса [4] от функции $H(u, z, t)$

$$\phi(u,\alpha,t) = \int_0^\infty e^{j\alpha z} d_z H(u,z,t). \tag{24}$$

Тогда из (2) получим уравнение для прямого преобразования Фурье – Стилтьеса

$$\frac{\partial\phi(u,\alpha,t)}{\partial t} = -\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z} - j\alpha\phi(u,\alpha,t) + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z} A^*(\alpha)e^{ju} =$$

$$= -j\alpha\phi(u,\alpha,t) + \frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left(A^*(\alpha)e^{ju} - 1\right), \tag{25}$$

где
$$\int_0^\infty e^{j\alpha z} d_z \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} = e^{j\alpha z}\left.\frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}^{\infty} - \int_0^\infty \frac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} d_z e^{j\alpha z} =$$

$$= -\frac{\partial H(u,0,t)}{\partial z} - j\alpha\phi(u,\alpha,t),$$

$$A^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha z} dA(z) = Me^{j\alpha\tau}.$$

Решение уравнения (25) имеет вид

$$\phi(u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\left(R^*(\alpha) + \int_0^t e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}\left(A^*(\alpha)e^{ju} - 1\right)d\tau\right), \tag{26}$$

где $R^*(\alpha) = \phi(u,\alpha,0)$.

Устремим t в бесконечность в выражении (24), получим

$$\lim_{t\to\infty}\phi(u,\alpha,t) = \int_0^\infty e^{j\alpha z} d_z H(u,z,\infty) = 0.$$

С другой стороны, из (26) имеем

$$0 = \phi(u,\alpha,\infty) = R^*(\alpha) + \left(A^*(\alpha)e^{ju} - 1\right)\int_0^\infty e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}d\tau .$$

Поэтому преобразование Фурье от $\dfrac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}$ имеет вид

$$\int_0^\infty e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z}d\tau = R^*(\alpha)\left(1 - A^*(\alpha)e^{ju}\right)^{-1}.$$

Тогда в силу обратного преобразования Фурье

$$\frac{\partial H(u,0,\tau)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha\tau}R^*(\alpha)\left(1 - A^*(\alpha)e^{ju}\right)^{-1}d\tau .$$

Теперь можно записать решение (26) в виде

$$\phi(u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\left(R^*(\alpha) + \frac{1}{2\pi}\int_0^t e^{j\alpha\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jy\tau}R^*(y)\left(1 - A^*(\alpha)e^{ju}\right)^{-1}dy\left(A^*(\alpha)e^{ju} - 1\right)d\tau\right).$$

Зная, что $\phi(u,0,t) = H(u,\infty,t) = H(u,t)$, получим выражение для функции $H(u,t)$:

$$H(u,t) = 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jy\tau}d\tau R^*(y)\left(1 - A^*(\alpha)e^{ju}\right)^{-1}dy\left(e^{ju} - 1\right),$$

$$H(u,t) = 1 + \frac{\left(e^{ju} - 1\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau R^*(y)\left(1 - A^*(\alpha)e^{ju}\right)^{-1}dy .$$

Найдем отдельно интеграл

$$\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau = -\frac{1}{jy}\int_0^t e^{-jy\tau}d(-jy\tau) = -\frac{1}{jy}e^{-jy\tau}\Big|_{\tau=0}^{t} = -\frac{1}{jy}\left(e^{-jyt} - 1\right) = \frac{1}{jy}\left(1 - e^{-jyt}\right).$$

Тогда

$$H(u,t) = 1 + \frac{\left(e^{ju} - 1\right)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{jy}\left(1 - e^{-jyt}\right)R^*(y)\left(1 - A^*(y)e^{ju}\right)^{-1}dy ,$$

где функция

$$R^*(y) = \int_0^\infty e^{jyz}dR(z) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{jyz}d\int_0^z(1 - A(x))\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{jyz}\left(1 - A(z)\right)dz =$$

$$= \frac{1}{jya}\int_0^\infty(1 - A(z))\,de^{jyz} = \frac{1}{jya}\left((1 - A(z))e^{jyz}\Big|_{z=0}^{\infty} - \int_0^\infty e^{jyz}d\left(1 - A(z)\right)\right) = \frac{A^*(y) - 1}{jya}.$$

Следовательно,

$$H(u,t) = 1 + \frac{\left(e^{ju} - 1\right)}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1 - e^{-jyt}\right)\left(A^*(y) - 1\right)\left(A^*(y)e^{ju} - 1\right)^{-1}dy .$$

Зная, что $H(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t),$ и раскладывая в ряд по функциям e^{jun}, полученное выражение можно записать в виде

$$H(u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(n,t)=1+\frac{\left(e^{ju}-1\right)}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(A^*(y)-1\right)\left(A^*(y)e^{ju}-1\right)^{-1}dy=$$

$$=1+\frac{\left(e^{ju}-1\right)}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(1-A^*(y)\right)\sum_{m=0}^{\infty}e^{jum}A^{*m}(y)dy=$$

$$=1+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(1-A^*(y)\right)\sum_{n=1}^{\infty}e^{jun}A^{*n-1}(y)dy-$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(1-A^*(y)\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}A^{*n}(y)dy=$$

$$=1+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(A^*(y)-1\right)dy-\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(A^*(y)-1\right)^2A^{*n-1}(y)dy.$$

Таким образом, получили распределение вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке за время t

$$\begin{cases}P(0,t)=1-\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jst}-1}{s^2}\left(A^*(s)-1\right)ds,\\ P(i,t)=-\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jst}-1}{s^2}\left(A^*(s)-1\right)^2A^{*i-1}(s)ds.\end{cases}\qquad(27)$$

6. Численные результаты

На временном промежутке $(0,t]$, в течение которого наступают события определяемого случайного процесса $n(t)$, будем рассматривать рекуррентный поток, у которого распределение длин интервалов между наступлениями событий имеет:

1) гамма-распределение с параметрами $\alpha=2$, $\beta=2$ в первом случае и $\alpha=2$, $\beta=0,5$ – во втором;

2) равномерное распределение с параметрами $a = 0$, $b = 2$.

Приняты следующие обозначения:

$[0,t)$ – интервал времени, в течение которого наступают события определяемого случайного процесса $n(t)$,

$P(n,t)$ – распределение вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке за время t;

$PA(n,t)$ – распределение вероятностей, полученное с помощью асимптотики третьего порядка;

для распределения вероятностей $P(n,t)$ и асимптотики третьего порядка $PA(n,t)$ найдено расстояние Колмогорова – Смирнова [5].

Таблица 1

(0, 5], гамма-распределение с параметрами
$\alpha = 2$, $\beta = 2$, $æ_1 = 1$, $æ_2 = 0,5$, $æ_3 = 0,25$

№ п/п	$P(n, t)$	$PA(n, t)$	Расстояние Колмогорова – Смирнова
1	0,0062	0,0039	0,0023
2	0,0416	0,0400	0,0016
3	0,1270	0,1279	0,0009
4	0,2204	0,2230	0,0026
5	0,2445	0,2477	**0,0032**
6	0,1881	0,1899	0,0018
7	0,1059	0,1055	0,0004
8	0,0454	0,0440	0,0014
9	0,0153	0,0141	0,0012
10	0,0042	0,0035	0,0007
11	0,0009	0,0007	0,0002

В этом случае расстояние Колмогорова – Смирнова для аппроксимации третьего порядка равно 0,0032.

Таблица 2

$(0,5]$, равномерное распределение с параметрами
$a = 0$, $\beta = 2$, $æ_1 = 1$, $æ_2 = 0,333$, $æ_3 = 0,333$

№ п/п	$P(n,t)$	$PA(n,t)$	Расстояние Колмогорова – Смирнова
1	0,0004	0,0005	0,0001
2	0,0116	0,0116	0,0000
3	0,0618	0,0679	**0,0061**
4	0,1452	0,1478	0,0026
5	0,2076	0,2054	0,0022
6	0,2092	0,2086	0,0006
7	0,1626	0,1650	0,0024
8	0,1032	0,1054	0,0022
9	0,0555	0,0558	0,0003
10	0,0259	0,0249	0,0010
11	0,0108	0,0095	0,0013
12	0,0040	0,0030	0,0010
13	0,0002	0,0002	0,0000
14	0,0001	0,0001	0,0000

В этом случае расстояние Колмогорова – Смирнова для аппроксимации третьего порядка равно 0,0061.

Заключение

В статье показаны результаты сравнения исследования рекуррентного потока двумя способами – асимптотическим анализом и решением уравнения (2), что позволяет нам найти точное распределение вероятностей числа событий, наступивших за время t. Нужно отметить, что найти распределение вероятностей с помощью аналитических формул (27) удается для достаточно небольших t, в то время как асимптотическое исследование можно провести практически для любого t.

Сравнивая результаты, можно сказать, что аппроксимация третьего порядка имеет погрешность в среднем 0,0001 по сравнению с аналитическим решением. Таким образом, в случаях, когда аналитическим решением воспользоваться не удается, рекомендуется пользоваться асимптотикой третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
2. *Лопухова С.В.*, *Назаров А.А.* Исследование МСМР-потока асимптотическим методом третьего порядка // Вестник Кемеровского государственного университета. Серия «Математика», выпуск 4 (24). Кемерово, 2005. С. 218 – 226.
3. *Лопухова С.В.*, *Назаров А.А.* Исследование потока марковского восстановления асимптотическим методом первого порядка // Материалы V Международной научно-практической конференции «Информационные технологии и математическое моделирование». Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. Ч.1. С. 121 – 123.
4. *Назаров А.А. Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: Учебное пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
5. *Вероятность* и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. С. 239, 244.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 сентября 2007 г.