

УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов**ОБ ОДНОМ ЗАКОНЕ УПРАВЛЕНИЯ ЦЕНОЙ
ПРИ ПРОДАЖЕ СКОРОПОРТЯЩЕЙСЯ ПРОДУКЦИИ**

Рассматривается управление ценой продажи продукции, гарантирующее продажу товара в течение торговой сессии и максимальную прибыль от этой продажи.

Ключевые слова: управление ценой, максимизация прибыли, длительность продаж.

Постановка проблемы и математическая модель

Пусть имеется некоторая скоропортящаяся продукция (например молоко, сметана, свежая рыба, овощи и т.д.), которая должна быть продана в течение торговой сессии (например дня). В противном случае товар снимается с реализации и пропадает.

Продавец покупает партию товара объема Q_0 по оптовой цене d и продает ее по розничной цене c . Ставится задача нахождения значений Q_0 и c , при которых средняя прибыль продавца будет максимальной.

Будем считать, что торговая сессия начинается в момент времени 0 и кончается в момент времени T , то есть она занимает интервал времени $[0, T]$. Обозначим через $Q(t)$ количество товара в момент времени t . Будем также считать, что $Q(0) = Q_0$ фиксировано. Предположим, что поток покупателей является пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(c(t))$, зависящей от розничной цены $c(t)$.

Будем считать, что покупатели приобретают товар независимо друг от друга, и объем покупки ξ есть случайная величина с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

В одном очень частном случае эта задача уже исследовалась в работе Е.В. Новицкой [1], где закон управления ценой $c(t)$ продажи товара брался из соотношения

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T-t}.$$

В настоящей статье рассматривается случай, когда закон управления ценой $c(t)$ продажи товара имеет вид

$$a_1 \lambda(c(t)) = \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}, \quad \gamma \neq 1. \quad (1)$$

Основные характеристики количества товара

Найдем характеристики величины количества товара в диффузионном приближении. Процесс $Q(t)$ может быть приближенно описан следующим стохастическим дифференциальным уравнением [1]

$$dQ(t) = -a_1 \lambda(c) dt + \sqrt{a_2 \lambda(c)} dw(t).$$

В рассматриваемом случае это уравнение принимает вид

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma} dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t). \quad (2)$$

Найдем основные вероятностные характеристики процесса $Q(t)$. Обозначим $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Усредняя уравнение (2) с учетом того, что приращения винеровского случайного процесса независимы и имеют нулевое математическое ожидание, получим следующее уравнение для $\bar{Q}(t)$:

$$d\bar{Q}(t) = -\frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^\gamma} dt,$$

которое надо решить при начальном условии $\bar{Q}(0) = Q_0$. Решая его стандартным методом разделения переменных, получим

$$\bar{Q}(t) = Q_0 \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\}. \quad (3)$$

В частности, $\bar{Q}(T) = Q_0 \exp \left(-\frac{1}{1-\gamma} \right)$, $\bar{Q}(T) = 0$ при $\gamma > 1$.

Для нахождения дисперсии процесса $Q(t)$ рассмотрим процесс $Q^2(t)$. Тогда, используя формулу Ито, получаем, что этот процесс удовлетворяет следующему уравнению:

$$d(Q^2(t)) = \left(-\frac{2Q^2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma} \right) dt + 2Q(t) \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{Q(t)}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t). \quad (4)$$

Обозначим $M\{Q^2(t)\} = Q_2(t)$. Тогда, усредняя (4), получим

$$dQ_2(t) = \left(-\frac{2Q_2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\bar{Q}(t)}{T(1-t/T)^\gamma} \right) dt,$$

или, с учетом (3),

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2 \frac{Q_2(t)}{T(1-t/T)^\gamma} + \frac{a_2 Q_0 \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\}}{a_1 T(1-t/T)^\gamma}, \quad (5)$$

которое надо решить при начальном условии $Q_2(0) = Q_0^2$.

Это уравнение решается стандартным методом вариации произвольных постоянных. Само решение имеет вид

$$Q_2(t) = Q_0^2 \exp \left\{ \frac{2}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} + \frac{a_2 Q_0}{a_1} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} \left[1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \left[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1 \right] \right\} \right]. \quad (6)$$

Отсюда

$$D\{Q(t)\} = D_Q(t) = Q_2(t) - \bar{Q}^2(t) = \\ = \frac{a_2 Q_0}{a_1} \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\} \left[1 - \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}\right]. \quad (7)$$

В частности, $D_Q(0) = 0$, $D_Q(T) = \frac{a_2}{a_1} Q_0 \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\} \left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right]$, $D_Q(T) = 0$ при $\gamma > 1$. Вместе с результатом $\bar{Q}(T) = 0$ это говорит о том, что с вероятностью 1 $Q(T) = 0$, то есть с вероятностью 1 к концу торговой сессии весь товар будет продан при $\gamma > 1$.

Плотность вероятностей процесса $Q(t)$

Таким образом, процесс $Q(t)$ начинается с Q_0 и заканчивается в 0. Рассмотрим $f(Q, t) = e^{-pQ}$. Тогда, используя формулу Ито, получим следующее уравнение:

$$d(e^{-pQ}) = \left(\frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma} p e^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma} p^2 e^{-pQ} \right) dt - \\ - p e^{-pQ} \sqrt{\frac{a_2}{a_1} \frac{Q}{T(1-t/T)^\gamma}} dw(t).$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p, t) = M\{e^{-pQ}\}$, которая является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q, t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t . Тогда $\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial p} = -M\{Q e^{-pQ}\}$ и, усредняя (1.7), получим

$$d_t \Phi(p, t) = -\frac{1}{T(1-t/T)^\gamma} \left(p \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{a_2}{2a_1} p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) dt,$$

или, в явном виде,

$$T(1-t/T)^\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p \left(1 + \frac{a_2}{2a_1} p \right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $\beta = 2a_1/a_2$.

Уравнение (8) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристик. Решение имеет вид

$$\Phi(p, t) = \exp \left(-\frac{\beta \cdot p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}}{p + \beta - p \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}[(1-t/T)^{1-\gamma} - 1]\right\}} Q_0 \right).$$

Находя обратное преобразование Лапласа, получим явный вид $p(Q, t)$:

$$p(Q, t) = \exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta Q_0 \right) \times \\ \times \left[\delta(Q) + \beta \exp \left(- \frac{\beta \cdot Q_0}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \right) \sqrt{\frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\} Q_0}{(1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\})^2 Q}} \times \right. \\ \left. \times I_1 \left[2 \sqrt{\frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{(1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\})^2}} \beta^2 Q_0 Q \right] \right].$$

Отметим особую роль слагаемого

$$\exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta Q_0 \right) \delta(Q),$$

содержащего δ -функцию. Оно возникает потому, что величина покупки является случайной и, в принципе, может прийти покупатель и купить весь оставшийся товар, и тогда торговая сессия для продавца закончится. Математически это происходит потому, что в точке, где $Q(t_0) = 0$, у процесса $Q(t)$ равны нулю и коэффициент сноса, и коэффициент диффузии, и поэтому при $t > t_0$ $Q(t) = 0$.

Средняя длительность продаж

Полученный выше результат позволяет вычислить и некоторые другие характеристики процесса продаж. Обозначим через τ величину промежутка времени от начала торговой сессии до того момента, когда будет продан весь товар, то есть длительность продаж. Тогда из вида рассматриваемого слагаемого следует, что

$$P(\tau \leq t) = F_\tau(t) = \exp \left(- \frac{\exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}}{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} [(1-t/T)^{1-\gamma} - 1] \right\}} \beta \cdot Q_0 \right), \quad (9)$$

где $F_\tau(t)$ есть функция распределения величины τ .

Это позволяет вычислить, например, среднюю длительность продаж. Имеем

$$M\{\tau\} = \int_0^T (1 - F_\tau(t)) dt = T \left(1 - e^{\beta Q_0} \int_0^{1 - \exp \left\{ \frac{1}{1-\gamma} \right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma) \ln(1-x) + 1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dx}{1-x} \right). \quad (10)$$

Входящий сюда интеграл через элементарные функции не выражается.

Найдем асимптотику $M\{\tau\}$ при $\beta Q_0 \gg 1$, то есть при большой величине партии товара Q_0 . Тогда величина $B = 1/\beta Q_0 \ll 1$. Делая в интеграле замену переменных $x/\beta Q_0 = Bx = z$, получим

$$\begin{aligned} & e^{\beta Q_0} \int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma)\ln(1-x)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dx}{1-x} = \\ & = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dz}{1-z/B}. \end{aligned}$$

Найдем по правилу Лопиталя следующий предел:

$$\begin{aligned} & \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{B^2} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dz}{1-z/B} = \\ & = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dz}{1-z/B}}{B^2 e^{-1/B}} = \\ & = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{B(1-\exp\{-1/(1-\gamma)\})}\right\} \left[(1-\gamma)\ln\left(1-1+\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)+1 \right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{2Be^{-1/B} + e^{-1/B}} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $B = 1/\beta Q_0 \ll 1$

$$\begin{aligned} & e^{\beta Q_0} \int_0^{1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}} e^{-\beta Q_0/x} [(1-\gamma)\ln(1-x)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dx}{1-x} = \\ & = \frac{1}{B} e^{1/B} \int_0^{B\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{1-\gamma}\right\}\right)} e^{-1/z} [(1-\gamma)\ln(1-z/B)+1]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \frac{dz}{1-z/B} = O(B) \end{aligned}$$

и поэтому

$$M\{\tau\} = T \left(1 + O\left(\frac{1}{\beta Q_0}\right) \right). \quad (11)$$

Оптимизация по значению параметра γ

Рассмотрим теперь проблему выбора оптимального значения параметра γ при условии $\gamma \geq 1$, то есть при дополнительном требовании, что товар должен быть продан весь до конца торговой сессии.

Рассмотрим случай, когда зависимость $\lambda(c)$ может быть аппроксимирована прямой линией:

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}. \quad (12)$$

Здесь c_0 имеет смысл некоторой «стандартной» цены, так что $\lambda(c_0) = c_0$. Такая аппроксимация возможна, если отклонения цены c от c_0 незначительны.

В этом случае уравнение (1) приобретает вид

$$a_1 \lambda(c) = a_1 \left(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1 \frac{c}{c_0} \right) = \frac{Q}{T \varphi(t/T)},$$

где $\varphi(z) = (1-z)^\gamma$. Отсюда

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{Q}{a_1 \lambda_1 T \varphi(t/T)} \right). \quad (13)$$

Так как в единицу времени в среднем совершается $\lambda(c)$ покупок, средний размер которых равен a_1 , по цене c , то среднее значение выручки в единицу времени

$$ca_1 \lambda(c) = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{1}{a_1 \lambda_1} \frac{Q}{T \varphi(t/T)} \right) \frac{Q}{T \varphi(t/T)}. \quad (14)$$

Усредняя по объему партии товара $Q(t)$, имеющегося в наличии в момент времени t , получим

$$\begin{aligned} M\{ca_1 \lambda(c)\} &= c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\bar{Q}}{T \varphi(t/T)} - c_0 \frac{1}{a_1 \lambda_1} \frac{\bar{Q}^2}{T^2 \varphi^2(t/T)} = \\ &= c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \frac{\bar{Q}}{T \varphi(t/T)} - \frac{c_0}{a_1 \lambda_1} \frac{Q_2}{T^2 \varphi^2(t/T)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда средняя выручка за весь период торговой сессии равна

$$S = \int_0^T M\{ca_1 \lambda(c)\} dt. \quad (16)$$

Подставляя сюда явные выражения для $\bar{Q}$ и Q_2 , после громоздких преобразований получим

$$S = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right], \quad (17)$$

где $q = a_2 / (a_1 Q_0 - a_2)$. Заметим, что в реальности объём партии товара, выставленной на продажу, обычно велик, так что параметр $q \ll 1$.

Естественное желание максимизировать выручку от продажи товара $S \Rightarrow \max$ приводит к условию

$$\int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \Rightarrow \min_{\gamma}. \quad (18)$$

Проблема нахождения оптимального значения параметра γ решалась численно с помощью программы Mathcad 2001i Professional. Некоторые оптимальные значения γ приведены ниже в таблице.

q	0	0,01	0,1
γ	1	1,06	1,27

Отсюда видно, что оптимальное значение γ мало отличается от 1 и, по-видимому, для практики можно рекомендовать значение $\gamma = 1$.

Можно поставить также задачу о нахождении оптимального объема партии товара Q_0 , выставленной на продажу. Пусть товар приобретается по оптовой цене d . Тогда прибыль от продажи нашей партии товара

$$P = S - dQ_0 = \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 \left(e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} + q e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \right) \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right] - dQ_0 =$$

$$= \frac{c_0 Q_0}{\lambda_1} \left[(\lambda_0 + \lambda_1) - \frac{1}{a_1 T} \left(Q_0 - \frac{a_2}{a_1} \right) \int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}} - \frac{a_2}{a_1^2 T} \int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}} \right] - dQ_0. \quad (19)$$

Находя максимум P по Q_0 , получаем

$$Q_{0\text{opt}} = \frac{2\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2} \left[\frac{c_0}{\lambda_1} \left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T} (I_2 - I_1) \right) - d \right], \quad (20)$$

где

$$I_2 = \int_0^1 e^{\frac{2}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}}, \quad I_1 = \int_0^1 e^{\frac{1}{\gamma-1}(1-z^\gamma)} \frac{dz}{z^{2\gamma}}.$$

Максимальное значение прибыли при этом равно

$$P_{\max} = \frac{4\lambda_1 a_1 T}{c_0 I_2} \left[\frac{c_0}{\lambda_1} \left(\lambda_0 + \lambda_1 + \frac{a_2}{a_1^2 T} (I_2 - I_1) \right) - d \right]^2. \quad (21)$$

Используя численные методы поиска экстремума, можно найти и оптимальное значение параметра γ , которое обеспечивает $\max_{\gamma} P_{\max}$. Оно также мало отличается от 1, и поэтому можно приближенно брать $\gamma = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новицкая Е.В., Тертугов А.Ф. Оптимизация розничной продажи скоропортящейся продукции Томск: Изд-во Том. ун-та. 2004. 94 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 26 ноября 2007 г.