

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.2

К.А. Горбенко

НЕМАРКОВСКАЯ КУМУЛЯТИВНАЯ МОДЕЛЬ
ИМУЩЕСТВЕННОГО СТРАХОВАНИЯ

В приведенной работе предлагается и исследуется модель имущественного страхования в виде системы массового обслуживания, у которой входящий поток является кумулятивным и время обслуживания рекуррентным. Особенность модели состоит в том, что каждый клиент может застраховать некоторое количество однотипных объектов, что в терминах теории массового обслуживания означает: входящий поток – неординарный.

Ключевые слова: *имущественное страхование, немарковская кумулятивная модель, капитал компании.*

В имущественном страховании корпоративных клиентов, и даже физических лиц, возникают ситуации, когда клиент желает застраховать сразу несколько объектов – несколько машин или несколько домов. Фактически получается, что клиент один, а источников риска уже несколько. В этом случае, при математическом моделировании, необходимо разделять понятия страхователя и застрахованного объекта. Такое разделение помогает глубже понять структуру взаимоотношений страховщика и страхователей, позволяет предложить более точные модели. В данной работе предлагается и изучается модель описанной ситуации.

1. Модель имущественного страхования

Представим модель страхования в виде трех случайных процессов, считая момент создания компании точкой отсчета времени: $N(t)$ – количество страхователей, пришедших в компанию за время t , при этом $N(0) = 0$; $k(t)$ – количество объектов страхования в момент времени t , $k(0) = 0$; $S(t)$ – капитал компании в момент времени t , $S(0) = S_0$.

Опишем свойства указанных процессов, для этого рассмотрим временной интервал $[t, t+\Delta t]$ достаточно малой длины, на котором могут произойти следующие события:

1) Пришел страхователь, т.е. $\Delta N(t) = N(t+\Delta t) - N(t) = 1$, при этом на величину $\Delta N(t)$ накладываются следующие ограничения:

$$P\{\Delta N(t) = 1 | N(t) = N\} = (\lambda + \beta N) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\Delta N(t) = 0 | N(t) = N\} = 1 - (\lambda + \beta N) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\Delta N(t) > 1 | N(t) = N\} = o(\Delta t), \lambda > 0, \beta > 0.$$

Особенности этого события:

а) Страховая компания фиксирует увеличение количества объектов страхования на величину v , которая является независимой случайной величиной со сле-

дующими известными средними характеристиками: $M\{v\} = u_1$, $M\{v^2\} = u_2$. Сказанное можно представить как

$$\Delta k(t) = k(t+\Delta t) - k(t) = v.$$

б) Капитал компании изменяется следующим образом:

$$\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t) = v \cdot \xi,$$

где ξ – независимая случайная величина, моделирующая величину страхового взноса, причем $M\{\xi\} = a_1$, $M\{\xi^2\} = a_2$.

в) Каждый объект имеет период страхования, равный величине τ , которая является независимой случайной величиной с функцией распределения $B(x)$.

2) Наступил страховой случай. Для более точного описания этого события введем процесс $l(t)$, равный количеству страховых случаев, наступивших за время t , тогда наступление страхового случая формально можно описать как $\Delta l(t) = l(t+\Delta t) - l(t) = 1$, причем предполагается, что

$$P\{\Delta l(t) = 1 | k(t) = k\} = \mu k \Delta t + o(\Delta t), \mu > 0, M\{[\Delta l(t)]^2 | k(t) = k\} = \mu k \Delta t + o(\Delta t).$$

С наступлением страхового случая происходят изменения в капитале компании, а именно, осуществляется выплата страхового возмещения η :

$$\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t) = -\eta,$$

где η – независимая случайная величина с $M\{\eta\} = b_1$, $M\{\eta^2\} = b_2$.

Предложенная модель является развитием моделей, рассмотренных в [1. С. 1; 2. С. 290].

Исследование модели будет состоять в нахождении средних характеристик процессов $k(t)$ и $S(t)$. Отметим, что вероятностные и средние характеристики процесса $N(t)$ определены в работе [3. С. 88], поэтому результаты будем приводить с точностью до $\bar{N}(t)$, $D\{N(t)\}$, $C_N\{t_1, t_2\}$.

2. Средние характеристики числа застрахованных объектов

2.1. Метод просеянного потока

В работе [4. С. 134] предложен метод просеянного потока для исследования системы $M|G|\infty$. Используем идею этого метода для исследования предложенной модели. Для этого введем временной горизонт T и процесс $n(t)$, суть которого в следующем: рассматривается исходный неординарный поток страховых объектов, который просеивается с динамической вероятностью $P(T-t) = 1 - B(T-t)$, где t изменяется в пределах от 0 до T , количество просеянных заявок на момент времени t равно $n(t)$. Особенность этого процесса в том, что он является марковским и для него верно соотношение

$$n(T) = k(T).$$

Отметим очевидные свойства этого процесса:

$$n(0) = 0,$$

$$P\{\Delta n(t) = v | N(t) = N, v\} = (\lambda + \beta N) P(T-t) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\Delta n(t) = 0 | N(t) = N, v\} = 1 - (\lambda + \beta N) P(T-t) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\Delta n(t) > v | N(t) = N, v\} = o(\Delta t),$$

$$M\{\Delta n(t) \Delta N(t) | N(t) = N, v\} = v(\lambda + \beta N) P(T-t) \Delta t + o(\Delta t).$$

2.2. Математическое ожидание

Введем горизонт $T \geq t$ и представим

$$n(t+\Delta t) = n(t) + \Delta n(t).$$

Усредним данное соотношение при фиксированных реализациях $N(t)$, $n(t)$ и v , получим

$$M\{n(t+\Delta t) | N(t), n(t), v\} - n(t) = v(\lambda + \beta N(t))P(T-t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Осуществим усреднение по фиксированным реализациям

$$\bar{n}(t+\Delta t) - \bar{n}(t) = u_1(\lambda + \beta \bar{N}(t))P(T-t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Разделим левую и правую части на Δt , затем устремим Δt к нулю. Отметим, что предел справа существует, следовательно, предел слева тоже существует. В результате получим

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} = u_1(\lambda + \beta \bar{N}(t))P(T-t).$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение в пределах от 0 до t :

$$\bar{n}(t) = u_1 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau))P(T-\tau) d\tau.$$

Воспользуемся соотношением метода просеянного потока, полагая $T = t$:

$$\bar{k}(t) = \bar{n}(t) = u_1 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau))P(t-\tau) d\tau.$$

Окончательно,

$$\bar{k}(t) = u_1 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau))P(t-\tau) d\tau.$$

2.3. Дисперсия

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. В предположениях модели

$$\frac{dC_{nN}\{t|T\}}{dt} = \beta C_{nN}\{t|T\} + u_1(\lambda + \beta \bar{N}(t) + \beta D\{N(t)\})P(T-t), C_{nN}\{0|T\} = 0,$$

где

$$C_{nN}\{t|T\} = M\{(n(t) - \bar{n}(t))(N(t) - \bar{N}(t))\}.$$

Доказательство. Представим

$$n(t+\Delta t)N(t+\Delta t) - n(t)N(t) = \Delta n(t)N(t) + n(t)\Delta N(t) + \Delta n(t)\Delta N(t).$$

Осуществим усреднение при фиксированных реализациях $N(t)$, $n(t)$ и v :

$$\begin{aligned} M\{n(t+\Delta t)N(t+\Delta t) | N(t), n(t), v\} - n(t)N(t) = \\ = v(\lambda + \beta N(t))P(T-t)\Delta t N(t) + n(t)(\lambda + \beta N(t))\Delta t + \\ + v(\lambda + \beta N(t))P(T-t)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

После соответствующего усреднения и осуществления предельного перехода, получим

$$\frac{dn(t)N(t)}{dt} = u_1(\lambda \bar{N}(t) + \beta \bar{N}^2(t))P(T-t) + \lambda \bar{n}(t) + \beta \overline{n(t)N(t)} + u_1(\lambda + \beta \bar{N}(t))P(T-t).$$

Далее, используя определение функции $C_{nN} \{t|T\}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dC_{nN} \{t|T\}}{dt} &= \frac{dn(t)N(t)}{dt} - \frac{d\bar{n}(t)}{dt} \bar{N}(t) - \bar{n}(t) \frac{d\bar{N}(t)}{dt} = \\ &= \beta C_{nN} \{t|T\} + u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t) + \beta D \{N(t)\}) P(T-t). \end{aligned}$$

Получили утверждение леммы.

Теорема 1. В предположениях модели

$$D \{k(t)\} = 2u_1 \beta \int_0^t C_{nN} \{\tau|t\} P(t-\tau) d\tau + u_2 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau)) P(t-\tau) d\tau.$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$n^2(t + \Delta t) = n^2(t) + 2\Delta n(t)n(t) + (\Delta n(t))^2.$$

Проведем условное усреднение:

$$\begin{aligned} M \{n^2(t + \Delta t) | N(t), n(t), v\} - n^2(t) &= 2v(\lambda + \beta N(t)) P(T-t) \Delta n(t) + \\ &+ v^2(\lambda + \beta N(t)) P(T-t) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

После применения стандартных преобразований получим

$$\frac{dn^2(t)}{dt} = 2u_1 (\lambda \bar{n}(t) + \overline{\beta n(t)N(t)}) P(T-t) + u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) P(T-t).$$

Воспользуемся свойствами дисперсии:

$$\frac{dD \{n(t)\}}{dt} = \frac{dn^2(t)}{dt} - 2\bar{n}(t) \frac{d\bar{n}(t)}{dt} = 2u_1 \beta C_{nN} \{t|T\} P(T-t) + u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) P(T-t).$$

Таким образом, получили

$$\frac{dD \{n(t)\}}{dt} = 2u_1 \beta C_{nN} \{t|T\} P(T-t) + u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) P(T-t), D \{n(0)\} = 0.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение и затем воспользуемся соотношением метода просеянного потока. В результате получим утверждение теоремы.

2.4. Ковариация

Как и в случае дисперсии, начнем рассуждения с доказательства вспомогательных утверждений.

Лемма 2. В предположениях модели

$$C_{kn} \{t|T\} = u_1 \beta \int_0^t C_{nN} \{x|T\} P(t-x) dx + u_1 \beta \int_0^t C_{nN} \{x|t\} P(T-x) dx + u_2 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(x)) P(T-x) dx,$$

где

$$C_{kn} \{t|T\} = M \{ (k(t) - \bar{k}(t))(n(t) - \bar{n}(t)) \}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение процесс $m(\tau)$, который отличается от процесса $n(\tau)$ только временным горизонтом t , т.е. соответствующая этому процессу вероятность просеивания равна $P(t-\tau) = 1 - B(t-\tau)$, при этом $T \geq t \geq \tau$.

Представим

$$m(\tau + \Delta \tau) n(\tau + \Delta \tau) - m(\tau) n(\tau) = \Delta m(\tau) n(\tau) + m(\tau) \Delta n(\tau) + \Delta m(\tau) \Delta n(\tau).$$

Как и прежде, проведем условное усреднение:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\{m(\tau + \Delta\tau)n(\tau + \Delta\tau)|N(\tau), n(\tau), m(\tau), v\} - m(\tau)n(\tau) = \\ & = v(\lambda + \beta N(\tau))P(t - \tau)\Delta\tau n(\tau) + m(\tau)v(\lambda + \beta N(\tau))P(T - \tau)\Delta\tau + \\ & + v^2(\lambda + \beta N(\tau))P(T - \tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau). \end{aligned}$$

После усреднения и предельного перехода получим

$$\begin{aligned} \frac{dm(\tau)\overline{n(\tau)}}{d\tau} &= u_1(\lambda\bar{n}(\tau) + \beta\overline{n(\tau)N(\tau)})P(t - \tau) + \\ &+ u_1(\lambda\bar{m}(\tau) + \beta\overline{m(\tau)N(\tau)})P(T - \tau) + u_2(\lambda + \beta\bar{N}(\tau))P(T - \tau). \end{aligned}$$

Введем функцию $C_{mn}\{\tau|t, T\} = \mathbf{M}\{(m(\tau) - \bar{m}(\tau))(n(\tau) - \bar{n}(\tau))\}$. Продифференцируем ее, используя ее очевидное свойство:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{mn}\{\tau|t, T\}}{d\tau} &= \frac{dm(\tau)\overline{n(\tau)}}{d\tau} - \frac{d\bar{m}(\tau)}{d\tau}\bar{n}(\tau) - \bar{m}(\tau)\frac{d\bar{n}(\tau)}{d\tau} = \\ &= u_1\beta C_{nN}\{\tau|T\}P(t - \tau) + u_1\beta C_{nN}\{\tau|t\}P(T - \tau) + u_2(\lambda + \beta\bar{N}(\tau))P(T - \tau). \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} \frac{dC_{mn}\{\tau|t, T\}}{d\tau} &= u_1\beta C_{nN}\{\tau|T\}P(t - \tau) + u_1\beta C_{nN}\{\tau|t\}P(T - \tau) + \\ &+ u_2(\lambda + \beta\bar{N}(\tau))P(T - \tau), C_{mn}\{0|t, T\} = 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем

$$C_{mn}\{\tau|t, T\} = u_1\beta \int_0^{\tau} C_{nN}\{x|T\}P(t - x)dx + u_1\beta \int_0^{\tau} C_{nN}\{x|t\}P(T - x)dx + u_2 \int_0^{\tau} (\lambda + \beta\bar{N}(x))P(T - x)dx.$$

Воспользуемся соотношением метода просеянного потока, полагая $\tau = t$. В итоге, приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. В предположениях модели

$$C_{kN}\{t_1, t_2\} = C_{nN}\{t_1|t_1\}e^{\beta(t_2 - t_1)},$$

где $C_{kN}\{t_1, t_2\} = \mathbf{M}\{(k(t_1) - \bar{k}(t_1))(N(t_2) - \bar{N}(t_2))\}$, $t_1 \leq t_2$.

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$k(t_1)N(t_2 + \Delta t_2) = k(t_1)N(t_2) + k(t_1)\Delta N(t_2).$$

Усредняя при фиксированных реализациях $k(t_1)$ и $N(t_2)$, получим

$$\mathbf{M}\{k(t_1)N(t_2 + \Delta t_2)|N(t_2), k(t_1)\} - k(t_1)N(t_2) = k(t_1)(\lambda + \beta N(t_2))\Delta t_2 + o(\Delta t_2).$$

После применения стандартного набора операций получим

$$\frac{dk(t_1)\overline{N(t_2)}}{dt_2} = \lambda\bar{k}(t_1) + \beta\overline{k(t_1)N(t_2)}.$$

Воспользуемся определением функции $C_{kN}\{t_1, t_2\}$ и ее очевидным свойством

$$\frac{dC_{kN}\{t_1, t_2\}}{dt_2} = \frac{dk(t_1)\overline{N(t_2)}}{dt_2} - \bar{k}(t_1)\frac{d\bar{N}(t_2)}{dt_2} = \beta C_{kN}\{t_1, t_2\}.$$

Таким образом,

$$\frac{dC_{kN}\{t_1, t_2\}}{dt_2} = \beta C_{kN}\{t_1, t_2\}, C_{kN}\{t_1, t_1\} = C_{nN}\{t_1 | t_1\}.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, придем к утверждению леммы.

Теорема 2. В предположениях модели

$$C_k\{t_1, t_2\} = C_{kn}\{t_1 | t_2\} + u_1 \beta C_{nN}\{t_1 | t_1\} \int_{t_1}^{t_2} e^{\beta(\tau-t_1)} P(t_2 - \tau) d\tau,$$

где

$$C_k\{t_1, t_2\} = M\{(k(t_1) - \bar{k}(t_1))(k(t_2) - \bar{k}(t_2))\}.$$

Доказательство. Запишем, считая что $t_1 \leq t_2 \leq T$,

$$k(t_1)n(t_2 + \Delta t_2) = k(t_1)n(t_2) + k(t_1)\Delta n(t_2).$$

Используя ту же логику рассуждений, что и в лемме 3, получим

$$\frac{d\overline{k(t_1)n(t_2)}}{dt_2} = u_1 (\lambda \bar{k}(t_1) + \beta \overline{k(t_1)N(t_2)}) P(T - t_2).$$

Введем функцию $C_{kn}\{t_1, t_2 | T\} = M\{(k(t_1) - \bar{k}(t_1))(n(t_2) - \bar{n}(t_2))\}$. Далее, выполняя дифференцирование, имеем

$$\frac{dC_{kn}\{t_1, t_2 | T\}}{dt_2} = u_1 \beta C_{kN}\{t_1, t_2\} P(T - t_2),$$

где $C_{kn}\{t_1, t_1 | T\} = C_{kn}\{t_1 | T\}$.

Проинтегрируем, отсюда

$$C_{kn}\{t_1, t_2 | T\} = C_{kn}\{t_1 | T\} + u_1 \beta \int_{t_1}^{t_2} C_{kN}\{t_1, \tau\} P(T - \tau) d\tau.$$

Далее, используя соотношение метода просеянного потока и результаты леммы 3, получим утверждение теоремы.

3. Средние характеристики капитала компании

3.1. Математическое ожидание

Представим

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \Delta S(t).$$

Зафиксируем реализации $S(t)$, $k(t)$, ξ , η и v для проведения условного усреднения:

$$M\{S(t + \Delta t) | S(t), k(t), \xi, \eta, v\} - S(t) = \xi v (\lambda + \beta N(t)) \Delta t - \eta \mu k(t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Пользуясь независимостью случайных величин ξ , η и v , проведем безусловное усреднение

$$\bar{S}(t + \Delta t) - \bar{S}(t) = a_1 u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) \Delta t - b_1 \mu \bar{k}(t) \Delta t + o(\Delta t).$$

После соответствующего преобразования и предельного перехода получим

$$\frac{d\bar{S}(t)}{dt} = a_1 u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) - b_1 \mu \bar{k}(t), S(0) = S_0.$$

Проинтегрируем

$$\bar{S}(t) = S_0 + a_1 u_1 \left(\lambda t + \beta \int_0^t \bar{N}(\tau) d\tau \right) - b_1 \mu \int_0^t \bar{k}(\tau) d\tau.$$

3.2. Дисперсия

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 4. В предположениях модели

$$\frac{dC_{NS}\{t\}}{dt} = \beta C_{NS}\{t\} - b_1 \mu C_{nN}\{t|t\} + a_1 u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t) + \beta D\{N(t)\}), C_{NS}\{0\} = 0,$$

где $C_{NS}\{t\} = M\{(N(t) - \bar{N}(t))(S(t) - \bar{S}(t))\}.$

Доказательство. Представим

$$N(t + \Delta t)S(t + \Delta t) - N(t)S(t) = \Delta N(t)S(t) + N(t)\Delta S(t) + \Delta N(t)\Delta S(t).$$

Применяя условное усреднение при фиксированных реализациях $S(t)$, $k(t)$, ξ , η и v , получаем

$$M\{N(t + \Delta t)S(t + \Delta t)|S(t), k(t), \xi, \eta, v\} - N(t)S(t) = (\lambda + \beta N(t))\Delta S(t) + N(t)(\xi v(\lambda + \beta N(t)) - \eta \mu k(t))\Delta t + \xi v(\lambda + \beta N(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

После соответствующих преобразований

$$\frac{dN(t)S(t)}{dt} = \lambda \bar{S}(t) + \beta \overline{N(t)S(t)} + a_1 u_1 \lambda \bar{N}(t) + a_1 u_1 \beta \overline{N^2(t)} - b_1 \mu \overline{k(t)N(t)} + a_1 u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t)).$$

Используя определение функции $C_{NS}\{t\}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dC_{NS}\{t\}}{dt} &= \frac{d\overline{N(t)S(t)}}{dt} - \frac{d\bar{N}(t)}{dt} \bar{S}(t) - \bar{N}(t) \frac{d\bar{S}(t)}{dt} = \\ &= \beta C_{NS}\{t\} + a_1 u_1 \beta D\{N(t)\} - b_1 \mu C_{kN}\{t\} + a_1 u_1 (\lambda + \beta \bar{N}(t)). \end{aligned}$$

После группировки слагаемых получим утверждение леммы.

Лемма 5. В предположениях модели

$$\begin{aligned} C_{kS}\{t\} &= u_1 \beta \int_0^t C_{NS}\{\tau\} P(t - \tau) d\tau + a_1 u_1 \beta \int_0^t C_{nN}\{\tau|t\} d\tau - b_1 \mu \int_0^t C_{kn}\{\tau|t\} d\tau + \\ &+ a_1 u_2 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau)) P(t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $C_{kS}\{t\} = M\{(k(t) - \bar{k}(t))(S(t) - \bar{S}(t))\}.$

Доказательство. Как и прежде, воспользуемся представлением

$$n(t + \Delta t)S(t + \Delta t) - n(t)S(t) = \Delta n(t)S(t) + n(t)\Delta S(t) + \Delta n(t)\Delta S(t).$$

Далее проведем условное усреднение:

$$\begin{aligned} M\{n(t + \Delta t)S(t + \Delta t)|S(t), k(t), \xi, \eta, v\} - n(t)S(t) &= \\ = v(\lambda + \beta N(t))P(T - t)\Delta t S(t) + n(t)(\xi v(\lambda + \beta N(t)) - \eta \mu k(t))\Delta t + \\ + \xi v^2(\lambda + \beta N(t))P(T - t)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Легко получить следующее уравнение:

$$\frac{dn(t)S(t)}{dt} = u_1 (\lambda \bar{S}(t) + \beta \overline{N(t)S(t)}) P(T-t) + a_1 u_1 \lambda \bar{n}(t) + \\ + a_1 u_1 \beta \overline{n(t)N(t)} - b_1 \mu \overline{k(t)n(t)} + a_1 u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) P(T-t).$$

Введем в рассмотрение функцию $C_{nS}\{t|T\} = M\{(n(t) - \bar{n}(t))(S(t) - \bar{S}(t))\}$, для которой несложно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dC_{nS}\{t|T\}}{dt} = u_1 \beta C_{NS}\{t\} P(T-t) + a_1 u_1 \beta C_{nN}\{t|T\} - b_1 \mu C_{kn}\{t|T\} + \\ + a_1 u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) P(T-t), C_{nS}\{0|T\} = 0.$$

Проинтегрируем и воспользуемся соотношением метода просеянного потока:

$$C_{kS}\{t\} = u_1 \beta \int_0^t C_{NS}\{\tau\} P(t-\tau) d\tau + a_1 u_1 \beta \int_0^t C_{nN}\{\tau|t\} d\tau - b_1 \mu \int_0^t C_{kn}\{\tau|t\} d\tau + \\ + a_1 u_2 \int_0^t (\lambda + \beta \bar{N}(\tau)) P(t-\tau) d\tau.$$

Получили утверждение леммы.

Теорема 3. В предположениях модели

$$D\{S(t)\} = 2a_1 u_1 \beta \int_0^t C_{NS}\{\tau\} d\tau - 2b_1 \mu \int_0^t C_{kS}\{\tau\} d\tau + a_2 u_2 \left(\lambda t + \beta \int_0^t \bar{N}(\tau) d\tau \right) + b_2 \mu \int_0^t \bar{k}(\tau) d\tau.$$

Доказательство. Представим

$$S^2(t + \Delta t) = S^2(t) + 2S(t)\Delta S(t) + (\Delta S(t))^2.$$

Осуществим условное усреднение:

$$M\{S^2(t + \Delta t)|S(t), k(t), \xi, \eta, v\} - S^2(t) = 2S(t)(\xi v(\lambda + \beta N(t)) - \eta \mu k(t))\Delta t + \\ + (\xi^2 v^2(\lambda + \beta N(t)) + \eta^2 \mu k(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

После соответствующих преобразований имеем

$$\frac{d\overline{S^2}(t)}{dt} = 2a_1 u_1 (\lambda \bar{S}(t) + \beta \overline{N(t)S(t)}) - 2b_1 \mu \overline{k(t)S(t)} + a_2 u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) + b_2 \mu \bar{k}(t).$$

Пользуясь свойствами дисперсии, можно получить следующее дифференциальное уравнение для $D\{S(t)\}$:

$$\frac{dD\{S(t)\}}{dt} = 2a_1 u_1 \beta C_{NS}\{t\} - 2b_1 \mu C_{kS}\{t\} + a_2 u_2 (\lambda + \beta \bar{N}(t)) + b_2 \mu \bar{k}(t), D\{S(0)\} = 0.$$

После интегрирования получим утверждение теоремы.

3.3. К о в а р и а ц и я

Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что $t_1 \leq t_2$.

Лемма 6. В предположениях модели

$$C_{SN}\{t_1, t_2\} = C_{NS}\{t_1\} e^{\beta(t_2 - t_1)},$$

где

$$C_{SN}\{t_1, t_2\} = M\{(S(t_1) - \bar{S}(t_1))(N(t_2) - \bar{N}(t_2))\}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$S(t_1)N(t_2 + \Delta t_2) = S(t_1)N(t_2) + S(t_1)\Delta N(t_2).$$

Далее применяя стандартный набор действий, получим

$$\frac{d\overline{S(t_1)N(t_2)}}{dt_2} = \lambda\overline{S(t_1)} + \overline{\beta S(t_1)N(t_2)},$$

Воспользовавшись определением $C_{SN}\{t_1, t_2\}$, имеем

$$\frac{dC_{SN}\{t_1, t_2\}}{dt_2} = \beta C_{SN}\{t_1, t_2\}, C_{SN}\{t_1, t_1\} = C_{NS}\{t_1\}.$$

Решая данное дифференциальное уравнение, получим утверждение леммы.

Лемма 7. В предположениях модели

$$C_{Sk}\{t_1, t_2\} = C_{nS}\{t_1 | t_2\} + u_1 \beta C_{NS}\{t_1\} \int_{t_1}^{t_2} e^{\beta(\tau-t_1)} P(t_2 - \tau) d\tau,$$

где

$$C_{Sk}\{t_1, t_2\} = M\{(S(t_1) - \bar{S}(t_1))(k(t_2) - \bar{k}(t_2))\}.$$

Доказательство. Представим, считая $t_1 \leq t_2 \leq T$,

$$S(t_1)n(t_2 + \Delta t_2) = S(t_1)n(t_2) + S(t_1)\Delta n(t_2).$$

Опуская очевидные промежуточные действия, перейдем к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\overline{S(t_1)n(t_2)}}{dt_2} = u_1 (\lambda\overline{S(t_1)} + \overline{\beta S(t_1)N(t_2)})P(T - t_2).$$

Введем в рассмотрение функцию $C_{Sn}\{t_1, t_2 | T\} = M\{(S(t_1) - \bar{S}(t_1))(n(t_2) - \bar{n}(t_2))\}$, для которой легко получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dC_{Sn}\{t_1, t_2 | T\}}{dt_2} = u_1 \beta C_{SN}\{t_1, t_2\} P(T - t_2),$$

где

$$C_{Sn}\{t_1, t_1 | T\} = C_{nS}\{t_1 | T\}.$$

Проинтегрируем

$$C_{Sn}\{t_1, t_2 | T\} = C_{nS}\{t_1 | T\} + u_1 \beta \int_{t_1}^{t_2} C_{SN}\{t_1, \tau\} P(T - \tau) d\tau.$$

Воспользуемся соотношением метода просеянного потока и утверждением леммы 6:

$$C_{Sk}\{t_1, t_2\} = C_{Sn}\{t_1, t_2 | t_2\} = C_{nS}\{t_1 | t_2\} + u_1 \beta C_{NS}\{t_1\} \int_{t_1}^{t_2} e^{\beta(\tau-t_1)} P(t_2 - \tau) d\tau.$$

Получили утверждение леммы.

Теорема 4. В предположениях модели

$$C_S\{t_1, t_2\} = D\{S(t_1)\} + a_1 u_1 \beta \int_{t_1}^{t_2} C_{SN}\{t_1, \tau\} d\tau - \mu b_1 \int_{t_1}^{t_2} C_{Sk}\{t_1, \tau\} d\tau,$$

где

$$C_S\{t_1, t_2\} = M\{(S(t_1) - \bar{S}(t_1))(S(t_2) - \bar{S}(t_2))\}.$$

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$S(t_1)S(t_2 + \Delta t_2) = S(t_1)S(t_2) + S(t_1)\Delta S(t_2).$$

Легко получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\overline{S(t_1)S(t_2)}}{dt_2} = a_1 u_1 (\lambda \overline{S(t_1)} + \beta \overline{S(t_1)N(t_2)}) - \mu b_1 \overline{S(t_1)k(t_2)}.$$

Воспользуемся определением функции $C_S \{t_1, t_2\}$ и имеем в результате

$$\frac{dC_S \{t_1, t_2\}}{dt_2} = a_1 u_1 \beta C_{SN} \{t_1, t_2\} - \mu b_1 C_{Sk} \{t_1, t_2\},$$

где $C_S \{t_1, t_1\} = D\{S(t_1)\}.$

После интегрирования получим утверждение теоремы.

Заключение

Как видно из приведенных рассуждений, найдены основные средние характеристики процесса изменения количества застрахованных объектов и процесса изменения капитала компании. Для математических ожиданий найдены явные выражения, для остальных – неявные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Змеев О.А. Исследование математических моделей процессов страхования при нестационарных потоках страховых рисков: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск, 2005.
2. Горбенко К.А. Стохастическая модель функционирования страховой компании с кумулятивной интенсивностью входящего потока и независимым временем обслуживания клиента с произвольной функцией распределения // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 18. С. 290 – 291.
3. Горбенко К.А. Кумулятивный поток // Вестник ТГУ. № 293. С. 88 – 95.
4. Куликова О.А., Моисеева С.П., Назаров А.А. Метод просеянного потока для нахождения одномерного распределения вероятностей значений процесса изменения числа заявок в системе $M|G|\infty$ // Обработка данных и управление в сложных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 134 – 137.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 сентября 2007 г.