

УДК 519.865

**В.В. Поддубный, Е.А. Червонная**

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЫНКА ВАЛЬРАСОВСКОГО ТИПА СО МНОГИМИ ТОВАРАМИ

Рассматривается задача идентификации динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами, описываемой системой дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, разрешенных относительно производных, на основе метода наименьших квадратов. Получена вычислительная структура алгоритма идентификации неизвестных коэффициентов системы и запаздываний. Работа алгоритма иллюстрируется модельными численными примерами и примером идентификации реального рынка одного из видов компьютерных комплектующих – видеокарт различных производителей.

**Ключевые слова:** идентификация, динамические модели, рынок вальрасовского типа.

Идентификация моделей рынка вальрасовского типа, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, осложнена наличием временных лагов, запаздываний реакций поставщиков товаров на изменение цен этих товаров. Работ по идентификации дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом довольно мало. Среди них можно указать, например, работы D.W. Brewer [1], С. Baker и E. I. Parmuzin [2], В.И. Ловчакова [3], А.В. Прасолова [4], В.Ф. Лебедева и Е.А. Ситникова [5], С.А. Минюка и А.В. Метельского [6].

В данной работе предлагается конструктивный алгоритм идентификации параметров динамической модели рынка многих товаров (коэффициентов модели и запаздываний) на основе метода наименьших квадратов. Частный случай идентификации рынка одного товара рассмотрен в работе [7].

### 1. Алгоритм идентификации многомерной динамической модели

Рассмотрим динамическую модель рынка вальрасовского типа с  $N$  товарами, описываемую системой дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами [8]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_i(t)}{dt} - \frac{1}{P_i(t)} &= \gamma_{ii} [Q_i^D(P_i(t)) - Q_i^S(P_i(t - \tau_i))] - \\ &- \sum_{j=1, j \neq i}^N \gamma_{ij} [Q_j^D(P_j(t)) - Q_j^S(P_j(t - \tau_j))], \quad t \in [t_0, T], \\ P_i(t) &= \bar{P}_i(t), \quad t \in [t_0 - \tau_i, t_0), \quad P_i(t_0) = P_{i0}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $P_i(t)$  – рыночная цена  $i$ -го товара,  $\tau_i$  – задержка (временной лаг) поставки  $i$ -го товара на рынок,  $Q_i^D(P_i(t))$  и  $Q_i^S(P_i(t - \tau_i))$  – объемы спроса и предложения  $i$ -го товара в момент времени  $t$ ,  $\bar{P}_i(t)$  – начальная функция (цена  $i$ -го товара до начального момента времени  $t_0$ ),  $i = \overline{1, N}$ .

Точки  $(P_i^*, Q_i^*)$  рыночных равновесий по Вальрасу определяются пересечением линий спроса и предложения [9]:  $Q_i^D(P_i) = Q_i^* - \alpha_i(P_i - P_i^*)$ ,  $Q_i^S(P_i) = Q_i^* + \beta_i(P_i - P_i^*)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $P_i^*$  – равновесная цена  $i$ -го товара,  $Q_i^* = Q_i^D(P_i^*) = Q_i^S(P_i^*)$  – равновесный объем спроса-предложения на  $i$ -й товар,  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_i = Q_i^*/(P_i^* - P_{\min i}) > 0$ ,  $P_{\min i} < P_i^*$  – минимальная цена, по которой продавец соглашается продавать  $i$ -й товар. Коэффициенты  $\gamma_{ij} \geq 0$  характеризуют конкуренцию товаров на рынке.

Введем обозначения:

$$P(t) = (P_1(t) \ P_2(t) \ \dots \ P_N(t))^T,$$

$$P(t - \tau) = (P_1(t - \tau_1) \ P_2(t - \tau_2) \ \dots \ P_N(t - \tau_N))^T,$$

$$P^* = (P_1^* \ P_2^* \ \dots \ P_N^*)^T,$$

$$\frac{d \ln P(t)}{dt} = \left( \frac{d \ln P_1(t)}{dt} \ \frac{d \ln P_2(t)}{dt} \ \dots \ \frac{d \ln P_N(t)}{dt} \right)^T,$$

$$A = \gamma \alpha, \quad B = \gamma \beta,$$

$$\text{где } \gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & -\gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \dots & -\gamma_{NN} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_N \end{pmatrix}.$$

С учетом этих обозначений, подставив  $Q_i^D(P_i(t))$  и  $Q_i^S(P_i(t - \tau_i))$  в (1), приведем систему (1) к виду

$$\frac{d \ln P(t)}{dt} = A(P(t) - P^*) + B(P(t - \tau) - P^*), \quad (2)$$

где параметры  $A$ ,  $B$ ,  $P^*$  и  $\tau$ , вообще говоря, неизвестны и подлежат определению по результатам наблюдений за ценами товаров на некотором интервале времени  $t_0 \leq t \leq T$ .

Для идентификации неизвестных параметров  $A$ ,  $B$ ,  $P^*$  и  $\tau$  по наблюдаемому решению  $P(t)$  уравнения (2) воспользуемся методом наименьших квадратов.

Проинтегрируем формально уравнение (2) на интервале  $[t_0, t]$ :

$$\ln \left( \frac{P(t)}{P_0} \right) = A \int_{t_0}^t (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t \geq t_0) + B \int_{t_0}^{t-\tau} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t - \tau \geq t_0), \quad (3)$$

где  $1(\cdot)$  – индикатор события, указанного в скобках. Разобьем интервал интегрирования  $[t_0, T]$  на  $n$  примыкающих друг к другу интервалов  $(t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , длины  $h = (T - t_0)/n$ .

При  $t = t_k$  равенство (3) примет вид

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P(t_k)}{P_0}\right) &= A \int_{t_0}^{t_k} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_k \geq t_0) + \\ &+ B \int_{t_0}^{t_k - \tau} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_k - \tau \geq t_0). \end{aligned} \quad (4)$$

При  $t = t_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P(t_{k+1})}{P_0}\right) &= A \int_{t_0}^{t_{k+1}} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_{k+1} \geq t_0) + \\ &+ B \int_{t_0}^{t_{k+1} - \tau} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_{k+1} - \tau \geq t_0). \end{aligned} \quad (5)$$

На каждом  $k$ -м интервале вычтем равенство (4) из (5):

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P(t_{k+1})}{P(t_k)}\right) &= A \int_{t_k}^{t_{k+1}} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_k \geq t_0) + \\ &+ B \int_{t_k - \tau}^{t_{k+1} - \tau} (P(t) - P^*) dt \cdot 1(t_k - \tau \geq t_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Считая шаг  $h$  малым, представим интегралы в (6) по формуле трапеций:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{P(t_{k+1})}{P(t_k)}\right) &\cong hA \frac{[P(t_{k+1}) + P(t_k) - 2P^*]}{2} \cdot 1(t_k \geq t_0) + \\ &+ hB \frac{[P(t_{k+1} - \tau) + P(t_k - \tau) - 2P^*]}{2} \cdot 1(t_k - \tau \geq t_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_k &= \left( \ln\left(\frac{P_1(t_{k+1})}{P_1(t_k)}\right) \quad \ln\left(\frac{P_2(t_{k+1})}{P_2(t_k)}\right) \quad \dots \quad \ln\left(\frac{P_N(t_{k+1})}{P_N(t_k)}\right) \right)^T, \\ \varphi_k(P^*) &= h(P(t_{k+1}) - 2P^* + P(t_k)) \cdot 1(t_k \geq t_0) / 2, \\ \psi_k(P^*, \tau) &= h(P(t_{k+1} - \tau) - 2P^* + P(t_k - \tau)) \cdot 1(t_k - \tau \geq t_0) / 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x_k$ ,  $\varphi_k(P^*)$ ,  $\psi_k(P^*, \tau)$  – векторы-столбцы размерности  $N$ .

Тогда равенство (7) примет вид

$$x_k \cong A\varphi_k(P^*) + B\psi_k(P^*, \tau), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (9)$$

В матричной форме это соотношение запишется так:

$$x = Y(P^*, \tau) \cdot C, \quad (10)$$

где  $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  – матрица коэффициентов размерности  $2N \times N$ ,

$Y(P^*, \tau) = (\varphi(P^*) \quad \psi(P^*, \tau))$  – матрица плана размерности  $n \times 2N$ , а  $x$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  –

матрицы размерности  $n \times N$ :  $x = (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1})^T$ ,  $\varphi = (\varphi_0 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_{n-1})^T$ ,  
 $\psi = (\psi_0 \ \psi_1 \ \dots \ \psi_{n-1})^T$ .

МНК-оценки неизвестных параметров должны обеспечить минимум суммы квадратов невязок системы равенств (10):

$$J = \text{tr} \left( (x - Y(P^*, \tau)C)^T (x - Y(P^*, \tau)C) \right) \Rightarrow \min_{C, \tau, P^*}. \quad (11)$$

Находя отсюда МНК-оценки матриц коэффициентов  $A$  и  $B$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \left( Y(P^*, \tau)^T Y(P^*, \tau) \right)^{-1} Y(P^*, \tau)^T x \quad (12)$$

через  $P^*$ ,  $\tau$  и подставляя их в выражение для  $J$ , получим целевую функцию для оценивания  $P^*$ ,  $\tau$ :

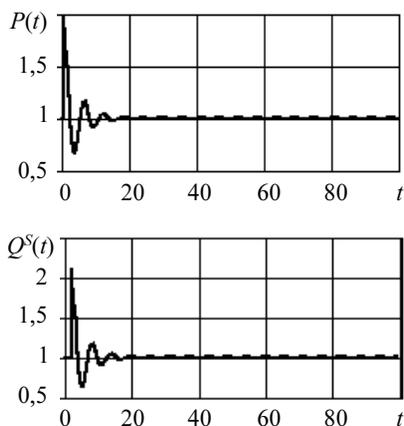
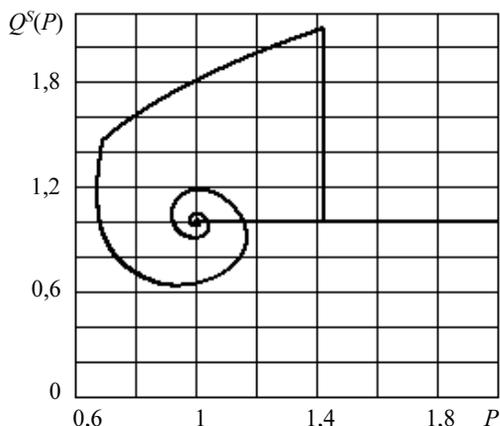
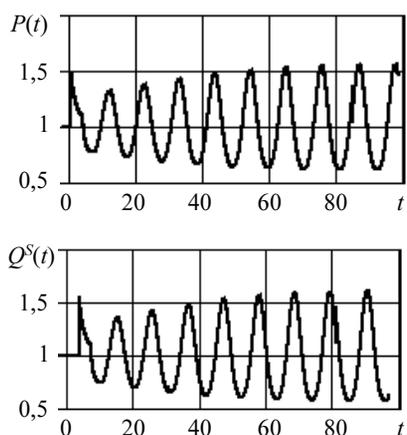
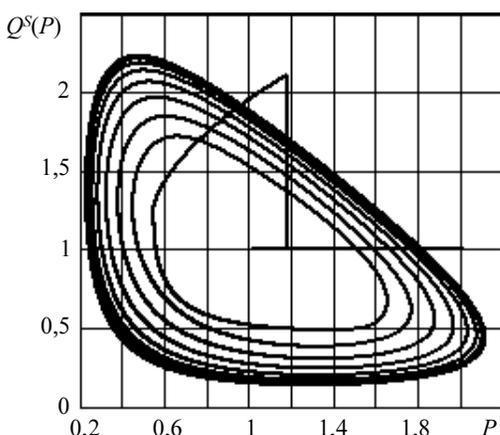
$$J = \text{tr} \left( \left( x - Y(P^*, \tau) \left( Y(P^*, \tau)^T Y(P^*, \tau) \right)^{-1} Y(P^*, \tau)^T x \right)^T \times \right. \\ \left. \times \left( x - Y(P^*, \tau) \left( Y(P^*, \tau)^T Y(P^*, \tau) \right)^{-1} Y(P^*, \tau)^T x \right) \right) \Rightarrow \min_{\tau, P^*}. \quad (13)$$

Перебирая с некоторым шагом значения  $P^*$  и  $\tau$ , находим точку  $\hat{P}^*$ ,  $\hat{\tau}$  минимума  $J(P^*, \tau)$  и вычисляем  $\hat{C}$ . В случае, когда в качестве наблюдений используются решения системы, полученные с помощью метода шагов по схеме Рунге-Кутты 4-го порядка точности, ошибки, с которыми вычисляются параметры модели, – это ошибки квантования, возникшие за счет рассогласования схем второго и четвертого порядков точности.

## 2. Идентификация динамической модели рынка вальрасовского типа с одним товаром

Рассмотрим модель рынка вальрасовского типа при  $N = 1$ . Пусть до момента времени  $t_0$  рынок находился в состоянии равновесия, а в момент  $t_0$  цена товара скачком изменилась от значения  $P^*$  до значения, например,  $P_0 = 2P^*$ . Возникает переходный процесс, в результате которого рынок либо постепенно снова приходит к состоянию равновесия, если  $\tau < \tau_{кр}$  – запаздывание меньше критического, либо устанавливаются циклические колебания цены, если  $\tau > \tau_{кр}$ . Численное решение начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (2) с указанными начальными условиями легко получить методом шагов [10] с использованием вычислительной схемы Рунге-Кутты 4-го порядка точности [11].

При  $t_0 = 0$ ,  $T = 100$  и значениях параметров  $P^* = 1$ ,  $Q^* = 1$ ,  $\gamma = 0,7$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $P_{\min} = 0,1P^*$ , так что  $\beta = Q^*/(P^* - P_{\min}) = 10/9$ ,  $A = -0,35$ ,  $B = -7/9 = -0,77778$ , решение показано на рис. 1 и 2 при  $\tau = 1,5 < \tau_{кр}$  (положение равновесия  $P^*$  устойчиво) и на рис. 3 и 4 при  $\tau = 3,5 > \tau_{кр}$  (положение равновесия  $P^*$  неустойчиво). Шаг интегрирования метода Рунге-Кутты будем брать равным  $h = 10^{-3}$ .

Рис. 1.  $P(t)$ ,  $Q^S(t)$  при  $\tau = 1,5 < \tau_{кр}$ Рис. 2.  $Q^S(P)$  при  $\tau = 1,5 < \tau_{кр}$ Рис. 3.  $P(t)$ ,  $Q^S(t)$  при  $\tau = 3,5 > \tau_{кр}$ Рис. 4.  $Q^S(P)$  при  $\tau = 3,5 > \tau_{кр}$ 

По полученным значениям  $P(t)$  идентифицируем с помощью описанного метода параметры  $A$ ,  $B$ ,  $P^*$ ,  $\tau$ . Шаг идентификации (шаг отсчета наблюдений) возьмем равным  $h = 10^{-3}$ .

На рис. 5 – 8 представлен вид поверхности  $J(P, \tau)$  и ее горизонтальные и вертикальные сечения при истинных  $P^* = 1$  и  $\tau_0 = 1,5 < \tau_{кр}$  (равновесие устойчиво), а на рис. 9 – 12 – то же, но при  $\tau_0 = 3,5 > \tau_{кр}$  (равновесие неустойчиво). Хорошо видно, что целевая функция МНК  $J(P, \tau)$  достигает минимума по  $P$  и  $\tau$  именно при этих значениях параметров.

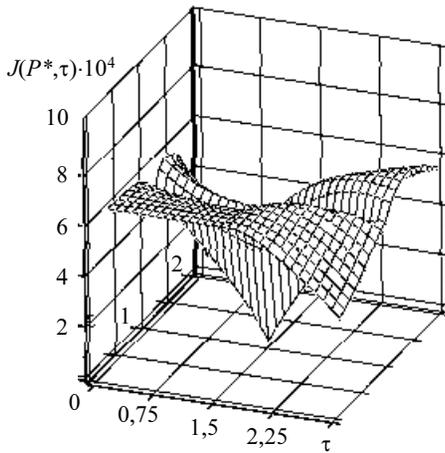


Рис. 5. Поверхность  $J(P, \tau)$   
при  $\tau_0 = 1,5 < \tau_{кр}$

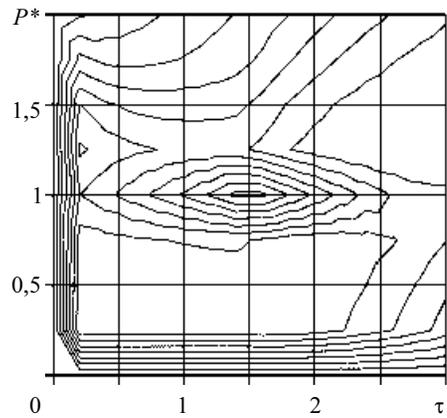


Рис. 6. Линии уровней  $J(P, \tau)$   
при  $\tau_0 = 1,5 < \tau_{кр}$

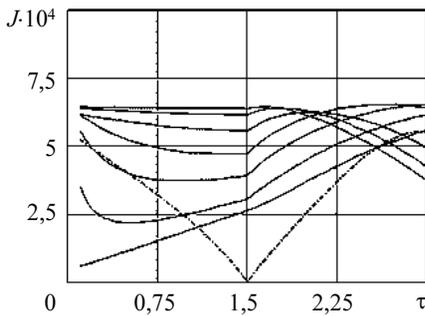


Рис. 7. Сечения  $J(P, \tau)$  как функции  $\tau$   
при различных  $P^*$  при  $\tau_0 = 1,5 < \tau_{кр}$

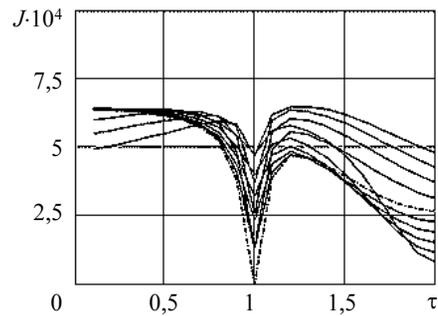


Рис. 8. Сечения  $J(P, \tau)$  как функции  $P^*$   
при различных  $\tau$  при  $\tau_0 = 1,5 < \tau_{кр}$

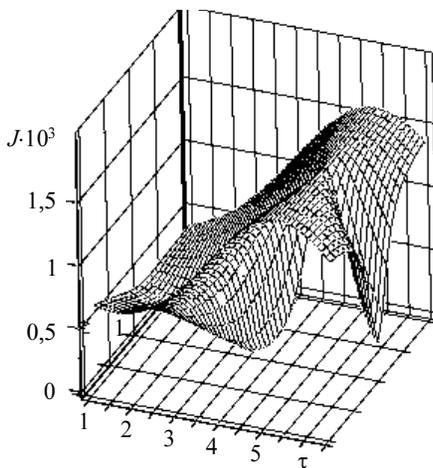


Рис. 9. Поверхность  $J(P, \tau)$   
при  $\tau_0 = 3,5 > \tau_{кр}$

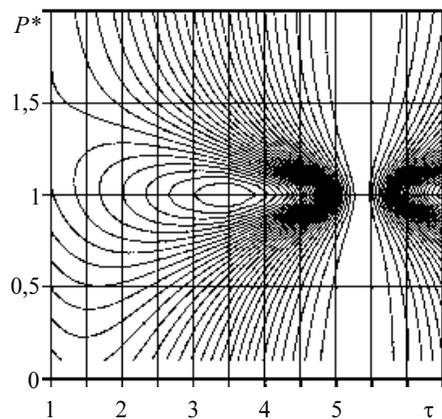


Рис. 10. Линии уровней  $J(P, \tau)$   
при  $\tau_0 = 3,5 > \tau_{кр}$

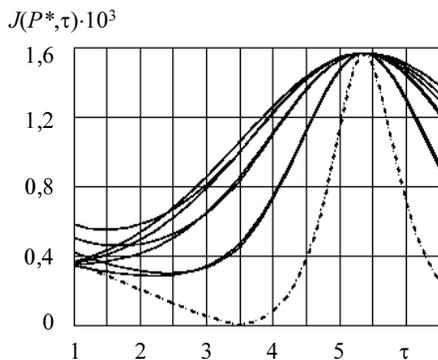


Рис. 11. Сечения  $J(P, \tau)$  как функции  $\tau$  при различных  $P^*$  при  $\tau_0 = 3,5 > \tau_{кр}$

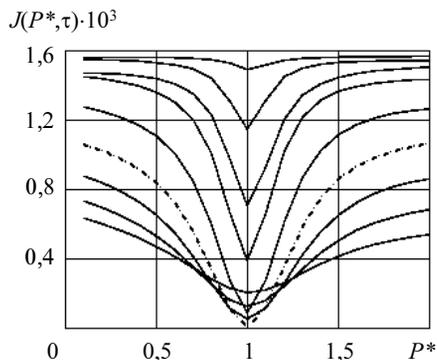


Рис. 12. Сечения  $J(P, \tau)$  как функции  $P^*$  при различных  $\tau$  при  $\tau_0 = 3,5 > \tau_{кр}$

В табл. 1 приведены значения оценок параметров  $A$  и  $B$  модели, значения целевой функции и разница между реальными значениями и оценками параметров  $A$  и  $B$  при  $\tau = 1,5$  и  $\tau = 3,5$ .

Т а б л и ц а 1

**Результаты идентификации при  $N = 1$**

Параметры	$\tau$	
	1,5	3,5
$\hat{A}$	-0,349966	-0,349966
$\hat{B}$	-0,777768	-0,777742
$J$	$5,61 \times 10^{-13}$	$1,21 \times 10^{-11}$
$ A - \hat{A} $	$3,43 \times 10^{-5}$	$3,4 \times 10^{-5}$
$ B - \hat{B} $	$1,01 \times 10^{-5}$	$3,55 \times 10^{-5}$

Значение минимума функционала при  $\tau = 3,5$  больше, чем при  $\tau = 1,5$ , оценки параметров получаются немного хуже, чем при  $\tau = 1,5$ . Можно показать, что погрешность идентификации минимальна при совпадении шага идентификации с шагом интегрирования.

**3. Идентификация динамической модели рынка вальрасовского типа с двумя товарами**

Рассмотрим модель рынка вальрасовского типа с двумя товарами. Пусть аналогично предыдущему пункту до момента времени  $t_0$  рынок находился в состоянии равновесия, а в момент  $t_0$  цены обоих товаров резко изменились:

$$P_1(t_0) = 2P^*, \quad P_2(t_0) = 1,5P^*.$$

Численное решение начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (2) с указанными начальными условиями получим, как и в предыдущем пункте, с использованием метода шагов и схемы Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

Рассмотрим следующие значения параметров:

$$h = 10^{-3}, P_1^* = P_2^* = P^* = 1, Q_1^* = Q_2^* = Q^* = 1,$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,2 \\ 0,3 & -0,5 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,3 \end{pmatrix}, P_{\min} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,4 \end{pmatrix},$$

так что 
$$\beta = \begin{pmatrix} 10/9 \\ 10/6 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -0,54 & 0,26 \\ 0,27 & -0,65 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6/9 & 1/3 \\ 1/3 & -5/6 \end{pmatrix}.$$

Решив систему, получим некоторое решение

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix},$$

показанное на рис. 13 и 14 при  $\tau = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  (положение равновесия  $P^*$  устойчиво) и

на рис. 15 и 16 при  $\tau = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  (положение равновесия  $P^*$  неустойчиво).

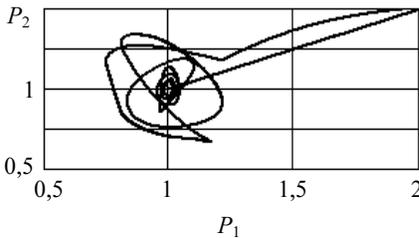
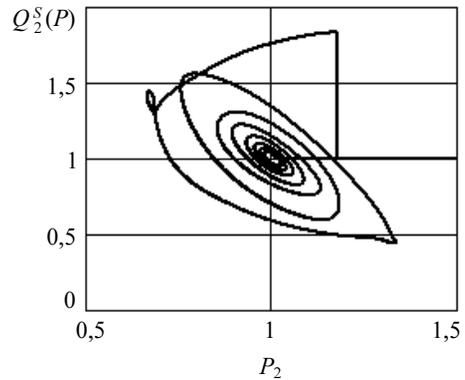
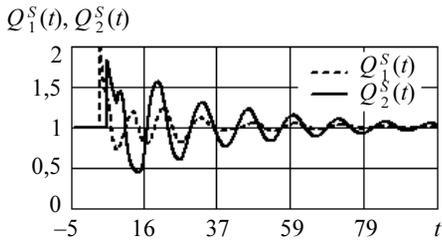
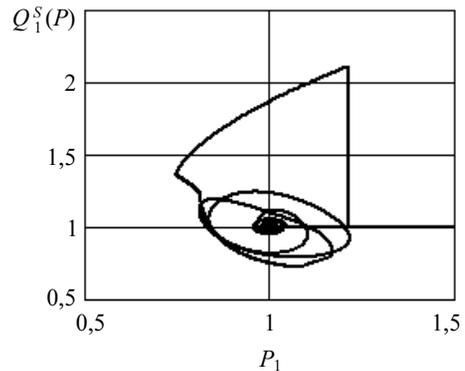
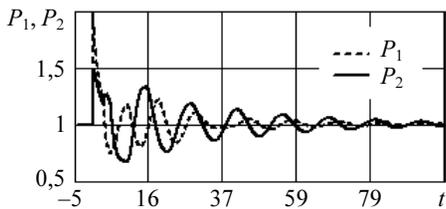


Рис. 13.  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  и  $Q_1^S(t)$ ,  $Q_2^S(t)$ ,  
зависимость  $P_2(t)$  от  $P_1(t)$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$

Рис. 14.  $Q_1^S(P_1)$  и  $Q_2^S(P_2)$   
при  $\tau = (3 \ 5)^T$

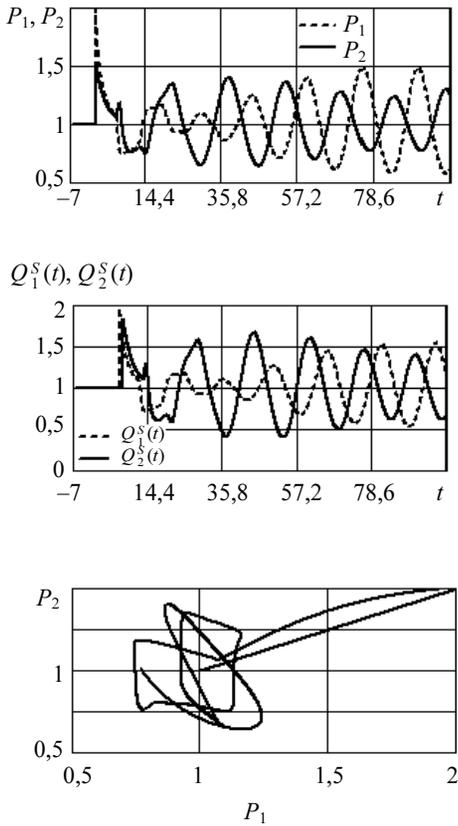


Рис. 15.  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  и  $Q_1^S(t)$ ,  $Q_2^S(t)$ ,  
зависимость  $P_2(t)$  от  $P_1(t)$  при  $\tau = (6 \ 7)^T$

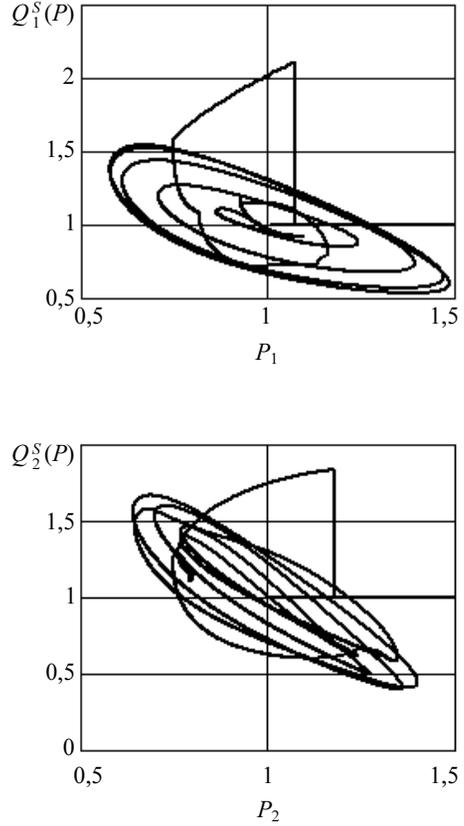


Рис. 16.  $Q_1^S(P_1)$  и  $Q_2^S(P_2)$   
при  $\tau = (6 \ 7)^T$

По полученным значениям  $P(t)$  идентифицируем параметры модели  $A$ ,  $B$ ,  $\tau$ . Шаг идентификации возьмем равным  $10^{-3}$ . Значения параметров  $P_1^* = P_2^* = P^* = 1$  будем считать известными.

На рис. 17 – 20 представлен вид поверхности  $J(\tau)$  и ее горизонтальные и вертикальные сечения при истинных значениях  $\tau_1 = 3$  и  $\tau_2 = 5$  (равновесие устойчиво), а на рис. 21 – 24 – то же, но при  $\tau_1 = 6$  и  $\tau_2 = 7$  (равновесие неустойчиво). Хорошо видно, что целевая функция МНК  $J(\tau)$  достигает минимума по  $\tau_1$  и  $\tau_2$  именно при истинных значениях параметров.

Поверхности  $J(\tau)$ , полученные для модели рынка вальрасовского типа с двумя товарами, обладают интересной особенностью: рассматривая сечения поверхности при любом фиксированном значении одного из запаздываний, получаем, что кроме минимума, достигаемого в точке второго запаздывания, кривая сечения имеет излом в точке, соответствующей значению, в котором достигается минимум по первому запаздыванию. Например, на рис. 19, где представлены сечения

$J(\tau)$  как функции  $\tau_1$  при различных  $\tau_2$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$ , минимум достигается при  $\tau_1 = 3$ , а излом – при  $\tau_1 = 5$ . На рис. 20, где представлены сечения  $J(\tau)$  как функции  $\tau_2$  при различных  $\tau_1$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$ , минимум достигается при  $\tau_2 = 5$ , а излом можно наблюдать при  $\tau_2 = 3$ . Таким образом, на поверхности  $J(\tau)$  можно наблюдать четыре «борозды»: две из них проходят параллельно оси  $\tau_2$ , две – параллельно оси  $\tau_1$ . «Борозды» соответствуют значениям  $\tau_1 = 3$ ,  $\tau_1 = 5$  и  $\tau_2 = 3$ ,  $\tau_2 = 5$ . В одном из пересечений таких «борозд» и находится минимум поверхности. В случае  $\tau = (6 \ 7)^T$  «борозды» более сглажены и не так заметны.

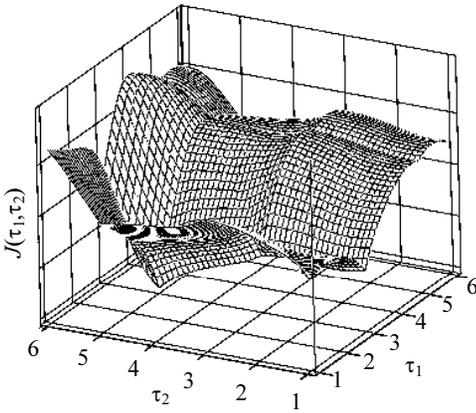


Рис. 17. Поверхность  $J(\tau)$   
при  $\tau = (3 \ 5)^T$

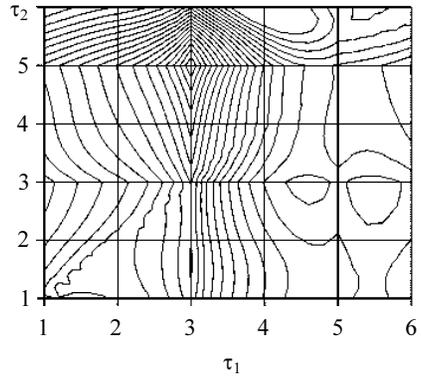


Рис. 18. Линии уровней  $J(\tau)$   
при  $\tau = (3 \ 5)^T$

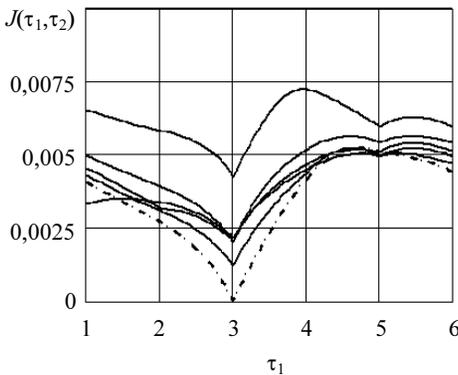


Рис. 19. Сечения  $J(\tau)$  как функции  $\tau_1$   
при различных  $\tau_2$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$

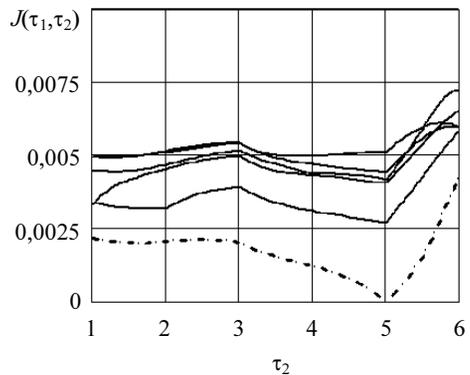
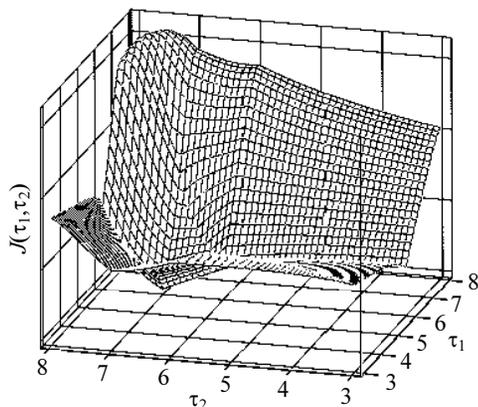
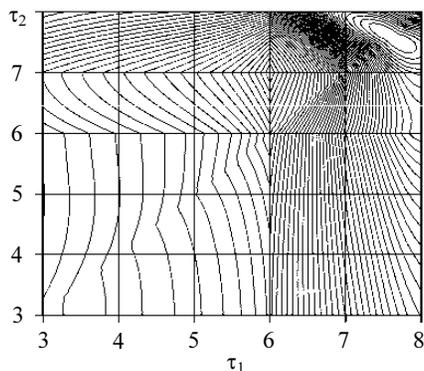
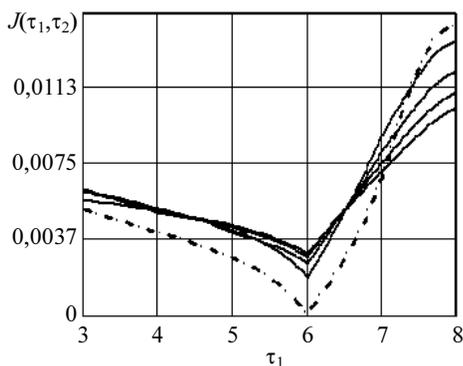
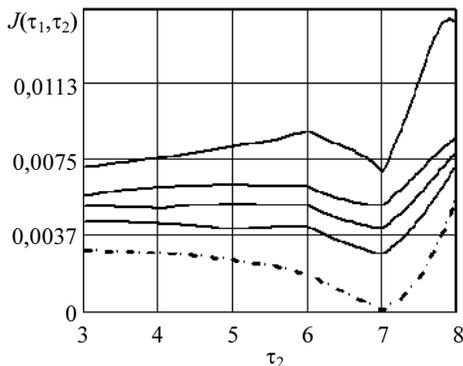


Рис. 20. Сечения  $J(\tau)$  как функции  $\tau_2$   
при различных  $\tau_1$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$

Рис. 21. Поверхность  $J(\tau)$ при  $\tau = (6 \ 7)^T$ Рис. 22. Линии уровней  $J(\tau)$ при  $\tau = (6 \ 7)^T$ Рис. 23. Сечения  $J(\tau)$  как функции  $\tau_1$ при различных  $\tau_2$  при  $\tau = (6 \ 7)^T$ Рис. 24. Сечения  $J(\tau)$  как функции  $\tau_2$ при различных  $\tau_1$  при  $\tau = (6 \ 7)^T$ 

В табл. 2 показаны значения оценок параметров  $A$  и  $B$  модели, значения целевой функции и разница между реальными значениями и оценками параметров  $A$  и  $B$  при  $\tau = (3 \ 5)^T$  и  $\tau = (6 \ 7)^T$ .

В таблице под  $|A - \hat{A}|$ ,  $|B - \hat{B}|$  понимается следующее:

$$|A - \hat{A}| = \begin{pmatrix} |A_{11} - \hat{A}_{11}| & |A_{12} - \hat{A}_{12}| \\ |A_{21} - \hat{A}_{21}| & |A_{22} - \hat{A}_{22}| \end{pmatrix}, \quad |B - \hat{B}| = \begin{pmatrix} |B_{11} - \hat{B}_{11}| & |B_{12} - \hat{B}_{12}| \\ |B_{21} - \hat{B}_{21}| & |B_{22} - \hat{B}_{22}| \end{pmatrix}.$$

При больших значениях запаздываний  $\tau = (6 \ 7)^T$  модель рынка идентифицируется немного хуже, чем при  $\tau = (3 \ 5)^T$ . Можно показать, что в рассматриваемом случае  $N = 2$ , как и в случае  $N = 1$ , погрешность идентификации будет минимальной при совпадении шага идентификации с шагом интегрирования.

Таблица 2

Результаты идентификации при  $N = 2$ 

$\tau$	$(3 \ 5)^T$	$(6 \ 7)^T$
$\hat{A}$	$\begin{bmatrix} -0,53961 & 0,25965 \\ 0,2697 & -0,64945 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,5396 & 0,25962 \\ 0,26967 & -0,64944 \end{bmatrix}$
$\hat{B}$	$\begin{bmatrix} -0,66641 & 0,33299 \\ 0,333 & -0,83279 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,66626 & 0,33291 \\ 0,33292 & -0,83272 \end{bmatrix}$
$J$	$8,39 \times 10^{-11}$	$1,59 \times 10^{-10}$
$ A - \hat{A} $	$\begin{bmatrix} 3,9 \times 10^{-4} & 3,52 \times 10^{-4} \\ 3,01 \times 10^{-4} & 5,52 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,01 \times 10^{-4} & 3,76 \times 10^{-4} \\ 3,35 \times 10^{-4} & 5,6 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$
$ B - \hat{B} $	$\begin{bmatrix} 2,52 \times 10^{-4} & 3,48 \times 10^{-4} \\ 3,38 \times 10^{-4} & 5,46 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,02 \times 10^{-4} & 4,26 \times 10^{-4} \\ 4,13 \times 10^{-4} & 6,17 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$

#### 4. Идентификация модели вальрасовского типа на примере рынка компьютерных комплектующих

Рассмотрим теперь решение задачи идентификации динамической модели рынка вальрасовского типа по реальным данным динамики цен на рынке компьютерных комплектующих. Возьмем для примера три товара – видеокарты разных производителей, конкурирующих между собой:

1) Видеокарта 128Mb <PCI-E> DDR Gigabyte GV-RX55HM256P8-RH (OEM) 64bit+DVI+TV Out <ATI Radeon X550 HyperMemory>.

2) Видеокарта 128Mb <PCI-E> DDR ASUSTeK EAX550HM512/TD (RTL) 64bit+DVI+TV Out <ATI Radeon X550>.

3) Видеокарта SVGA 128Mb <PCI-E> DDR Sapphire <ATI RADEON X550 Advantage> (OEM) 64bit +DVI+TV Out.

Наблюдения за ценами этих товаров взяты в интернет-магазине электронной техники «Техноград» [12]. Временной интервал наблюдения составляет 132 дня с 22.11.2006 по 03.04.2007 года.

Пусть  $t_{\text{набл1}}, t_{\text{набл2}}, t_{\text{набл3}}$  – векторы моментов времени, в которые были сделаны наблюдения за ценами соответственно 1-го, 2-го и 3-го товаров;  $P_{\text{набл1}}, P_{\text{набл2}}, P_{\text{набл3}}$  – векторы наблюдаемых значений цен этих товаров;  $n_{\text{набл1}}, n_{\text{набл2}}, n_{\text{набл3}}$  – объемы наблюдений, т.е размерности векторов моментов времени и наблюдаемых значений цен товаров. Динамика наблюдений за ценами рассматриваемых товаров изображена на рис. 25.

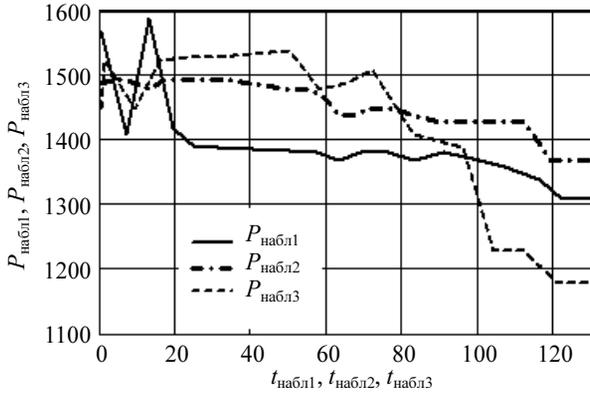


Рис. 25. Наблюдения за ценами  $P_{набл1}$ ,  $P_{набл2}$ ,  $P_{набл3}$  видеокарт разных производителей

Очевидно, что равновесные цены рассматриваемых товаров различны и изменяются с течением времени. Для того чтобы можно было воспользоваться для рынка комплектующих моделью вальрасовского типа и идентифицировать ее по данным наблюдений, необходимо исключить тренд равновесных цен. Кроме того, удобно привести наблюдения к безразмерному виду. Тогда равновесные цены всех товаров будут одинаковыми и равными единице. Для этого отдельно для каждого товара по имеющимся наблюдениям выделим линейный тренд вида

$$P_j^* = a_j I_j + b_j t_{набл j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где  $P_j^* - n_{набл j}$  – вектор-столбец значений равновесной цены  $j$ -го товара в моменты времени наблюдений,  $a_j, b_j$  – неизвестные параметры тренда, скаляры, подлежащие определению по результатам наблюдений,  $I_j$  – единичный вектор-столбец размерности  $n_{набл j}$ .

Для нахождения оценок неизвестных параметров  $a_j, b_j, j = 1, 2, 3$ , воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$J_j = \sum_{i=1}^{n_{набл j}} (P_{набл ji} - (a_j + b_j t_{набл ji}))^2 \Rightarrow \min_{a_j, b_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

или, в векторной форме,

$$J_j = |P_{набл j} - a_j I_j - b_j t_{набл j}|^2 \Rightarrow \min_{a_j, b_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Введем матрицы плана и векторы неизвестных параметров тренда для каждого из товаров:

$$Y_j = (I \quad t_{набл j}), \quad c_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда (15) переписывается следующим образом:

$$J_j = (P_{набл j} - Y_j c_j)^T (P_{набл j} - Y_j c_j) \Rightarrow \min_{c_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отсюда находим МНК-оценки параметров:

$$c_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = (Y_j^T Y_j)^{-1} Y_j^T P_{\text{набл } j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

На рис. 26 – 28 показаны наблюдаемые значения цен и полученные линейные тренды – равновесные цены соответственно первого, второго и третьего товаров.

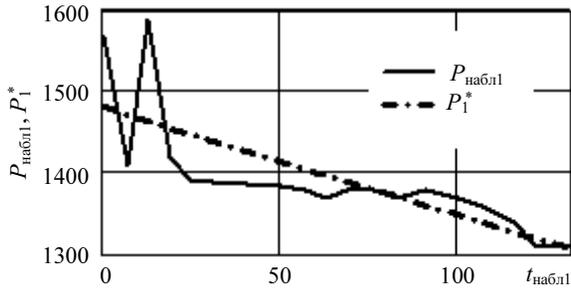


Рис. 26. Наблюдения за ценой  $P_{\text{набл}1}$  и равновесная цена  $P_1^* = 1,48 \times 10^3 I_1 - 1,324 t_{\text{набл}1}$

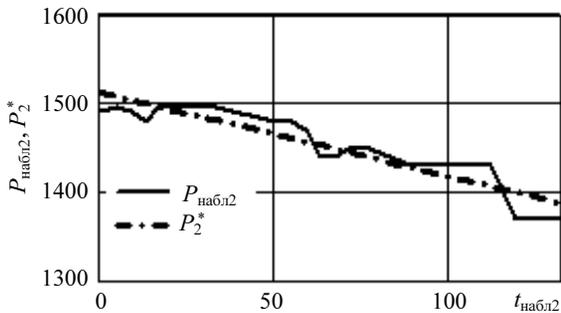


Рис. 27. Наблюдения за ценой  $P_{\text{набл}2}$  и равновесная цена  $P_2^* = 1,512 \times 10^3 I_2 - 0,944 t_{\text{набл}2}$

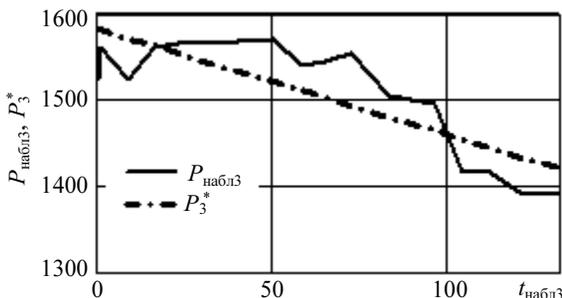


Рис. 28. Наблюдения за ценой  $P_{\text{набл}3}$  и равновесная цена  $P_3^* = 1,565 \times 10^3 I_3 - 2,467 t_{\text{набл}3}$

Приведем наблюдения к безразмерным единичным ценам следующим образом:

$$P_{пр\ ji} = \frac{P_{набл\ ji}}{P_{ji}^*}, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = \overline{0, n_{набл\ j} - 1}.$$

Рассмотрим временной промежуток  $[t_0, T]$  длиной 132 дня, где  $t_0 = 0$ ,  $T = 132$ . Выбрав достаточно малый шаг интегрирования  $h = 10^{-3}$ , обеспечивающий приемлемую точность решения задачи идентификации, разобьем промежуток  $[t_0, T]$  точками  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , на  $n = (T - t_0)/h$  примыкающих друг к другу интервалов одинаковой длины  $h$ . На каждом промежутке  $[t_{набл\ i}, t_{набл\ i+1}]$ ,  $i = \overline{0, n_{набл\ j} - 1}$ , определим интерполяционные значения наблюдаемых цен товаров в точках  $t_k$ :

$$P_{jm} = P_{набл\ ji} + \frac{P_{набл\ ji+1} - P_{набл\ ji}}{t_{набл\ ji+1} - t_{набл\ ji}}(t_m - t_{набл\ ji}),$$

$$j = 1, 2, 3, \quad m = \overline{t_{набл\ i}/h, t_{набл\ i+1}/h}.$$

По полученным таким образом значениям цен товаров  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $P_3(t)$  будем проводить идентификацию модели вальрасовского типа рынка компьютерных комплектующих.

На рис. 29 показаны цены рассматриваемых товаров, приведенные, как описано выше, к единичной равновесной цене.

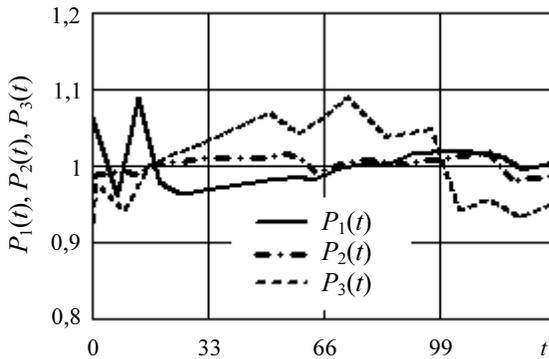


Рис. 29. Цены товаров  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $P_3(t)$  при равновесной цене  $P^* = 1$ .

Задача идентификации решалась по формулам (12) – (13) при фиксированном значении  $P^* = 1$ . При идентификации получены следующие значения параметров модели:

$$A = \begin{pmatrix} 14,56 & 1,43 & 11,37 \\ -0,46 & 1,6 & -0,66 \\ 8,99 & -2,39 & 7,73 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14,58 & -1,39 & -11,37 \\ 0,47 & -1,61 & 0,67 \\ -8,96 & 2,22 & -7,71 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}.$$

Запаздывания  $\tau$  получились ничтожно малыми. И действительно, на рассматриваемом рынке компьютерных комплектующих время доставки товара на рынок составляет 3 – 7 дней, тогда как цена за это время практически не изменяется, поэтому такой рынок по сути не содержит запаздываний, колебания цен происходят по другим причинам, одной из которых является наличие конкуренции между товарами.

На рис. 30 – 32 приведены для сравнения наблюдаемые приведенные цены товаров  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ ,  $P_3(t)$  и траектории цен  $P_{val1}(t)$ ,  $P_{val2}(t)$ ,  $P_{val3}(t)$ , полученные при решении идентифицированных по параметрам  $A$ ,  $B$ ,  $\tau$  дифференциальных уравнений, описывающих динамику рынка. При решении предполагалось, что до момента наблюдений  $t_0 = 0$  рынок находился в состоянии равновесия.

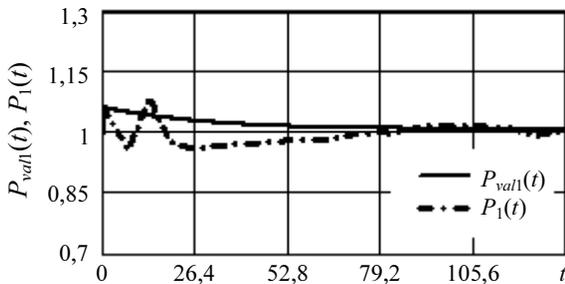


Рис. 30. Сравнение  $P_1(t)$  и  $P_{val1}(t)$  при  $P^* = 1$

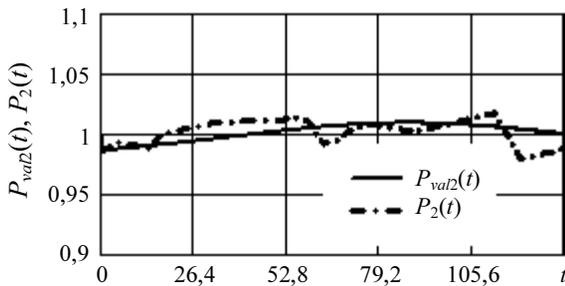


Рис. 31. Сравнение  $P_2(t)$  и  $P_{val2}(t)$  при  $P^* = 1$

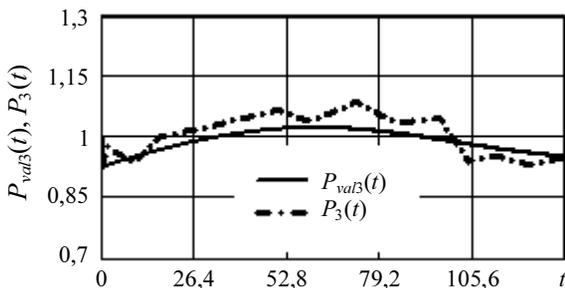


Рис. 32. Сравнение  $P_3(t)$  и  $P_{val3}(t)$  при  $P^* = 1$

Возврат к исходным ценам товаров проводится по обратным формулам:

$$\hat{P}_{ji} = P_{valj} P_{ji}^*, \quad j = 1, 2, 3, \quad i = \overline{0, n_{\text{набл}} - 1}.$$

Полученные траектории в сравнении с исходными наблюдениями за ценами товаров приведены на рис. 33 – 35.

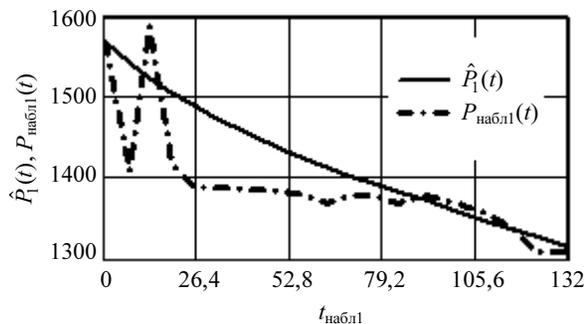


Рис. 33. Сравнение наблюдаемых значений цены  $P_{\text{набл}1}(t)$  и приведенных траекторий модели вальрасовского типа  $\hat{P}_1(t)$

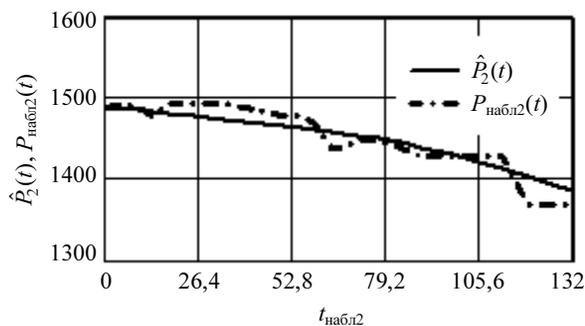


Рис. 34. Сравнение наблюдаемых значений цены  $P_{\text{набл}2}(t)$  и приведенных траекторий модели вальрасовского типа  $\hat{P}_2(t)$

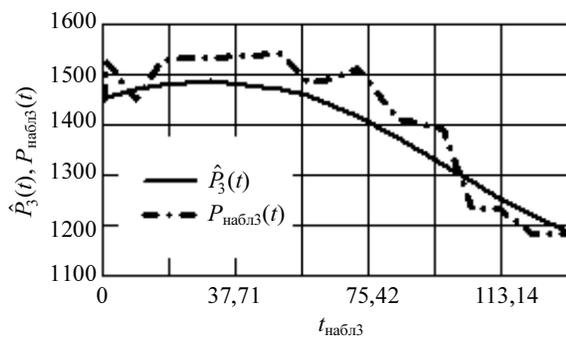


Рис. 35. Сравнение наблюдаемых значений цены  $P_{\text{набл}3}(t)$  и приведенных траекторий модели вальрасовского типа  $\hat{P}_3(t)$

Как видно из рис. 33 – 35, максимальное относительное расхождение между наблюдаемой ценой и ценой, рассчитанной по идентифицированной модели вальрасовского типа, для трех товаров составляет величину  $\Delta = (9,5\% \ 2,5\% \ 6,3\%)^T$ , лежащую в нашем примере в диапазоне 2,5 – 9,5%, где

$$\Delta_j = \max_i \left| \left( P_{\text{набл } ji} - \hat{P}_{ji} \right) / P_{\text{набл } ji} \right| 100\%, \quad j = 1, 2, 3.$$

Из этого можно сделать вывод, что модель вальрасовского типа достаточно хорошо отражает динамику цен реального рынка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brewer D.W. Gradient methods for identification of distributed parameter systems // Decision and Control: Proc. of the 28th IEEE Conf. 1989. V. 1. P. 599 – 603.
2. Baker C., Parmuzin E.I. Analysis via integral equations of an identification problem for delay differential equations // J. Integr. Equat. and Appl. 2004. V. 16. No. 2. P. 111 – 117.
3. Ловчаков В.И. Идентификация линейных динамических систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тула: ТулГУ, 1996. С. 37 – 44.
4. Прасолов А.В. Математические модели динамики в экономике. СПб: Изд-во СПбГУ, 2000. 300 с.
5. Лебедев В.Ф., Ситников Е.А. Идентификация систем с запаздыванием с использованием полиномиальных рядов // Системы управления и информационные технологии: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 9. Воронеж: Центрально-Черноземное книжное издательство, 2002. С. 61 – 65.
6. Минюк С.А., Метельский А.В. О построении непрерывной восстанавливающей операции в задаче полной идентификации линейных стационарных систем с запаздыванием // Дифф. уравн. 2003. Т. 39. № 8. С. 1052 – 1057.
7. Сухарева Е.А. Идентификация динамической модели рынка вальрасовского типа // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всеросс. науч.-практич. конф. (20 – 21 апреля 2007 г.). 2007. С. 50 – 54.
8. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Исследование динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С. 53 – 58.
9. Гальперин В.М., Игнатъев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика: В 2 т. / Общ. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экономическая школа, 2002. Т. 1. 349 с.
10. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М: Наука, 1964. 128 с.
11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
12. Интернет-магазин электронной техники «Техноград». [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://technograd.tomsk.ru/>, свободный.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 июня 2007 г.