ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.142.2

И.Р. Гарайшина

ПРИМЕНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ ТРЕХФАЗНОЙ СМО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛА ЛИЦ, ЗАСТРАХОВАННЫХ В ПЕНСИОННОМ ФОНДЕ, ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ

Предлагается модель процесса изменения численности лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, при этом рассматриваются три категории населения: работающие лица до достижения пенсионного возраста, занятые в экономике пенсионеры, неработающие пенсионеры. Изучаются основные характеристики указанного процесса.

Ключевые слова: *трехфазная система*, *модель процесса изменения численности лиц*, *Пенсионный фонд.*

1. Построение математической модели

Всех лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, разобьём на три категории: к первой отнесём тех, кто занимается трудовой деятельностью до достижения пенсионного возраста, ко второй – занятых в экономике лиц пенсионного возраста, к третьей – неработающих пенсионеров. Для моделирования процесса изменения числа застрахованных лиц используем бесконечнолинейную трехфазную систему массового облуживания – полагаем, что застрахованный находится на i-й фазе обслуживания, если в данный момент принадлежит i-й категории (i=1, 2, 3). На вход системы поступает пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t)$, имеющей смысл среднего числа лиц, застрахованных за единицу времени. Считаем, что продолжительность пребывания лица на каждой фазе есть экспоненциально распределенная случайная величина с параметрами μ_1, μ_2, μ_3 соответственно. Вероятность перехода заявки с первой фазы на вторую равна r_1, со второй на третью – r_2, с первой на третью – r_3.

Состояние данной системы определим трехмерным вектором $\{i, j, k\}$, где i, j, k – количество заявок на 1-й, 2-й и 3-й фазах.

Изменение данного вектора во времени образует марковский процесс $\{i(t), j(t), k(t)\}$. Обозначим

$$P(i,j,k,t) = P(i(t) = i, j(t) = j, k(t) = k).$$

Распределение $P(i,j,k,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(i,j,k,t)}{\partial t} + (\lambda(t) + i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3)P(i,j,k,t) =$$

$$=\lambda\rho(t)P(i-1,j,k,t)+r_1\mu_1(i+1)P(i+1,j-1,k,t)+r_3\mu_1(i+1)P(i+1,j,k-1,t)+$$
$$+(1-r_1-r_3)\mu_1(i+1)P(i+1,j,k,t)+r_2\mu_2(j+1)P(i,j+1,k-1,t)+$$
$$+(1-r_2)\mu_2(j+1)P(i,j+1,k,t)+\mu_3(k+1)P(i,j,k+1,t) \qquad (1)$$

и заданным начальным условиям

$$P(i,j,k,t_0)=P_0(i,j,k).$$

2. Исследование математической модели

Обозначим интенсивность входящего потока на страхование $\lambda(t)=\lambda\rho(t)$, где λ – бесконечно большая величина, не зависящая от *t*, и рассмотрим предельный, при $\lambda\to\infty$, процесс для последовательности процессов $\left\{\frac{i(t)}{\lambda},\frac{j(t)}{\lambda},\frac{k(t)}{\lambda}\right\}$.

Теорема 1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$ для последовательности случайных процессов $\left\{\frac{i(t)}{\lambda},\frac{j(t)}{\lambda},\frac{k(t)}{\lambda}\right\}$ является детерминированной трехмерной вектор-функцией:

$$\alpha(t)=e^{-\mu_1 t}\left(\int_{t_0}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds+\alpha_0 e^{\mu_1 t_0}\right),$$

$$\beta(t)=\left(r_1\mu_1\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s}\rho(u)e^{\mu_1 u}du+\alpha_0 e^{\mu_1 t_0}\right)e^{(\mu_2-\mu_1)s}ds+\beta_0 e^{\mu_2 t_0}\right)e^{-\mu_2 t},$$

$$\gamma(t)=e^{-\mu_3 t}\left(\int_{t_0}^{t}\left(r_3\mu_1\alpha(s)+r_2\mu_2\beta(s)\right)e^{\mu_3 s}ds+\gamma_0 e^{-\mu_3 t_0}\right), \qquad (2)$$

где $\alpha_0=\alpha(t_0)$, $\beta_0=\beta(t_0)$, $\gamma_0=\gamma(t_0)$.

Доказательство. Обозначим $\frac{1}{\lambda}=\varepsilon$ и выполним в (1) замену

$$i\varepsilon=x,\ j\varepsilon=y,\ k\varepsilon=z,\ \frac{1}{\varepsilon^3}P(i,j,k,t)=\pi(x,y,z,t,\varepsilon),$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial t}+\left(\lambda\rho(t)+\lambda\mu_1 x+\lambda\mu_2 y\right)\pi(x,y,z,t,\varepsilon)=$$
$$=\lambda\rho(t)\pi(x-\varepsilon,y,z,t,\varepsilon)+r_1\mu_1\lambda(x+\varepsilon)\pi(x+\varepsilon,y-\varepsilon,z,t,\varepsilon)+$$
$$+r_3\mu_1\lambda(x+\varepsilon)\pi(x+\varepsilon,y,z-\varepsilon,t,\varepsilon)+(1-r_1-r_3)\mu_1\lambda(x+\varepsilon)\pi(x+\varepsilon,y,z,t,\varepsilon)+$$
$$+r_2\mu_2\lambda(y+\varepsilon)\pi(x,y+\varepsilon,z-\varepsilon,t,\varepsilon)+(1-r_2)\mu_2\lambda(y+\varepsilon)\pi(x,y+\varepsilon,z,t,\varepsilon)+$$
$$+\mu_3\lambda(z+\varepsilon)\pi(x,y,z+\varepsilon,t,\varepsilon).$$

Раскладывая функции $\pi(x\pm\varepsilon,y\pm\varepsilon,z\pm\varepsilon,t,\varepsilon)$ в ряд по приращениям аргументов с точностью до $o(\varepsilon)$, запишем

$$\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial t}+(\lambda\rho(t)+\lambda\mu_1x+\lambda\mu_2y)\pi(x,y,z,t,\varepsilon)=\lambda\rho(t)\left(\pi(x,y,z,t,\varepsilon)-\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial x}\varepsilon\right)+$$

$$+r_1\mu_1\lambda\left(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x}(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon-x\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial y}\varepsilon\right)+r_3\mu_1\lambda\left(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon-x\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon\right)+(1-r_1-r_3)\mu_1\lambda\left(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}(x\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon\right)+r_2\mu_2\lambda\left(y\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(y\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon-y\frac{\partial\pi(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial z}\varepsilon\right)+$$

$$+(1-r_2)\mu_2\lambda\left(y\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(y\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon\right)+$$

$$+\mu_3\lambda\left(z\pi(x,y,z,t,\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial z}(z\pi(x,y,z,t,\varepsilon))\varepsilon\right)+o(\varepsilon).$$

Выполнив несложные преобразования и обозначив $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\pi(x,y,z,t,\varepsilon)=\pi(x,y,z,t)$, получим при $\varepsilon\to 0$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial\pi(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho(t)-\mu_1x)\pi(x,y,z,t)\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\{(r_1\mu_1x-\mu_2y)\pi(x,y,z,t)\}-\frac{\partial}{\partial z}\{(r_3\mu_1x+\mu_2r_2y-\mu_3z)\pi(x,y,z,t)\},$$

которое является вырожденным уравнением Фоккера – Планка для плотности $\pi(x,y,z,t)$ распределения вероятностей значений трехмерного диффузионного процесса с коэффициентами переноса $(\rho(t)-\mu_1x)$, $(r_1\mu_1x-\mu_2y)$ и $(r_3\mu_1x+\mu_2r_2y-\mu_3z)$ и коэффициентами диффузии, равными нулю. Обозначим полученный детерминированный процесс $\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$.

В силу полученных коэффициентов, имеющих смысл средней локальной скорости изменения процесса, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\rho(t)-\mu_1\alpha(y),\\ \beta'(t)=r_1\mu_1\alpha(t)-\mu_2\beta(t),\\ \gamma'(t)=r_3\mu_1\alpha(t)+r_2\mu_2\beta(t)-\mu_3\gamma(t),\end{cases}\tag{3}$$

решение которой имеет вид (2). Теорема доказана.

Далее проведем исследование процесса отклонения процессов $\frac{i(t)}{\lambda}$, $\frac{j(t)}{\lambda}$, $\frac{k(t)}{\lambda}$ от найденных средних $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$. Для этого рассмотрим предельный, при $\lambda\to\infty$, процесс для последовательности

$$\left\{\frac{i(t)-\lambda\alpha(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{j(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{k(t)-\lambda\gamma(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}\tag{4}$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 2. При $\lambda \to \infty$ предельный процесс $\{x(t), y(t), z(t)\}$ для последовательности (4) является трехмерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(x,y,z,t) = -\mu_1 x\,,\ A_2(x,y,z,t) = r_1\mu_1 x - \mu_2 y\,,$$

$$A_3(x,y,z,t,) = r_3\mu_1 x + r_2\mu_2 y - \mu_3 z \tag{5}$$

и диффузии

$$B_{11}(t) = \rho(t) + \mu_1\alpha(t)\,,\ B_{22}(t) = r_1\mu_1\alpha(t) + \mu_2\beta(t)\,,$$

$$B_{33}(t) = r_3\mu_1\alpha(t) + r_2\mu_2\beta(t) + \mu_3\gamma(t)\,,$$

$$B_{12}(t) = -r_1\mu_1\alpha(t)\,,\ B_{13}(t) = -r_3\mu_1\alpha(t)\,,\ B_{23}(t) = -r_2\mu_2\beta(t)\,. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим $\frac{1}{\lambda} = \varepsilon^2$ и выполним в (1) замену вида

$$i\varepsilon^2 = \alpha(t) + \varepsilon x\,,\ j\varepsilon^2 = \beta(t) + \varepsilon y\,,\ k\varepsilon^2 = \gamma(t) + \varepsilon z\,,\ \frac{1}{\varepsilon^3}P(i,j,k,t) = H(x,y,z,t,\varepsilon)\,,$$

тогда уравнение (1) можно представить как

$$\frac{\partial H(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial t} - \frac{\alpha'(t)}{\partial t}\frac{\partial H(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\beta'(t)}{\partial t}\frac{\partial H(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial y} - \frac{\gamma'(t)}{\partial t}\frac{\partial H(x,y,z,t,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+(\lambda\rho(t)+\lambda\mu_1(\alpha(t)+\varepsilon x)+\lambda\mu_2(\beta(t)+\varepsilon y)+\lambda\mu_3(\gamma(t)+\varepsilon z))H(x,y,z,t,\varepsilon)=\lambda\rho(t)H(x-\varepsilon,y,z,t,\varepsilon)+$$

$$+r_1\mu_1\lambda(\alpha(t)+\varepsilon(x+\varepsilon))H(x+\varepsilon,y-\varepsilon,z,t,\varepsilon)+\ r_3\mu_1\lambda(\alpha(t)+\varepsilon(x+\varepsilon))H(x+\varepsilon,y,z-\varepsilon,t,\varepsilon)+$$

$$+(1-r_1-r_3)\mu_1\lambda(\alpha(t)+\varepsilon(x+\varepsilon))H(x+\varepsilon,y,z,t,\varepsilon)+\ r_2\mu_2\lambda(\beta(t)+\varepsilon(y+\varepsilon))\pi(x,y+\varepsilon,z-\varepsilon,t,\varepsilon)+$$

$$+(1-r_2)\mu_2\lambda(\beta(t)+\varepsilon(y+\varepsilon))H(x,y+\varepsilon,z,t,\varepsilon)+\ \mu_3\lambda(\gamma(t)+\varepsilon(z+\varepsilon))H(x,y,z+\varepsilon,t,\varepsilon)\,.$$

Раскладывая функции $H(x\pm\varepsilon,y\pm\varepsilon,z\pm\varepsilon,t,\varepsilon)$ в ряд по приращениям аргументов с точностью до $o\left(\varepsilon^2\right)$ после приведения подобных слагаемых с учетом формул (3) и обозначив $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}H(x,y,z,t,\varepsilon)=H(x,y,z,t)$, получим при $\varepsilon\to 0$ уравнение

$$\frac{\partial H(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{-\mu_1 x\}H(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial y}\{(r_1\mu_1 x - \mu_2 y)H(x,y,z,t)\} -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\{(r_3\mu_1 x + r_2\mu_2 y - \mu_3 z)H(x,y,z,t)\} + \frac{1}{2}(\rho(t) + \mu_1\alpha(t))\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}(r_1\mu_1\alpha(t)+\mu_2\beta(t))\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(r_3\mu_1\alpha(t)+r_2\mu_2\beta(t)+\mu_3\gamma(t))\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial z^2} -$$

$$-r_1\mu_1\alpha(t)\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial x\partial y} - r_3\mu_3\alpha(t)\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial x\partial z} - r_2\mu_2\beta(t)\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial y\partial z}\,,$$

которое является уравнением Фоккера – Планка для плотности $H(x,y,z,t)$ распределения вероятностей значений трехмерного диффузионного процесса $\{x(t), y(t), z(t)\}$ с коэффициентами переноса (5) и диффузии (6). Теорема доказана.

Процессы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ являются гауссовскими и определяются системой трёх стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx(t)=-\mu_1 x(t)dt+\sigma_{11}(t)dw_1(t), \\ dy(t)=(r_1\mu_1 x(t)-\mu_2 y(t))+\sigma_{21}(t)dw_1(t)+\sigma_{22}(t)dw_2(t), \\ dz(t)=(r_3\mu_1 x(t)+r_2\mu_2 y(t)-\mu_3 z(t))dt+\sigma_{31}(t)dw_1(t)+\sigma_{32}(t)dw_2(t)+\sigma_{33}(t)dw_3(t), \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$x(t)=e^{-\mu_1 t}\left\{x_0 e^{\mu_1 t_0}+\int_{t_0}^{t}\sigma_{11}(s)e^{\mu_1 s}dw_1(s)\right\},$$

$$y(t)=e^{-\mu_2 t}\left\{y_0 e^{\mu_2 t_0}+r_1\mu_1\int_{t_0}^{t}x(s)e^{\mu_2 s}ds+\int_{t_0}^{t}\sigma_{21}(s)e^{\mu_2 s}dw_1(s)+\int_{t_0}^{t}\sigma_{22}(s)e^{\mu_2 s}dw_2(s)\right\},$$

$$z(t)=e^{-\mu_3 t}\left\{z_0 e^{\mu_3 t_0}+r_3\mu_1\int_{t_0}^{t}x(s)e^{\mu_3 s}ds+r_2\mu_2\int_{t_0}^{t}y(s)e^{\mu_3 s}ds+\int_{t_0}^{t}\sigma_{31}(s)e^{\mu_3 s}dw_1(s)+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t}\sigma_{32}(s)e^{\mu_3 s}dw_2(s)+\int_{t_0}^{t}\sigma_{33}(s)e^{\mu_3 s}dw_3(s)\right\}, \qquad (7)$$

где $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, а параметры σ_{ij} определяются коэффициентами диффузии (6) следующим образом:

$$\sigma_{11}(t)=\sqrt{B_{11}(t)},\ \sigma_{21}(t)=\frac{B_{12}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)}},\ \sigma_{22}(t)=\sqrt{B_{22}(t)-\frac{B_{12}^2(t)}{B_{11}(t)}},$$

$$\sigma_{31}(t)=\frac{B_{13}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)}},\ \sigma_{32}(t)=\frac{B_{11}(t)B_{23}(t)-B_{12}(t)B_{13}(t)}{\sqrt{B_{11}(t)\left(B_{11}(t)B_{22}(t)-B_{12}^2(t)\right)}},$$

$$\sigma_{33}(t)=\sqrt{B_{33}(t)-\frac{B_{13}^2(t)}{B_{11}(t)}-\frac{\left(B_{11}(t)B_{23}(t)-B_{12}(t)B_{13}(t)\right)^2}{B_{11}(t)\left(B_{11}(t)B_{22}(t)-B_{12}^2(t)\right)}}.$$

Используя явные выражения процессов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (7) и свойства стандартных винеровских процессов, можно получить корреляционные и кросскорреляционные функции рассматриваемых процессов. Вследствие большого объёма выкладок приведем лишь окончательные выражения (при нулевых начальных условиях).

Корреляционная функция процесса $x(t)$:

$$R_1(t_1,t_2)=M\left(x(t_1)x(t_2)\right)=$$

$$=e^{-\mu_1(t_1+t_2)}\int_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}e^{2\mu_1 s}\left(\rho(s)+\mu_1 e^{-\mu_1 s}\int_{t_0}^{s}\rho(u)e^{\mu_1 u}du\right)ds.$$

Кросскорреляционная функция процессов $x(t)$ и $y(t)$:

$$R_{12}(t_1,t_2)=M(x(t_1)y(t_2))=$$

$$=\frac{r_1\mu_1}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_1 t_1}\left(e^{-\mu_1 t_2}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}(\rho(s)+\mu_1\alpha(s))e^{2\mu_1 s}ds-\right.$$

$$\left.-e^{-\mu_2 t_2}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}(\rho(s)+\mu_2\alpha(s))e^{(\mu_1+\mu_2)s}ds\right).$$

Корреляционная функция процесса $y(t)$:

$$R_2(t_1,t_2)=M(y(t_1)y(t_2))=$$

$$e^{-\mu_2 t_1}\left(\frac{r_1^2\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}R_{12}(s,t_2)e^{\mu_2 s}ds-\right.$$

$$-\frac{r_1^2\mu_1^2}{\mu_2-\mu_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\alpha(s)\left(e^{-\mu_1(t_2-s)}-e^{-\mu_2(t_2-s)}\right)e^{\mu_2 s}ds+$$

$$\left.+e^{-\mu_2 t_2}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}(r_1\mu_1\alpha(s)+\mu_2\beta(s))e^{2\mu_2 s}ds\right).$$

Кросскорреляционная функция процессов $x(t)$ и $z(t)$:

$$R_{13}(t_1,t_2)=M(x(t_1)z(t_2))=$$

$$=e^{-\mu_3 t_2}\left(r_3\mu_1\left(\int\limits_{t_0}^{t_2}R_1(t_1,s)e^{\mu_3 s}ds-e^{-\mu_1 t_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\alpha(s)ds\right)+\right.$$

$$\left.+r_2\mu_2\int\limits_{t_0}^{t_2}R_{12}(t_1,s)e^{\mu_3 s}ds\right).\ R_{23}(t_1,t_2)=M(y(t_1)z(t_2))=$$

$$=e^{-\mu_3 t_2}\left(r_3\mu_1\int\limits_{t_0}^{t_2}R_{12}(s,t_1)e^{\mu_3 s}ds+r_2\mu_2\int\limits_{t_0}^{t_2}R_2(s,t_1)e^{\mu_3 s}ds-\right.$$

$$-\frac{r_1r_3\mu_1^2}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2 t_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\left(e^{(\mu_2-\mu_1)t_1}-e^{(\mu_2-\mu_1)s}\right)\times$$

$$\times e^{(\mu_3+\mu_1)s}\alpha(s)ds-r_2\mu_2e^{-\mu_2 t_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}e^{(\mu_2+\mu_3)s}\beta(s)ds\,.$$

Корреляционная функция процесса $z(t)$:

$$R_3(t_1,t_2)=M(z(t_1)z(t_2))=$$

$$=e^{-\mu_3 t_2}\left(r_3\mu_1\int\limits_{t_0}^{t_2}R_{13}(s,t_1)e^{\mu_3 s}ds+r_2\mu_2\int\limits_{t_0}^{t_2}R_{23}(s,t_1)e^{\mu_3 s}ds-\right.$$

$$
-e^{-\mu_3 t_1}\left(\frac{r_3^2\mu_1^2}{\mu_3-\mu_1}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\left(e^{(\mu_3-\mu_1)t_1}-e^{(\mu_3-\mu_1)s}\right)e^{(\mu_3+\mu_1)s}\alpha(s)\,ds+\frac{r_1r_2r_3\mu_1^2\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\times\right.
$$

$$
\times\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}\alpha(s)e^{(\mu_1+\mu_3)s}\left(\frac{e^{(\mu_3-\mu_1)t_1}-e^{(\mu_3-\mu_1)s}}{\mu_3-\mu_1}-\frac{e^{(\mu_3-\mu_2)t_1+(\mu_2-\mu_1)s}-e^{(\mu_3+\mu_2)s}}{\mu_3-\mu_2}\right)ds+
$$

$$
+\frac{r_2r_3\mu_1\mu_2}{\mu_3-\mu_2}\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}e^{(\mu_2+\mu_3)s}\left(e^{(\mu_3-\mu_2)t_1}-e^{(\mu_3-\mu_2)s}\right)\alpha(s)-
$$

$$
\left.-\int\limits_{t_0}^{\min(t_1,t_2)}e^{2\mu_3 s}\left(r_3\mu_1\alpha(s)+r_2\mu_2\beta(s)+\mu_3\gamma(s)\right)ds\right).
$$

Таким образом, в силу замены (4) процесс изменения численности застрахованных лиц имеет вид

$$
\{i(t), j(t), k(t)\} = \left\{\lambda\alpha(t)+\sqrt{\lambda}x(t), \lambda\beta(t)+\sqrt{\lambda}y(t), \lambda\gamma(t)+\sqrt{\lambda}z(t)\right\},
$$

где детерминированные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ определяются формулами (3), а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – гауссовские случайные процессы, имеющие вид (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.
2. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
3. *Саати Т.* Элементы теории массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1971. 570 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 29 сентября 2007 г.