

УДК 681.5

**В.И. Смагин, С.В. Смагин**

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ И ТРАНСПОРТНЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

Рассматривается алгоритм синтеза локально-оптимальной системы управления запасами при неполной информации о модели спроса и с учетом ограничений и транспортных запаздываний.

**Ключевые слова:** управление запасами, адаптация, дискретная модель, система с запаздыванием.

Теория следящих систем применяется в задачах управления запасами в работах [1 – 4]. В настоящей работе для определения поставок на склад используются метод локально-оптимального слежения [5] и метод адаптации и прогноза на основе калмановской фильтрации и экстраполяции. Управление запасами осуществляется с учетом ограничений на транспортные средства и с учетом запаздываний, при этом осуществляется минимизации издержек на хранение товара.

### 1. Управление запасами при точном измерении спроса

Пусть модель склада описывается дискретным уравнением:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h) - s(k),$$

$$x(0) = x_0, \quad u(j) = \psi(j), \quad j = -h, -h+1, \dots, -1, \quad (1)$$

где  $x(k) \in R^n$  – вектор количества продукта на складе в  $k$ -й такт ( $x_i(k)$  – количество товаров  $i$ -й номенклатуры),  $u(k-h) \in R^m$  – вектор заказа на поставки ( $u_i$  – количество заказанного товара  $i$ -й номенклатуры),  $h$  – количество тактов транспортного запаздывания,  $s(k) \in R^n$  – вектор спроса в  $k$ -м такте ( $s_i(k)$  – спрос на товар  $i$ -й номенклатуры),  $x_0$  и  $\psi(j)$  ( $j = -h, -h+1, \dots, -1$ ) – заданные векторы. Матрицы  $A$  и  $B$  определяются характеристиками и структурой склада.

Оптимизируемый локальный критерий имеет вид

$$I(k) = (x(k+1) - z)^T C (x(k+1) - z) + u^T(k-h) D u(k-h), \quad (2)$$

где  $C > 0$ ,  $D \geq 0$  – весовые матрицы,  $z$  – заданный отслеживаемый вектор, «Т» – операция транспонирования. В этом разделе будем предполагать, что все компоненты вектора  $x(k)$  и  $s(k)$  измеряются точно.

Вычислим значения критерия (2):

$$I(k) = u^T(k-h) (B^T C B + D) u(k-h) + u^T(k-h) B^T C (Ax(k) - s(k) - z) +$$

$$+ (Ax(k) - s(k) - z)^T C B u(k-h).$$

Оптимальное управление определим из условия

$$\frac{dI(k)}{du(k-h)} = 0. \quad (3)$$

Тогда, в силу (3), получим уравнение

$$(B^T C B + D) u(k-h) + B^T C (Ax(k) - s(k) - z) = 0. \quad (4)$$

Выражая  $u(k-h)$  из (4), управление будет следующим:

$$u(k-h) = -(B^T CB + D)^{-1} B^T C(Ax(k) - s(k) - z). \quad (5)$$

Учитывая (1), имеем следующие равенства

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-h-1) - s(k-1), \\ x(k-1) &= Ax(k-2) + Bu(k-h-2) - s(k-2), \\ &\vdots \\ x(k-h+1) &= Ax(k-h) + Bu(k-2h) - s(k-h). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда, учитывая (6), локально-оптимальное управление (5) представляется в виде

$$\begin{aligned} u(k-h) &= -(B^T CB + D)^{-1} B^T C(A^{h+1}x(k-h) + \\ &+ \sum_{i=1}^h A^i Bu(k-h-i) - \sum_{i=0}^h A^i s(k-i) - z). \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что управление (7) формируется в момент времени  $k-h$  и для его реализации необходимо знать состояние склада  $x(k-h)$ , спроса  $s(k-h)$  и прошлые значения управлений  $u(k-h-i)$ , а также необходимо осуществлять прогноз спроса для моментов времени  $k, k-1, \dots, k-h+1$ .

## 2. Управление запасами при косвенных наблюдениях

В этом случае дополнительно введем модель спроса:

$$s(k+1) = Rs(k) + r + q(k), \quad s(0) = s_0, \quad (8)$$

где  $R$  – постоянная матрица размерности  $n \times n$ ,  $r$  – постоянный вектор,  $q(k)$  – случайное возмущение. Предполагается, что имеются косвенные наблюдения за вектором спроса:

$$w(k) = Hs(k) + \tau(k), \quad (9)$$

где  $w(k) \in R^{m_1}$  – вектор наблюдений;  $H$  –  $m_1 \times n$ -матрица;  $\tau(k)$  – случайные ошибки наблюдений;  $q(k)$ ,  $\tau(k)$  – независимые гауссовские случайные последовательности с характеристиками

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{\tau(k)\} = 0, \quad M\{q(k) q^T(j)\} = Q\delta_{kj}, \quad M\{\tau(k) \tau^T(j)\} = T\delta_{kj}, \quad (10)$$

где  $M\{\}$  – математическое ожидание.

Так как в постановке задачи этого раздела вектор  $s(k)$  контролируется с ошибками (см.(9)), то управление (7) можно, используя оценщики, реализовать в виде

$$\begin{aligned} u^*(k-h) &= -(B^T CB + D)^{-1} B^T C(A^{h+1}x(k-h) + \\ &+ \sum_{i=1}^h A^i Bu^*(k-h-i) - A^h \hat{s}_f(k-h) - \sum_{i=0}^{h-1} A^i \hat{s}_p(k-i) - z), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\hat{s}_f(k-h)$  – оценка фильтрации, которая определяется с помощью алгоритма оптимальной калмановской фильтрации [6]:

$$\begin{aligned} \hat{s}_f(k-h) &= R\hat{s}_f(k-h-1) + r + K_f(k-h)[w(k-h) - H(R\hat{s}_f(k-h-1) + r)], \\ \hat{s}_f(0) &= \bar{s}_0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$K_f(k-h) = P(k-h/k-h-1)H^T(HP(k-h/k-h-1)H^T + T)^{-1}; \quad (13)$$

$$P(k-h/k-h-1) = RP(k-h-1)R^T + Q; \quad (14)$$

$$P(k-h) = (E - K_f(k-h)H)P(k-h/k-h-1), \quad P(0) = P_0, \quad (15)$$

где  $E$  – единичная матрица соответствующей размерности. Фильтр (12) использует информацию, поступившую из канала измерений в момент  $k-h$ . В (11) требуется вычислять также оценки и в моменты большие, чем  $k-h$  (оценки прогноза), поэтому здесь необходимо воспользоваться экстраполятором, который позволит вычислить оценку спроса с прогнозом на 1 такт  $\hat{s}_p(k-h+1)$ :

$$\begin{aligned} \hat{s}_p(k-h+1) &= R\hat{s}_p(k-h) + r + K_p(k-h)(w(k-h) - H\hat{s}_p(k-h)), \\ \hat{s}_p(0) &= \bar{s}_0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_p(k-h) = RP_p(k-h)H^T(HP_p(k-h)H^T + T)^{-1}; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P_p(k-h+1) &= (R - K_p(k-h)H)P_p(k-h)(R - K_p(k-h)H)^T + Q + K_p(k-h)TK_p^T(k-h), \\ P_p(0) &= P_0, \end{aligned} \quad (18)$$

а оценки прогнозов для тактов  $j = 2, \dots, h-1$  определяются по формулам

$$\hat{s}_p(k-h+j) = R\hat{s}_p(k-h+j-1) + r. \quad (19)$$

### 3. Адаптация в задаче управления запасами

В этом случае будем предполагать, что модель спроса содержит неизвестные параметры:

$$s(k+1) = R(\theta)s(k) + r(\theta) + q(k), \quad (20)$$

где  $\theta$  – неизвестный постоянный вектор,  $R(\theta)$  – матрица, линейно зависящая от компонент вектора  $\theta$ ,  $r(\theta)$  – вектор, линейно зависящий от  $\theta$ . Предполагается, что имеется следующая априорная информация о векторе  $\theta$ :

$$M\{\theta\} = \bar{\theta}_0, \quad M\{(\theta - \bar{\theta}_0)(\theta - \bar{\theta}_0)^T\} = P_{\theta_0}.$$

Адаптация закона управления осуществляется по принципу разделения, который в нашем случае состоит из следующих этапов:

- построение закона управления по локальному критерию в предположении, что параметры  $\theta$  в модели (20) известны точно (закон управления имеет вид (11));
- оценивание неизвестных параметров (идентификация);
- формирование закона адаптивного управления  $u_a(k)$  вида (11), которое осуществляется путем замены в (12), (14), (16) – (19) точных значений параметров на их оценки.

Так как параметры являются неизвестными константами, то их динамическая модель имеет вид

$$\theta(k) = \theta(k-1). \quad (21)$$

Для идентификации будем использовать оптимальный дискретный фильтр Калмана. Учитывая модель косвенных наблюдений (9), получим модель измерений в текущий момент времени  $k-h$  в следующем виде:

$$w(k-h) = Hs(k-h) + \tau(k-h). \quad (22)$$

Тогда, учитывая (8), имеем

$$w(k-h) = HR(\theta)s(k-h-1) + Hr(\theta) + Hq(k-h-1) + \tau(k-h). \quad (23)$$

Представим (23) в линейном относительно  $\theta$  векторно-матричном виде:

$$w(k-h) = G(s(k-h-1))\theta + g(s(k-h-1)) + Hq(k-h-1) + \tau(k-h), \quad (24)$$

где  $G$  – матрица и  $g$  – вектор.

Учитывая (21), (24), рекуррентные уравнения, осуществляющие оценивание неизвестных параметров  $\theta$ , представим в виде

$$\hat{\theta}(k-h) = \hat{\theta}(k-h-1) + K_{\theta}(k-h)(w(k-h) - \hat{G}\hat{\theta}(k-h-1) - \hat{g}), \quad \theta(0) = \bar{\theta}_0; \quad (25)$$

$$K_{\theta}(k-h) = P_{\theta}(k-h)\hat{G}^T(\hat{G}P_{\theta}(k-h)\hat{G}^T + HQH^T + T)^{-1}; \quad (26)$$

$$P_{\theta}(k-h+1) = (E - K_{\theta}(k-h)\hat{G})P_{\theta}(k-h), \quad P_{\theta}(0) = P_{\theta_0}. \quad (27)$$

где  $\hat{G} = G(\hat{s}_f(k-h-1))$ ,  $\hat{g} = g(\hat{s}_f(k-h-1))$ .

Уравнения, используемые для вычисления оценок и прогноза (12) – (19), в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{s}_f(k-h) &= \hat{R}\hat{s}_f(k-h-1) + \hat{r} + K_f(k-h)[w(k-h) - H(\hat{R}\hat{s}_f(k-h-1) + \hat{r})], \\ \hat{s}_f(0) &= \bar{s}_0; \end{aligned} \quad (28)$$

$$K_f(k-h) = P(k-h/k-h-1)H^T(HP(k-h/k-h-1)H^T + T)^{-1}; \quad (29)$$

$$P(k-h/k-h-1) = \hat{R}P(k-h-1)\hat{R}^T + Q; \quad (30)$$

$$P(k-h) = (E - K_f(k-h)H)P(k-h/k-h-1), \quad P(0) = P_0. \quad (31)$$

$$\hat{s}_p(k-h+1) = \hat{R}\hat{s}_p(k-h) + \hat{r} + K_p(k-h)(w(k-h) - H\hat{s}_p(k-h)), \quad \hat{s}_p(0) = \bar{s}_0; \quad (32)$$

$$K_p(k-h) = \hat{R}P_p(k-h)H^T(HP_p(k-h)H^T + T)^{-1}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} P_p(k-h+1) &= (\hat{R} - K_p(k-h)H)P_{pr}(k-h)(\hat{R} - K_p(k-h)H)^T + Q + K_p(k-h)TK_p^T(k-h), \\ P_p(0) &= P_0. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\hat{s}_p(k-h+j) = \hat{R}\hat{s}_p(k-h+j-1) + \hat{r}, \quad j = 2, \dots, h-1, \quad (35)$$

где  $\hat{R} = R(\hat{\theta}(k-h))$ ,  $\hat{r} = r(\hat{\theta}(k-h))$ .

#### 4. Учет транспортных ограничений

Вектор поставок будем определять с учетом транспортных ограничений следующего вида (для поставок используется одно транспортное средство грузоподъемности  $G_{\max}$ ):

$$\bar{u}_a(k) = \begin{cases} u_a(k), & \text{если } G_{\min} \leq G(u_a(k)) \leq G_{\max}, \\ 0, & \text{если } G(u_a(k)) < G_{\min}, \\ u_a(k)/\alpha(k), & \text{если } G(u_a(k)) > G_{\max}. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь  $G(u_a(k)) = \sum_{i=1}^n p_i u_{a,i}(k)$  – вес перевозимого груза ( $p_i$  – вес единицы товара  $i$ -й номенклатуры);  $u_a(k)$  – вектор поставок, построенный на основе принципа

разделения;  $G_{\min} = K_r G_{\max}$  ( $K_r$  – коэффициент использования грузоподъемности транспортного средства);  $\alpha(k) = G_{\max} / G(u_a(k))$ .

### 5. Минимизация издержек на хранение товаров

Издержки на хранение товара на заданном скользящем временном отрезке  $[k, k+T]$  определяются по формуле

$$J_{\text{изд}}(z, k) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=k}^{k+T} x_i(t) C_i. \quad (37)$$

При этом должны выполняться ограничения

$$x_i(k) \geq w_i, \quad \forall k \in [k, k+T], \quad i = 1, \dots, n, \quad (38)$$

где  $C_i$  – стоимость хранения единицы товара  $i$ -й номенклатуры в единицу времени,  $w_i$  – страховой запас для товара  $i$ -й номенклатуры.

Минимизация критерия (37) при ограничениях (38) осуществляется по вектору  $z$ , при этом на каждом шаге пересчитываются  $u_a(k)$ . Найденное значение вектора  $z^*$ , обеспечивает минимальные издержки на временном интервале от  $k$  до  $k+T$  и, в результате выполнения ограничений (36), обеспечивает также высокую загруженность транспортного средства в соответствии с заданным коэффициентом  $K_r$ . По найденному вектору  $z^*$  определяется объем поставок  $u_a(k+T+1)$ , и далее, по аналогии, решается задача минимизация критерия  $J_{\text{изд}}(z, k+1)$ , при ограничениях (38) ( $\forall k \in [k+1, k+T+1]$ ) и определяется новый вектор  $z^*$ , который используется для определения поставок в момент времени  $k+T+2$ , и так далее.

### 6. Моделирование адаптивной системы управления запасами

Моделирование системы управления запасами выполнено для двухноменклатурного склада с использованием пакета Matlab 7.5.

Исходные данные при моделировании были следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k_1 & 0 \\ 0 & 1-k_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad u(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$s(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{s}_p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad r(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,4 \end{pmatrix}, \quad P_{\theta_0} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \end{pmatrix},$$

$$h = 1, \quad T = 50, \quad G_{\max} = 150, \quad K_r = 0,8, \quad C_1 = 1,5, \quad C_2 = 2,5, \quad w_1 = 6, \quad w_1 = 12,$$

где  $k_1 = 0,001$ ,  $k_2 = 0,0005$  – коэффициенты потерь. В модели спроса использовались следующие истинные значения параметров  $\theta_1 = 2,6$ ,  $\theta_2 = 2,5$ . На рис. 1 – 6 приведены результаты, полученные при оптимизации критерия (37) при ограничениях (38).

На рис. 1 показано изменение количества каждого вида товара  $x_1$ ,  $x_2$ . Как видно из рис. 1, количество товара постоянно меняется за счет изменения спроса и пополнения запасов.

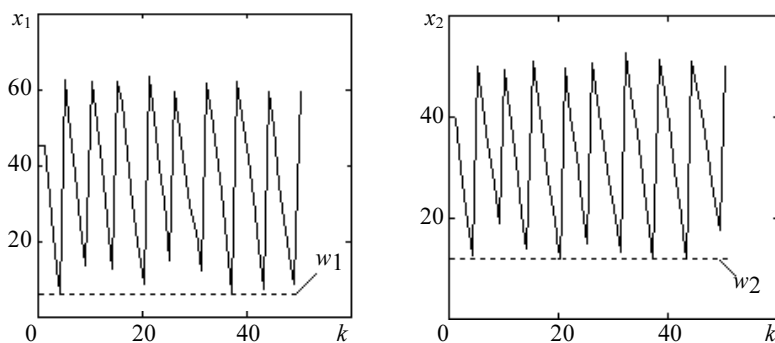


Рис. 1

На рис. 2 приведены оценки параметров модели спроса (сплошная линия), пунктирными линиями обозначены истинные значения параметров.

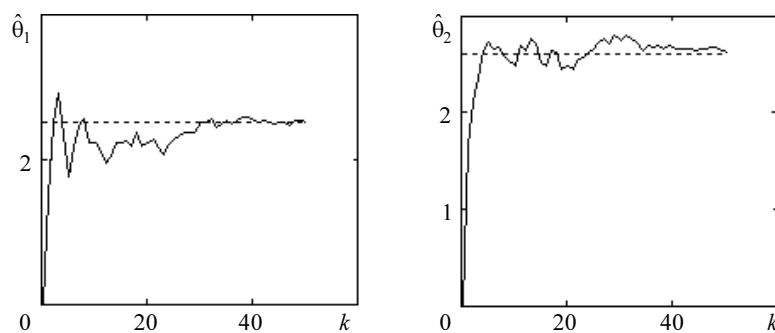


Рис. 2

На рис. 3 приведены графики изменения спроса (сплошная линия) и оценки фильтрации спроса (пунктирная линия).

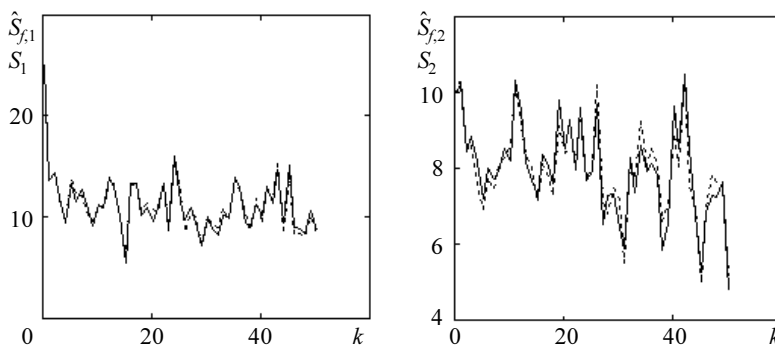


Рис. 3

На рис. 4 приведены графики изменения спроса (сплошная линия) и оценки прогноза спроса на один такт (пунктирная линия).

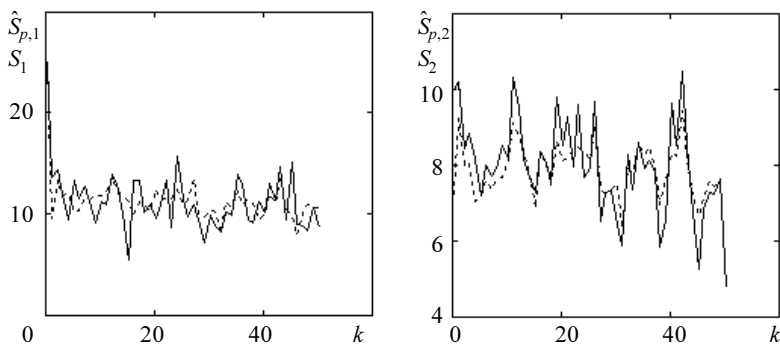


Рис. 4

На рис. 5 показаны реализации поставок товаров на склад.

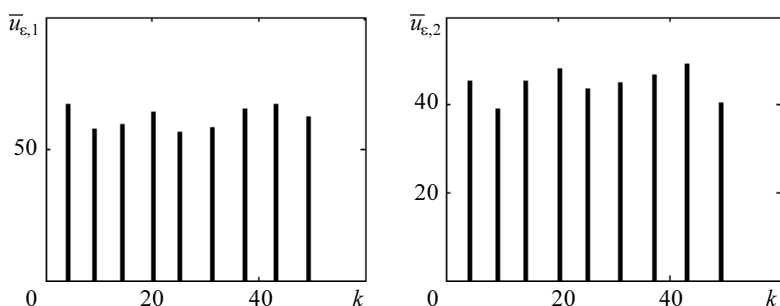


Рис. 5

На рис. 6 показаны в виде столбиковой диаграммы вес каждой поставки.

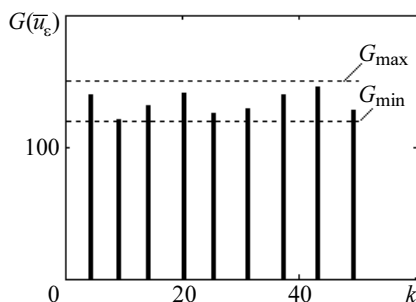


Рис. 6

Как видно из рисунка, в результате выполнения ограничений вида (36) в течение 50 тактов реализовано 9 поставок, при этом вес каждой поставки находится в пределах между  $G_{\min}$  и  $G_{\max}$ , обеспечивая коэффициент использования грузоподъемности транспортного средства не хуже заданного  $K_r$ . При этом был определен

вектор  $z^*$ , минимизирующий критерий (37) с ограничениями (38). Оптимальный вектор

$$z^* = \begin{pmatrix} 62,3 \\ 51,2 \end{pmatrix}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М: Наука, 1975. 616 с.
2. *Лотоцкий В.А.* Управление запасами при частично наблюдаемом спросе // Статистические методы теории управления. М.: Наука, 1978. С. 222 – 224.
3. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991. 189 с.
4. *Смагин В.И., Смагин С.В.* Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 244 – 246.
5. *Смагин В.И., Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. 171 с.
6. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1972. 200 с.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 января 2008 г.