ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(4)

УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ ПРИ ПРОДАЖЕ ПОРТЯЩЕГОСЯ ТОВАРА

Рассматривается управление ценой продажи портящейся продукции, гарантирующее, что товар будет продан в течении торговой сессии и получена максимальная прибыль от его продажи

Ключевые слова: *управление ценой*, *продажа*, *портящаяся продукция.*

В предыдущих работах автора [1, 2] был рассмотрен вопрос об управлении ценой при продаже товара, который должен быть реализован в течение одной торговой сессии. Ниже рассматривается управление ценой при продаже товара, часть которого может испортиться в течение торговой сессии.

1. Детерминированное приближение

1.1. Продажа по постоянной цене

Предположим, что продукция портится с постоянной скоростью μ, то есть если в какой-то момент времени t у нас есть $Q(t)$ продукции, то за интервал времени $[t, t + \Delta t]$ её испортится $\mu Q(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

Пусть далее цена продажи постоянна и равна c. Тогда поток покупок будет пуассоновским потоком с интенсивностью $\lambda(c)$, так что за время Δt придёт в среднем $\lambda(c)\Delta t$ покупателей, которые купят, в среднем, количество товара, равное $a_1\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t)$.

Поэтому мы имеем

$$Q(t) - Q(t+\Delta t) = \mu Q(t)\Delta t + a_1\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда, после деления на Δt и предельного перехода $\Delta t \to 0$, получается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\mu Q(t) - a_1\lambda(c), \tag{1}$$

которое надо решить при начальном условии $Q(0) = Q_0$.

Легко проверить, что решение этого уравнения имеет вид

$$Q(t) = \left(Q_0 + \frac{a_1\lambda(c)}{\mu}\right)e^{-\mu t} - \frac{a_1\lambda(c)}{\mu}. \tag{2}$$

Если выдвинуть требование, чтобы весь товар был продан к моменту времени T, то мы получим условие

$$\left(Q_0 + \frac{a_1\lambda(c)}{\mu}\right)e^{-\mu T} - \frac{a_1\lambda(c)}{\mu} = 0,$$

из которого получается уравнение, определяющее цену продажи:

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q_0\mu e^{-\mu T}}{1-e^{-\mu T}} = \frac{\mu Q_0}{e^{\mu T}-1}. \tag{3}$$

Найдём отсюда цену продажи c для линейной аппроксимации $\lambda(c)$, когда

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}.$$

Уравнение (3) даёт
$$\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1 \frac{c}{c_0} = \frac{\mu Q_0}{a_1(e^{\mu T} - 1)},$$

откуда получаем, что

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\mu Q_0}{\lambda_1 a_1(e^{\mu T} - 1)}\right),$$

так что выручка от продажи нашей партии товара равна

$$S = a_1 c \lambda(c) T = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\mu Q_0}{\lambda_1 a_1(e^{\mu T} - 1)}\right) \frac{\mu Q_0 T}{(e^{\mu T} - 1)}. \qquad (4)$$

Если товар для продажи покупался по оптовой цене d, то прибыль от его продажи будет равна

$$P = S - dQ_0 = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\mu Q_0}{\lambda_1 a_1(e^{\mu T} - 1)}\right) \frac{\mu Q_0 T}{(e^{\mu T} - 1)} - dQ_0. \qquad (5)$$

Ясно, что вся эта продажа имеет смысл лишь тогда, когда $P > 0$. Отсюда получается, что оптовая цена d при покупке партии товара объёма Q_0 должна удовлетворять условию

$$d < c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\mu Q_0}{\lambda_1 a_1(e^{\mu T} - 1)}\right) \frac{\mu T}{(e^{\mu T} - 1)}. \qquad (6)$$

Найдём теперь оптимальный объём партии товара Q_0, максимизирующий нашу прибыль. Очевидно, что оптимальное значение Q_0 находится из условия

$$c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\mu Q_0}{\lambda_1 a_1(e^{\mu T} - 1)}\right) \frac{\mu Q_0 T}{(e^{\mu T} - 1)} - dQ_0 \Rightarrow \max_{Q_0},$$

или, в другой форме,

$$\left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1} - d\right] Q_0 - \frac{c_0 \mu^2 T Q_0^2}{\lambda_1 a_1 (e^{\mu T} - 1)^2} \Rightarrow \max_{Q_0}. \qquad (7)$$

Максимум этого выражения будет удовлетворять условию $Q_0 > 0$, если выполнено следующее ограничение на оптовую цену d:

$$d < c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1}.$$

Решая задачу (7), легко получить, что оптимальное значение

$$Q_0 = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1} - d\right] \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu T} - 1)^2}{2\mu^2 T c_0} \qquad (8)$$

и при этом максимальное значение прибыли

$$P_{\max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu T} - 1} - d\right]^2 \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu T} - 1)^2}{4\mu^2 T c_0}. \qquad (9)$$

1.2. Нахождение закона управления ценой продажи товара

Пусть теперь производится управление ценой продажи товара и цена продажи $c(t)$ в момент времени t выбирается из условия

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)}, \qquad (10)$$

с некоторой, пока неизвестной функцией $\varphi(t)$.

Тогда, в детерминированном приближении, $Q(t)$ определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dQ}{dt} = -\mu Q(t) - \frac{Q(t)}{\varphi(t)}, \qquad (11)$$

которое надо решить при начальном условии $Q(0) = Q_0$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\mu t - \int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right). \qquad (12)$$

Рассмотрим частный случай, когда зависимость $\lambda(c)$ имеет вид

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1 \frac{c - c_0}{c_0}.$$

Тогда цена продажи $c(t)$ в момент времени t находится из условия

$$a_1\lambda(c) = a_1\left(\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_1 \frac{c}{c_0}\right) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)},$$

откуда получаем

$$c(t) = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{Q(t)}{\lambda_1 a_1 \varphi(t)}\right). \qquad (13)$$

Выручка от продажи нашей партии товара в течение времени T будет равна

$$S = \int_0^T c(t) a_1 \lambda(c(t))dt = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt - \frac{c_0}{a_1\lambda_1}\int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt. \qquad (14)$$

Если товар приобретается по оптовой цене d, то прибыль от его продажи будет равна

$$P = S - dQ_0 = c_0\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt - \frac{c_0}{a_1\lambda_1}\int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt - dQ_0. \qquad (15)$$

Найдем оптимальный вид функции $\varphi(t)$. Мы видим, что P зависит от двух функционалов

$$\int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)}dt \text{ и } \int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)}dt.$$

Обозначая $Q(t)/\varphi(t) = f(t)$, получим зависимость P от двух функционалов –

$$\int_0^T f(t)dt \quad \text{и} \quad \int_0^T f^2(t)dt.$$

В любом случае, попытка найти max P по виду функции $f(t)$ приводит к задаче вида

$$\int_0^T f^2(t)dt + \kappa\int_0^T f(t)dt \Rightarrow \text{extr}\,, \tag{16}$$

где κ – неопределённый множитель Лагранжа. Приравнивая нулю вариацию от (16) по $f(t)$, получим, что $f(t)$ = const.

Таким образом,

$$f(t) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)} = C$$

или, в явном виде,

$$\frac{1}{\varphi(t)}\exp\left(-\mu t - \int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = C\,. \tag{17}$$

Переписывая его в виде

$$\frac{1}{\varphi(t)}\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = Ce^{\mu t}$$

и замечая, что $$\frac{1}{\varphi(t)}\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = -\left(\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right)\right)',$$

получим $$\left(\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right)\right)' = -Ce^{\mu t}\,.$$

Отсюда имеем

$$\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = -\frac{C}{\mu}e^{\mu t} + C_1\,.$$

Так как при $t = 0$ $\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)} = 0$, то

$$1 = -\frac{C}{\mu} + C_1\,, \quad C_1 = 1 + \frac{C}{\mu}\,,$$

и поэтому $$\exp\left(-\int_0^t \frac{dz}{\varphi(z)}\right) = \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu}e^{\mu t} + 1\,.$$

Логарифмируя это выражение и дифференцируя, получим, после некоторых упрощений

$$\varphi(t) = \frac{\tilde{C}e^{-\mu t} - 1}{\mu}\,.$$

Возьмем константу $\tilde{C}$ в виде $\tilde{C} = e^{\mu CT}$ с некоторым $C \geq 1$, тогда окончательно закон управления ценой примет вид

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)}\,, \quad \varphi(t) = \frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{\mu}\,. \tag{18}$$

Именно этот закон управления ценой и будет рассматриваться в дальнейшем. Заметим, что при $\mu \to 0$ $\varphi(t) \to CT - t$, то есть мы получаем тот вид $\varphi(t)$, который обеспечивал максимум прибыли при продаже скоропортящихся товаров в предыдущих разделах.

Найдём теперь выручку и прибыль при данном законе управления ценой в детерминированном случае. Вычисляя интегралы, получим

$$Q(t) = Q_0 \frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{e^{\mu CT} - 1}, \quad \int_0^T \frac{Q(t)}{\varphi(t)} dt = \frac{Q_0 \mu T}{e^{\mu CT} - 1}, \quad \int_0^T \frac{Q^2(t)}{\varphi^2(t)} dt = \frac{Q_0^2 \mu^2 T^2}{(e^{\mu CT} - 1)^2}.$$

Поэтому прибыль от продажи нашей партии товара равна

$$P = c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{Q_0 \mu T}{e^{\mu CT} - 1} - \frac{c_0}{\lambda_1 a_1} \frac{Q_0^2 \mu^2 T^2}{(e^{\mu CT} - 1)^2} - dQ_0. \tag{19}$$

При $C = 1$ это выражение совпадает с (5).

Отсюда находятся оптимальное значение

$$Q_0 = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu CT} - 1} - d \right] \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu CT} - 1)^2}{2\mu^2 T c_0} \tag{20}$$

и максимальное значение прибыли

$$P_{\max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \frac{\mu T}{e^{\mu CT} - 1} - d \right]^2 \frac{\lambda_1 a_1 (e^{\mu CT} - 1)^2}{4\mu^2 T c_0}, \tag{21}$$

которое при $C = 1$ совпадает с (9).

Однако в этом случае есть дополнительная возможность – провести оптимизацию и по параметру C. Обозначая комбинацию $e^{\mu Ct} - 1 = z$, получим

$$P_{\max} = \left[c_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \mu T z - d z^2 \right]^2 \frac{\lambda_1 a_1}{4\mu^2 T c_0},$$

и оптимальное значение z равно

$$z_{\text{opt}} = \frac{c_0 (1 + \lambda_0/\lambda_1) \mu T}{2d} = e^{\mu C_{\text{opt}} T} - 1.$$

Отсюда оптимальное значение C есть

$$C_{\text{opt}} = \frac{1}{\mu T} \ln\left(1 + \frac{c_0 (1 + \lambda_0/\lambda_1) \mu T}{d}\right). \tag{22}$$

Так как $C \geq 1$, то окончательно

$$C_{\text{opt}} = \max\left(1, \ \frac{1}{\mu T} \ln\left(1 + \frac{c_0 (1 + \lambda_0/\lambda_1) \mu T}{d}\right)\right). \tag{23}$$

2. Математическая модель порчи товара

Ниже предлагается одна из возможных математических моделей порчи товара.

Пусть товар состоит из отдельных элементов (например, картофель, фрукты и т.д.), которые могут испортиться в процессе хранения и которые при продаже необходимо выбрасывать.

Пусть в партии товара $Q(t)$ таких элементов. Представим себе, что на интервале $[t, \ t + \Delta t]$ с вероятностью $p = \mu \Delta t + o(\Delta t)$ каждый элемент может испортиться.

Обозначим через $\Delta Q(t)$ число испортившихся на этом интервале элементов. Тогда каждый элемент можно рассматривать как опыт в схеме Бернулли, так что $\Delta Q(t)$ подчиняется биномиальному распределению

$$P\{\Delta Q\} = C_Q^{\Delta Q} p^{\Delta Q} (1-p)^{Q-\Delta Q}.$$

Отсюда легко находятся статистические характеристики ΔQ. Используя свойства биномиального распределения, получим

$$M\{\Delta Q\} = Qp = Q\mu\Delta t + o(\Delta t),$$

и в диффузионном приближении коэффициент сноса процесса $Q(t)$ будет равен $\mu Q(t)$.

Относительно $M\{\Delta Q^2\}$ имеем

$$M\{\Delta Q^2\} = M\{\Delta Q\}^2 + D\{\Delta Q\} = Q^2\mu^2\Delta t^2 + Q\mu\Delta t(1-\mu\Delta t) + o(\mu\Delta t).$$

Поэтому в диффузионном приближении коэффициент диффузии процесса $Q(t)$ будет равен $\mu Q(t)$.

Ниже мы рассмотрим даже более общую модель, считая коэффициент диффузии процесса $Q(t)$ равным $\sigma^2 Q(t)$.

Таким образом, если рассматривать только процесс порчи товара, то его количество можно аппроксимировать диффузионным процессом

$$dQ(t) = -\mu Q(t)dt + \sqrt{\sigma^2 Q(t)}dw_t. \tag{24}$$

Если сюда добавить ещё процесс торговли, когда интенсивность потока покупок будет равна $\lambda(c(t))$, то диффузионная аппроксимация процесса $Q(t)$ примет вид

$$dQ(t) = -(\mu Q(t) + a_1\lambda(c))dt + \sqrt{\sigma^2 Q(t) + a_2\lambda(c)}dw_t. \tag{25}$$

Если используется управление ценой продажи по правилу

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)},$$

то диффузионная аппроксимация процесса $Q(t)$ примет вид

$$dQ(t) = -\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right)Q(t)dt + \sqrt{\left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right)Q(t)}dw_t. \tag{26}$$

Именно её мы и будем использовать в дальнейшем.

3. Первый и второй начальные моменты процесса *Q*(*t*)

Пусть $\bar{Q}(t) = M\{Q(t)\}$. Тогда, усредняя (26) и учитывая, что $M\{dw_t\} = 0$, получим

$$\frac{d\bar{Q}(t)}{dt} = -\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right)\bar{Q}(t). \tag{27}$$

Это уравнение было решено выше. Его решение имеет вид

$$\bar{Q}(t) = Q_0\frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{e^{\mu CT} - 1}. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь процесс $Q^2(t)$. Для функции $f(t, Q) = Q^2$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = 2Q; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = 2$$

и по формуле Ито получаем, что процесс $Q^2(t)$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dQ^2(t) = \left[-2\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right)Q^2(t) + \left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right)Q(t)\right]dt + \\ + \sqrt{2\left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right)Q^2(t)}dw_t . \tag{29}$$

Обозначим $Q_2(t) = M\{Q^2(t)\}$. Тогда, усредняя (29), получим следующее дифференциальное уравнение относительно $Q_2(t)$:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right)Q_2(t) + \left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right)\bar{Q}(t) , \tag{30}$$

которое надо решить с начальным условием $Q_2(0) = Q_0^2$ и с $\varphi(t) = \dfrac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{\mu}$.

Однородное уравнение, соответствующее (30), имеет вид

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} == -2\left(\mu + \frac{\mu}{e^{\mu(CT-t)} - 1}\right)Q_2(t) , \tag{31}$$

а его решение –

$$Q_2(t) = C\frac{(e^{\mu(CT-t)} - 1)^2}{(e^{\mu CT} - 1)^2} . \tag{32}$$

Будем искать общее решение уравнения (30) в виде

$$Q_2(t) = C(t)\frac{(e^{\mu(CT-t)} - 1)^2}{(e^{\mu CT} - 1)^2} . \tag{33}$$

Подстановка этого решения в (30) приводит к уравнению

$$C'(t)\frac{(e^{\mu(CT-t)} - 1)^2}{(e^{\mu CT} - 1)^2} = \sigma^2\bar{Q}(t) + \frac{a_2}{a_1}\frac{\bar{Q}(t)}{\varphi(t)} = \sigma^2 Q_0\frac{e^{\mu(CT-t)} - 1}{e^{\mu CT} - 1} + \frac{a_2}{a_1}Q_0\frac{\mu}{e^{\mu CT} - 1} ,$$

откуда следует, что

$$C'(t) = \sigma^2 Q_0\frac{e^{\mu CT} - 1}{e^{\mu(CT-t)} - 1} + \frac{a_2}{a_1}\mu Q_0\frac{e^{\mu CT} - 1}{(e^{\mu(CT-t)} - 1)^2} , \tag{34}$$

$$C(t) = \sigma^2 Q_0\int_0^t\frac{e^{\mu CT} - 1}{e^{\mu(CT-\tau)} - 1}d\tau + \frac{a_2}{a_1}\mu Q_0(e^{\mu CT} - 1)\int_0^t\frac{d\tau}{(e^{\mu(CT-\tau)} - 1)^2} . \tag{35}$$

Вычислим входящие сюда интегралы. Имеем

$$\int_0^t\frac{d\tau}{e^{\mu(CT-\tau)} - 1} = \int_0^t\frac{e^{\mu\tau}d\tau}{e^{\mu CT} - e^{\mu\tau}} = -\frac{1}{\mu}\ln(e^{\mu CT} - e^{\mu\tau})\Big|_0^t = \frac{1}{\mu}\ln\frac{e^{\mu CT} - 1}{e^{\mu CT} - e^{\mu t}} ,$$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(e^{\mu(CT-\tau)}-1)^2} = \int_0^t \frac{e^{2\mu\tau}d\tau}{(e^{\mu CT}-e^{\mu\tau})^2} = \frac{1}{\mu}\int_1^{e^{\mu t}} \frac{zdz}{(e^{\mu CT}-z)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\int_1^{e^{\mu t}} \frac{dz}{z-e^{\mu CT}} + \frac{e^{\mu CT}}{\mu}\int_1^{e^{\mu t}} \frac{dz}{(z-e^{\mu CT})^2} =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\ln\left|z-e^{\mu CT}\right|\Big|_1^{e^{\mu t}} - \frac{e^{\mu CT}}{\mu}\frac{1}{z-e^{\mu CT}}\Big|_1^{e^{\mu t}} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\ln\frac{e^{\mu CT}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}} + \frac{e^{\mu CT}}{\mu}\left(\frac{1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}} - \frac{1}{e^{\mu CT}-1}\right).$$

Итак,

$$C(t) = Q_0^2 + Q_0 f(t), \tag{36}$$

где
$$f(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\mu} + \frac{a_2}{a_1}\right)\left(e^{\mu CT}-1\right)\ln\frac{e^{\mu CT}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}} + \frac{a_2}{a_1}\frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}}e^{\mu CT}. \tag{37}$$

Окончательно

$$Q_2(t) = Q_0^2\left(\frac{e^{\mu(CT-t)}-1}{e^{\mu CT}-1}\right)^2 + Q_0\left(\frac{e^{\mu(CT-t)}-1}{e^{\mu CT}-1}\right)^2 f(t). \tag{38}$$

Первое слагаемое в этом выражении есть $\bar{Q}^2(t)$, а второе – дисперсия $Q(t)$. Легко проверить, что $D\{Q(0)\} = 0$ и $D\{Q(CT)\} = 0$, то есть продажа всего товара будет завершена в момент времени CT.

4. Оптимизация процесса продажи

Рассмотрим теперь вопрос о выборе оптимального объёма Q_0 партии товара, приобретаемой для продажи по оптовой цене d, и о выборе оптимального значения параметра C.

Пусть, как и ранее,

$$\lambda(c) = \lambda_0 - \lambda_1\frac{c-c_0}{c_0}.$$

Тогда равенство

$$a_1\lambda(c) = \frac{Q(t)}{\varphi(t)}$$

определяет зависимость цены от времени

$$c = c_0\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{Q(t)}{a_1\lambda_1\varphi(t)}\right).$$

Далее получаем

$$a_1 c\lambda(c) = c_0\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{Q(t)}{a_1\lambda_1\varphi(t)}\right)\frac{Q(t)}{\varphi(t)}.$$

Среднее значение выручки от продажи партии товара за время T

$$S=\int_0^T M\{a_1 c\lambda(c)\}dt=c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\int_0^T\frac{\bar{Q}(t)}{\varphi(t)}dt-\frac{c_0}{a_1\lambda_1}\int_0^T\frac{Q_2(t)}{\varphi^2(t)}dt\ .$$

Но
$$\frac{\bar{Q}(t)}{\varphi(t)}=\frac{\mu Q_0}{e^{\mu CT}-1},$$

так что
$$\int_0^T\frac{\bar{Q}(t)}{\varphi(t)}dt=\frac{\mu T Q_0}{e^{\mu CT}-1}.$$

Далее,
$$\frac{Q_2(t)}{\varphi^2(t)}=\frac{\mu^2 Q_0^2}{(e^{\mu CT}-1)^2}+\frac{\mu^2 Q_0}{(e^{\mu CT}-1)^2}f(t)\,,$$

так что
$$\int_0^T\frac{Q_2(t)}{\varphi^2(t)}dt=\frac{\mu^2 T Q_0^2}{(e^{\mu CT}-1)^2}+\frac{\mu^2 Q_0}{(e^{\mu CT}-1)^2}F(C)\,,$$

где
$$F(C)=\int_0^T f(t)dt\ .$$

Теперь среднее значение прибыли от продажи нашей партии товара можно записать в виде

$$P=S-dQ_0=\left(c_0\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\frac{\mu T}{e^{\mu CT}-1}-\frac{\mu^2 F(C)}{a_1\lambda_1(e^{\mu CT}-1)^2}-d\right)Q_0-\frac{c_0\mu^2 T}{a_1(e^{\mu CT}-1)^2}Q_0^2\,, \quad (39)$$

откуда из условия $\partial P/\partial Q_0=0$ и находится оптимальный объём партии товара

$$Q_0=\frac{a_1\lambda_1(e^{\mu CT}-1)^2}{2\mu^2 T}\left[\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\frac{\mu T}{e^{\mu CT}-1}-\frac{d}{c_0}-\frac{\mu^2 F(C)}{a_1\lambda_1(e^{\mu CT}-1)^2}\right] \quad (40)$$

и средняя максимальная прибыль

$$P_{\max}=\frac{a_1\lambda_1(e^{\mu CT}-1)^2}{4\mu^2 T}\left[\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\frac{\mu T}{e^{\mu CT}-1}-\frac{d}{c_0}-\frac{\mu^2 F(C)}{a_1\lambda_1(e^{\mu CT}-1)^2}\right]^2. \quad (41)$$

Вычислим теперь $F(C)$. Для него имеем

$$F(C)=\left(\frac{\sigma^2}{\mu}+\frac{a_2}{a_1}\right)(e^{\mu CT}-1)\int_0^T\ln\left(\frac{e^{\mu CT}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}}\right)dt+\frac{a_2}{a_1}e^{\mu CT}\int_0^T\frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}}dt\ . \quad (42)$$

Второй интеграл после замены переменных $e^{\mu t}=z$ легко вычисляется:

$$\int_0^T\frac{e^{\mu t}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}}dt=\frac{1}{\mu}\int_1^{e^{\mu T}}\frac{z-1}{(e^{\mu CT}-z)z}dz=\frac{1}{\mu}(e^{\mu CT}-1)\ln\left(\frac{e^{\mu CT}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu T}}\right)-CTe^{-\mu CT}\ .$$

Что касается интеграла

$$\int_0^T\ln(e^{\mu CT}-e^{\mu t})dt=\frac{1}{\mu}\int_1^{e^{\mu T}}\frac{\ln(e^{\mu CT}-z)}{z}dz\,,$$

то он через элементарные функции не выражается (он напоминает интегральный логарифм). Поэтому нахождение оптимального значения C возможно лишь численно.

5. Пуассоновское приближение

Рассмотрим теперь другое приближение для решения рассматриваемой проблемы, не являющееся диффузионным.

Обозначим через $Q(t)$ количество имеющегося товара в момент времени t. Тогда имеем соотношение

$$Q(t+\Delta t) = Q(t) - \Delta Q(t), \tag{43}$$

где $\Delta Q(t)$ есть убыль товара за время Δt. Её можно представить в виде

$$\Delta Q(t) = \Delta Q_{\text{исп}}(t) + \Delta Q_{\text{пр}}(t), \tag{44}$$

где $\Delta Q_{\text{исп}}(t)$ есть количество испортившегося товара за время Δt и $\Delta Q_{\text{пр}}(t)$ – количество проданного товара за тот же промежуток времени.

Относительно статистических свойств этих величин мы примем следующие предположения.

Будем считать, что $\Delta Q_{\text{исп}}(t)$ есть случайная величина с параметрами

$$M\{\Delta Q_{\text{исп}}(t)\} = \mu Q(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$M\{\Delta Q_{\text{исп}}(t)\} = \sigma^2 Q(t)\Delta t + o(\Delta t). \tag{45}$$

Относительно $\Delta Q_{\text{пр}}(t)$, учитывая пуассоновость потока покупок, мы примем следующую модель:

$$\Delta Q_{\text{пр}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } 1-\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t), \\ \xi, & \text{с вероятностью } \lambda(c)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \tag{46}$$

где ξ есть размер покупки. Будем считать, что ξ является случайной величиной с $M\{\xi\} = a_1$ и $M\{\xi^2\} = a_2$.

Выведем теперь уравнение для $M\{Q(t)\} = \bar{Q}(t)$. Усредняя $\Delta Q(t)$ по факту покупок, получаем

$$M\{\Delta Q(t)\} = \left[M\{\Delta Q_{\text{исп}}(t)\} + \xi\cdot\lambda(c)\Delta t\right] + o(\Delta t).$$

Усредняя эту величину по величине покупки, получим

$$M\{\Delta Q(t)\} = \left[\mu Q(t) + a_1\lambda(c)\right]\Delta t + o(\Delta t),$$

или, с учетом закона управления ценой,

$$M\{\Delta Q(t)\} = \left[\mu Q(t) + \frac{Q(t)}{\varphi(t)}\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Поэтому, усредняя (43), получим

$$M\{Q(t+\Delta t)\} = M\{Q(t)\} - \left[\mu M\{Q(t)\} + \frac{M\{Q(t)\}}{\varphi(t)}\right]\Delta t + o(\Delta t)$$

или

$$\bar{Q}(t+\Delta t) = \bar{Q}(t) - \left[\mu\bar{Q}(t) + \frac{\bar{Q}(t)}{\varphi(t)}\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение для $\bar{Q}(t)$:

$$\frac{d\bar{Q}(t)}{dt} = -\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right)\bar{Q}(t),$$

что совпадает с уравнением (27), полученным в диффузионном приближении.

Пусть теперь $Q_2(t) = M\{Q^2(t)\}$. Возводя (43) в квадрат, получим

$$Q^2(t+\Delta t) = Q^2(t) - 2Q(t)\Delta Q(t) + (\Delta Q(t))^2 . \qquad (47)$$

Усредним это выражение при фиксированном $Q(t)$. Тогда имеем

$$M\{\Delta Q(t)\} = (\mu Q(t) + a_1\lambda(c))\Delta t + o(\Delta t) = \left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right) Q(t)\Delta t + o(\Delta t) .$$

Далее,
$$(\Delta Q(t))^2 = \Delta Q^2_{\text{исп}} + 2\Delta Q_{\text{исп}}\Delta Q_{\text{пр}} + \Delta Q^2_{\text{пр}} ,$$

$$M\{\Delta Q^2_{\text{исп}}\} = \sigma^2 Q(t)\Delta t + o(\Delta t) ,$$

$$M\{\Delta Q_{\text{исп}}\} M\{\Delta Q_{\text{пр}}\} = o(\Delta t) ,$$

$$M\{\Delta Q^2_{\text{пр}}\} = M\{\xi^2\lambda(c)\Delta t + o(\Delta t)\} = \frac{a_2}{a_1}\frac{Q(t)}{\varphi(t)}\Delta t + o(\Delta t) .$$

Усредняя теперь (47) при фиксированном $Q(t)$, получим

$$M\{Q^2(t+\Delta t)\} = M\{Q^2(t)\} - 2\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right) Q^2(t)\Delta t + \left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right) Q(t)\Delta t + o(\Delta t) .$$

Наконец, после усреднения по $Q(t)$, имеем

$$Q_2(t+\Delta t) = Q_2(t) - 2\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right) Q_2(t)\Delta t + \left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right) \bar{Q}(t)\Delta t + o(\Delta t) ,$$

откуда получается дифференциальное уравнение для $Q_2(t)$:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = -2\left(\mu + \frac{1}{\varphi(t)}\right) Q_2(t) + \left(\sigma^2 + \frac{a_2}{a_1\varphi(t)}\right) \bar{Q}(t) . \qquad (48)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (30). Таким образом, рассматриваемое приближение даёт тот же самый результат, что и диффузионная аппроксимация.

6. Распределение вероятностей длительности продажи товара

Пусть функция $Q(t)$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dQ(t) = -\frac{Q(t)}{\varphi(t)} dt + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{Q(t)}{\varphi(t)}} dw_t . \qquad (49)$$

Рассмотрим функцию $f(Q,t) = e^{-pQ}$. Для неё

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial Q} = -pe^{-pQ} ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} = p^2 e^{-pQ} ,$$

и, согласно формуле Ито, эта функция удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению

$$d(e^{-pQ}) = \left(\frac{Q}{\varphi(t)} pe^{-pQ} + \frac{a_2}{2a_1}\frac{Q}{\varphi(t)} p^2 e^{-pQ}\right) dt - pe^{-pQ}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{Q}{\varphi(t)}} dw_t . \qquad (50)$$

Рассмотрим функцию $\Phi(p,t) = M\left\{e^{-pQ}\right\}$, которая, по смыслу, является преобразованием Лапласа от плотности вероятностей $p(Q, t)$ значений процесса $Q(t)$ в момент времени t. Тогда, как следует из (50), для неё имеет место уравнение

$$d_t\Phi(p,Q)=\left(\frac{p}{\varphi(t)}M\left\{Qe^{-pQ}\right\}+\frac{a_2}{2a_1}\frac{p^2}{\varphi(t)}M\left\{Qe^{-pQ}\right\}\right)dt\,. \qquad (51)$$

Учитывая, что
$$\frac{\partial\Phi(p,t)}{\partial p}=-M\left\{Qe^{-pQ}\right\},$$

уравнение (51) можно переписать в виде

$$d_t\Phi(p,Q)=-\left(\frac{p}{\varphi(t)}\frac{\partial\Phi(p,t)}{\partial p}+\frac{a_2}{2a_1}\frac{p^2}{\varphi(t)}\frac{\partial\Phi(p,t)}{\partial p}\right)dt\,,$$

или в такой форме
$$\varphi(t)\frac{\partial\Phi}{\partial t}+p\left(1+\frac{p}{\beta}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial p}=0\,, \qquad (52)$$

где $\beta=2a_1/a_2$.

Это уравнение является уравнением в частных производных первого порядка, которое решается методом характеристик. Уравнение для характеристик имеет вид

$$\frac{dt}{\varphi(t)}=\frac{dp}{p(1+p/\beta)}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\beta}\right)dp\,.$$

Интегрируя, получим

$$\int_0^t\frac{du}{\varphi(u)}=\ln p-\ln(p+\beta)-\ln C\,,$$

откуда
$$C=\frac{p\psi(t)}{p+\beta},\quad \psi(t)=\exp\left(-\int_0^t\frac{du}{\varphi(u)}\right).$$

Общее решение уравнения (52) имеет поэтому вид

$$\Phi(p,t)=\tilde{\varphi}\left(\frac{p\psi(t)}{p+\beta}\right).$$

Для нахождения функции $\tilde{\varphi}()$ учтём то, что в начальный момент времени $t=0$ $Q(0)=Q_0$, что соответствует тому, что $p(Q,0)=\delta(Q-Q_0)$. Преобразование Лапласа от этой функции имеет вид $\Phi(p,0)=e^{-pQ_0}$, и поэтому мы имеем соотношение

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{p}{p+\beta}\right)=e^{-pQ_0}\,.$$

Обозначая $\frac{p}{p+\beta}=z$, получим, что $p=\frac{\beta z}{1-z}$, и поэтому

$$\tilde{\varphi}(z)=\exp\left(-\frac{\beta z}{1-z}Q_0\right).$$

Тогда

$$\Phi(p,t)=\tilde{\varphi}\left(\frac{p\psi(t)}{p+\beta}\right)=\exp\left(-\beta Q_0\frac{\dfrac{p\psi(t)}{p+\beta}}{1-\dfrac{p\psi(t)}{p+\beta}}\right)=\exp\left(-\beta Q_0\frac{p\psi(t)}{p+\beta-p\psi(t)}\right). \qquad (52)$$

В этом выражении нас особенно интересует

$$\lim_{p\to\infty}\Phi(p,t)=\exp\left(-\beta Q_0\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)}\right),$$

так как в обратном преобразовании Лапласа именно этот сомножитель будет стоять при $\delta(Q)$. Это слагаемое соответствует тому, что в момент времени t будет иметь место соотношение $Q(t)=0$, то есть весь товар будет продан. Поэтому, если через τ обозначить время продажи всей партии товара, то можно написать, что

$$F_\tau(t)=P\{\tau<t\}=\exp\left(-\beta Q_0\frac{\psi(t)}{1-\psi(t)}\right). \tag{53}$$

Это и определяет функцию распределения длительности продажи товара.

Вернёмся теперь к рассматриваемой нами ситуации продажи портящегося товара. К сожалению, попытка провести такое же исследование не приводит к положительному результату, так как переменные p и t не разделяются и для характеристик получается уравнение Рикатти, которое в квадратурах не решается. Единственный вариант, который нам удалось рассмотреть, это вариант, когда верно соотношение $\sigma^2=a_2/a_1\,\mu$. В этом случае мы приходим к рассмотренной ситуации, когда

$$\frac{1}{\varphi(t)}=\mu+\frac{\mu}{e^{\mu(CT-t)}-1}.$$

Тогда мы имеем
$$\int_0^t\frac{du}{\varphi(u)}=\mu t+\mu\int_0^t\frac{dz}{e^{\mu(CT-z)}-1}.$$

Но
$$\mu\int_0^t\frac{dz}{e^{\mu(CT-z)}-1}=\mu\int_0^t\frac{e^{\mu z}dz}{e^{\mu CT}-e^{\mu z}}=\int_1^{e^{\mu t}}\frac{du}{e^{\mu CT}-u}=\ln\frac{e^{\mu CT}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu t}},$$

поэтому
$$\psi(t)=\frac{e^{\mu(CT-t)}-1}{e^{\mu CT}-1}.$$

Тогда окончательно для функции распределения длительности продажи получается следующее выражение:

$$F_\tau(t)=\exp\left(-\beta Q_0\frac{e^{\mu(CT-t)}-1}{e^{\mu CT}-e^{\mu(CT-t)}}\right). \tag{54}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанова Н.В.*, *Терпугов А.Ф.* Оптимальное управление ценой при продаже скоропортящегося товара. // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2007. Вып. 4(17). С. 35 – 39.
2. *Степанова Н.В.*, *Терпугов А.Ф.* Управление ценой при продаже скоропортящейся продукции // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 22 – 35.

Статья представлена кафедрой программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 февраля 2008 г.