УДК 621.391.1; 519.21

С.В. Лопухова

ИССЛЕДОВАНИЕ MMP-ПОТОКА АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ *m*-го ПОРЯДКА

В работе рассматривается марковски модулированный пуассоновский поток событий (MMP-поток). Выполнено исследование данного потока методом асимптотического анализа m-го порядка.

Ключевые слова: *MMP-поток, метод асимптотического анализа m-го порядка, асимптотика m-го порядка, аппроксимация m-го порядка.*

1. Описание и математическая модель

Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний $k = 1, 2,\ldots, K$ задана матрицей инфинитезимальных характеристик Q с элементами $q_{k_1k_2}$. Также задан набор неотрицательных чисел $\lambda_k \geq 0$. Обозначим $n(t)$ – число событий определяемого случайного потока, наступивших за время t, то есть на интервале $[0,t)$ [1].

Случайный поток однородных событий будем называть марковски модулированным пуассоновским потоком (MMP-потоком) [2], управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства

$$P\{n(t+\Delta t)=n+1|n(t)=n,k(t)=k_1\}=\lambda_{k_1}\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{n(t+\Delta t)>n+1|n(t)=n,k(t)=k_1\}=o(\Delta t).$$

Пусть в некоторый момент времени t_m цепь Маркова перешла в состояние k_1. В этом состоянии цепь будет находиться до момента t_{m+1}. Длина $(t_{m+1} - t_m)$ интервала постоянства состояния цепи Маркова распределена по экспоненциальному закону с параметром $(-q_{k_1k_1})$. В течение времени пребывания цепи Маркова в состоянии k_1 наступают события потока с интенсивностью λ_{k_1}. В момент времени t_{m+1} цепь Маркова перейдет в некоторое состояние k_2. Далее процедура повторяется. Эти состояния k_1, k_2 управляющей цепи Маркова будем также называть состояниями MMP-потока.

Очевидно, процесс $n(t)$ является немарковским, поэтому определим двумерный процесс $\{k(t),n(t)\}$, который является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем. Тогда для распределения вероятностей ее значений

$$P\{k(t)=k,n(t)=n\}=P(k,n,t) \tag{1}$$

нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t}=\sum_{\nu}P(\nu,n,t)q_{\nu k}-\lambda_k P(k,n,t)+\lambda_k P(k,n-1,t) \tag{2}$$

при заданном начальном условии

$$\begin{cases}P(k,0,0)=R(k),\\ P(k,n,0)=0, \quad n\geq 1,\end{cases} \tag{3}$$

где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова $k(t)$, определяемое однородной системой линейных алгебраических уравнений и условием нормировки

$$\begin{cases} \sum_{\nu} R(\nu) q_{\nu k} = 0, \\ \sum_{k} R(k) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим функции

$$H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t) = P\{k(t)=k\} M\left\{e^{jun(t)} / k(t)=k\right\}, \tag{5}$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Для этих функций из системы (2) можно записать

$$\frac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} = \sum_{\nu} H(\nu,u,t) q_{\nu k} + \left(e^{ju}-1\right)\lambda_k H(k,u,t). \tag{6}$$

Здесь решение $H(k,u,t)$ удовлетворяет начальному условию $H(k,u,0)=R(k)$.

Учитывая результаты, полученные в [3], найдем асимптотику более высокого порядка, полагая

$$H_{m-1}(k,u,t) = \exp\left(\frac{(ju)^{m-1}}{(m-1)!}\kappa_{m-1} t\right) H_m(k,u,t), \text{ где } m \ge 3. \tag{7}$$

2. Асимптотика *m*-го порядка

Пусть функция $H_{m-1}(k,u,t)$ является решением системы уравнений

$$\frac{\partial H_{m-1}(k,u,t)}{\partial t} = \sum_{\nu} H_{m-1}(\nu,u,t) q_{\nu k} + \left(\left(e^{ju}-1\right)\lambda_k - \sum_{i=1}^{m-2}\frac{(ju)^i}{i!}\kappa_i\right) H_{m-1}(k,u,t),$$

тогда для функций $H_m(k,u,t)$ с учетом (7) можно записать

$$\frac{\partial H_m(k,u,t)}{\partial t} = \sum_{\nu} H_m(\nu,u,t) q_{\nu k} + \left(\left(e^{ju}-1\right)\lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{(ju)^i}{i!}\kappa_i\right) H_m(k,u,t). \tag{8}$$

Обозначив $\varepsilon^m = \frac{1}{T}$, в системе (8) выполним замены

$$\varepsilon^m t = \tau,\ u = \varepsilon w,\ H_m(k,u,t) = F_m(k,w,\tau,\varepsilon), \tag{9}$$

получим

$$\varepsilon^m \frac{\partial F_m(k,w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} =$$

$$= \sum_{\nu} F_m(\nu,w,\tau,\varepsilon) q_{\nu k} + F_m(k,w,\tau,\varepsilon)\left((e^{jw\varepsilon}-1)\lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{(jw\varepsilon)^i}{i!}\kappa_i\right). \tag{10}$$

Теорема 1. Если существует предел $\lim_{\varepsilon\to 0} F_m(k,w,\tau,\varepsilon) = F_m(k,w,\tau)$, то

$$F_m(k,w,\tau) = R(k)\exp\left(\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m \tau\right), \tag{11}$$

где $R(k)$ определено выше, величина κ_m определяется равенством (17).

Доказательство.

Этап 1. Выполнив предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в системе (10), получим систему

$$\sum_{\nu} F_m(\nu, w, \tau) q_{\nu k} = 0,$$

решение которой можно записать в виде

$$F_m(k, w, \tau) = R(k)\Phi_m(w, \tau). \tag{12}$$

Этап 2. Решение $F_m(k, w, \tau, \varepsilon)$ системы (10) запишем в виде разложения

$$F_m(k, w, \tau, \varepsilon) = \Phi_m(w, \tau)\left\{R(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(k)\right\} + O\left(\varepsilon^{m-1}\right). \tag{13}$$

Тогда (10) примет вид

$$O\left(\varepsilon^m\right) = \sum_{\nu} F_m(\nu, w, \tau, \varepsilon) q_{\nu k} + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i)\right) F_m(k, w, \tau, \varepsilon).$$

Подставив в это равенство разложение (13), получим

$$O\left(\varepsilon^m\right) = \Phi_m(w, \tau)\left\{\sum_{\nu}\left(R(\nu) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(\nu)\right) q_{\nu k} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i)\right)\left(R(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(k)\right)\right\},$$

$$O\left(\varepsilon^n\right) = \sum_{\nu}\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(\nu) q_{\nu k} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i) R(k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(k) \sum_{s=1}^{m-2} \frac{(jw\varepsilon)^s}{s!} (\lambda_k - \kappa_s). \tag{14}$$

Найдя произведение двух указанных сумм

$$\sum_{i=1}^{m-2} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(k) \sum_{s=1}^{m-2} \frac{(jw\varepsilon)^s}{s!} (\lambda_k - \kappa_s) = \sum_{i=1}^{m-2}\sum_{s=1}^{m-2} \frac{(jw\varepsilon)^{i+s}}{i!s!} f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_s) =$$

$$= \sum_{l=2}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^l}{l!} \sum_{i=1}^{l-1} C_l^i f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_{l-i}) + o\left(\varepsilon^m\right),$$

равенство (14) запишем следующим образом:

$$O\left(\varepsilon^m\right) = \sum_{\nu}\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(\nu) q_{\nu k} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i) R(k) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^l}{l!} \sum_{i=1}^{l-1} C_l^i f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_{l-i}).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{\nu} f_2(\nu) q_{\nu k} + (\lambda_k - \kappa_1) R(k) = 0, \\ \sum_{\nu} f_m(\nu) q_{\nu k} + \sum_{i=1}^{m-2} C_{m-1}^i (\lambda_k - \kappa_{m-1-i}) f_{i+1}(k) + (\lambda_k - \kappa_{m-1}) R(k) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

рекуррентно определяющие все величины $f_2(k), f_3(k), ..., f_m(k)$, удовлетворяющие условиям $\sum_k f_i(k) = 0$ при i=2,3,…,m.

Матрица инфинитезимальных характеристик Q вырождена и для эргодической цепи Маркова $k(t)$ имеет ранг на единицу меньше своей размерности, поэтому для того, чтобы эти системы имели решения $f_m(k)$, необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \sum_k R(k)(\lambda_k - \kappa_1) = 0, \\ \sum_k \left(R(k)(\lambda_k - \kappa_m) + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_{m-i}) \right) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

которые определяют значения параметров $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_m$.

Этап 3. Для нахождения функции $\Phi_m(w,\tau)$ просуммируем все уравнения системы (10) по k, обозначив

$$\sum_k F_m(k,w,\tau,\varepsilon) = F_m(w,\tau,\varepsilon),$$

запишем

$$\varepsilon^m \frac{\partial F_m(k,w,\tau)}{\partial\tau} =$$

$$= \sum_k \left((e^{jw\varepsilon} - 1)\lambda_k - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} \kappa_i \right) F_m(k,w,\tau,\varepsilon) =$$

$$= \sum_k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i) + \frac{(jw\varepsilon)^m}{m!} \lambda_k \right) F_m(k,w,\tau,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right).$$

Подставляя в это равенство разложение (13), получим

$$\varepsilon^m \frac{\partial \Phi_m(w,\tau)}{\partial\tau} =$$

$$= \Phi_m(w,\tau) \sum_k \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} (\lambda_k - \kappa_i) + \frac{(jw\varepsilon)^m}{m!} \lambda_k \right) \left(R(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(jw\varepsilon)^i}{i!} f_{i+1}(k) \right) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right) =$$

$$= \Phi_m(w,\tau) \frac{(jw\varepsilon)^m}{m!} \sum_k \left(\lambda_k R(k) + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_{m-i}) \right) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right),$$

$$\frac{\partial \Phi_m(w,\tau)}{\partial\tau} = \Phi_m(w,\tau) \frac{(jw)^m}{m!} \sum_k \left(\lambda_k R(k) + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i f_{i+1}(k)(\lambda_k - \kappa_{m-i}) \right).$$

Полагая, что величины $f_i(k)$, $i = \overline{1, m-1}$ удовлетворяют условиям $\sum_k f_{i+1}(k) = 0$, обозначим

$$\begin{cases} \kappa_1 = \sum_k \lambda_k R(k), \\ \kappa_m = \kappa_1 + \sum_k \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i \lambda_k f_{i+1}(k). \end{cases} \tag{17}$$

Получим
$$\frac{\partial\Phi_m(w,\tau)}{\partial\tau}=\Phi_m(w,\tau)\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m .$$

Решение $\Phi_m(w,\tau)$, которое удовлетворяет начальному условию $\Phi_m(w,0)=1$, имеет вид
$$\Phi_m(w,\tau)=\exp\left(\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m\tau\right). \tag{18}$$

Подставляя (18) в (12), получим равенство (11).

Теорема доказана.

Следствие. В силу замены (9) имеет место равенство
$$H_m(k,u,t)=F_m(k,w,\tau,\varepsilon).$$

В теореме доказано, что выполняются равенства
$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_m(k,w,\tau,\varepsilon)=F_m(k,w,\tau)=R(k)\exp\left\{\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m\tau\right\}.$$

Выполнив в экспоненте обратные к (9) замены $w=\dfrac{u}{\varepsilon}$, $\tau=t\varepsilon^m$, получим равенство
$$\exp\left\{\frac{(jw)^m}{m!}\kappa_m\tau\right\}=\exp\left\{\frac{(ju)^m}{m!}\kappa_m t\right\}.$$

Используя записанные равенства, определим функции
$$h_m(k,u,t)=R(k)\exp\left\{\frac{(ju)^m}{m!}\kappa_m t\right\},$$

которые будем называть асимптотиками *m*-го порядка для допредельных функций $H_m(k,u,t)$ из равенства (7).

Так как $Me^{jun(t)}=\sum\limits_k H(k,u,t)$, то из равенства (7) получим
$$Me^{jun(t)}=e^{ju\kappa_1 t}\sum_k H_2(k,u,t)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(ju)^i}{i!}\kappa_i t\right\}\sum_k H_m(k,u,t).$$

Тогда, заменив допредельные функции $H_m(k,u,t)$ асимптотиками *m*-го порядка $h_m(k,u,t)$, определим функцию
$$h_m(u,t)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(ju)^i}{i!}\kappa_i t\right\}\sum_k h_m(k,u,t)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{(ju)^i}{i!}\kappa_i t\right\}, \tag{18}$$

которую будем называть асимптотикой *m*-го порядка для допредельной характеристической функции *n*(*t*) – числа событий, наступивших в ММР-потоке за время *t*.

Применяя асимптотику *m*-го порядка $h_m(u,t)$, аппроксимацию *m*-го порядка $P_m(n,t)$ допредельного распределения $P(n,t)$ запишем в виде равенства
$$P_m(n,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-jun}h_m(u,t)\,du ,$$

где $h_m(u,t)$ определяется (18).

Заключение

Наиболее принципиальной частью модификации метода асимптотического анализа [2] являются замены (7), позволяющие находить асимптотики $h_m(u,t)$ все более высоких порядков m.

Одним из основных результатов этой работы является тот факт, что асимптотика m-го порядка $h_m(u,t)$ для допредельной характеристической функции $Me^{jun(t)}$ имеет достаточно простой вид

$$h_m(u,t) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \frac{(ju)^i}{i!} \kappa_i t\right\},$$

и определяется лишь параметрами κ_i, $i = \overline{1,m}$, которые при $t = 1$ имеют смысл семиинвариантов числа событий, наступивших в MMP-потоке за единицу времени. При $t \neq 1$ асимптотические семиинварианты $\kappa_i t$ пропорциональны длине t интервала наступления событий в потоке. Показано, что параметры κ_i определяются равенствами (17), в которых величины $f_i(k)$ являются такими решениями систем (15), которые удовлетворяют условиям $\sum_k f_i(k) = 0$ для всех $i = 2, 3,\ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
2. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
3. *Лопухова С.В.*, *Назаров А.А.* Исследование МСМР-потока асимптотическим методом третьего порядка // Вестник КемГУ. Серия Математика. Вып. 4 (24). Кемерово, 2005. С. 218 – 227.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 февраля 2008 г.