ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2008 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(4)

УДК 519.7

Н.Г. Парватов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМАМИ ВЫРАЗИМОСТИ

В статье рассматриваются некоторые свойства операции замыкания в полной решётке, связанные с проблемой выразимости её элементов.

Ключевые слова: *полная решётка*, *проблема полноты*, *проблема выразимости*, *замыкание*.

Пусть M – полная решётка [2]. Иными словами, в множестве M задано отношение частичного порядка $\leq$ так, что в M для любого подмножества A существует точная верхняя грань (объединение) $\bigvee A$ и точная нижняя грань (пересечение) $\prod A$. Пусть также в M задана операция замыкания, то есть в M для любого элемента a определено его замыкание a' так, что $a \leq a'$, $a'' = a'$ и $a' \leq b'$ для любых a и b из M, таких, что $a \leq b$. Элементы, совпадающие со своими замыканиями, называются замкнутыми. *Проблема выразимости* элемента a в решётке M состоит в описании всевозможных таких элементов b, что $a \leq b'$. Данная проблема является обобщением *проблемы полноты* для элемента a (см. [1]), состоящей в описании всех таких элементов b решётки M, для которых имеет место равенство $b' = a'$. Данные проблемы возникают при изучении функциональных систем дискретных функций, когда M есть упорядоченная включением решётка функциональных подмножеств, в которой замкнутость понимается как замкнутость относительно некоторого набора операций суперпозиции, а неравенство $a \leq b'$ означает, что все функции в множестве a можно выразить через функции множества b посредством заданных операций суперпозиции. Данные проблемы имеют смысл и в более общей ситуации, когда M есть упорядоченная включением решётка подмножеств некоторой алгебры, всевозможные подалгебры которой составляют множество замкнутых элементов, а неравенство $a \leq b'$ означает, что все элементы множества a можно выразить термами, в которых функциональные символы интерпретируются как основные операции данной алгебры, а предметные переменные принимают значения в множестве b. Естественным средством решения задачи выразимости элемента a в решётке M является указание некоторого такого множества S замкнутых элементов из M, что выполнение неравенства $a \leq b'$ равносильно отсутствию в S элемента c, удовлетворяющего неравенству $b \leq c$. Такое множество S станем называть далее *нижней окрестностью* элемента a в решётке M. Обозначим через $S(a)$ множество всех максимальных элементов среди тех элементов b, для которых не выполняется неравенство $a \leq b'$. Ясно, что элементы множества $S(a)$ замкнуты, а само это множество включено в любую нижнюю окрестность элемента a. Поэтому, если это множество само является нижней окрестностью элемента a, то оно является наименьшей по включению нижней окрестностью данного элемента. Отсюда следует, что если элемент a обладает хотя бы одной конечной нижней окрестностью, то множество $S(a)$ является конечной нижней окрестностью этого элемента, причём наименьшей по включению.

В данной статье рассматриваются условия, при которых некоторые элементы решётки M обладают конечными нижними окрестностями. Также изучается возможность сведения проблемы выразимости элемента a в решётке M к ряду аналогичных проблем для некоторых элементов b, таких, что $b' < a'$. В связи с этим для замкнутых элементов в M вводятся в рассмотрение свойства компактности и финитарности. Показывается, что данные свойства представляют интерес в связи с рассматриваемыми задачами. В частности, устанавливается возможность сведения проблемы выразимости элемента $\vee A$, где A – произвольное множество компактных элементов решётки M, к ряду проблем выразимости всевозможных элементов a из A. Отдельно рассматривается случай, когда M есть решётка всех подмножеств некоторого множества P, упорядоченных отношением включения. Несложно понять, что в этом случае имеющие конечную нижнюю окрестность элементы из M конечно порождены (то есть являются замыканиями конечных совокупностей элементов из P). В статье же показывается, что замыкание в M, при котором все конечно-порождённые элементы обладают конечными нижними окрестностями, обязано быть финитарным в смысле [1,3] (точнее в [3] используется оборот «of finite character»). Иначе говоря, на множестве P в этом случае можно определить структуру универсальной алгебры так, чтобы замкнутыми элементами M оказались исключительно всевозможные подалгебры этой алгебры.

1. Компактные элементы

Для элемента a (не обязательно замкнутого) всякий элемент b, такой, что $a \leq b'$, а также всякое множество B элементов из M, такое, что $a \leq (\vee B)'$, будем называть *a-мажорирующим*. Ясно, что понятия a- и a'-мажорирующих множеств совпадают. Множество элементов из M назовём *цепью*, если для любых двух элементов a и b из этого множества выполняется хотя бы одно неравенство $a \leq b$ или $b \leq a$. Элемент a будем называть *компактным*, если всякая a-мажорирующая цепь замкнутых элементов содержит a-мажорирующий элемент. Компактные элементы представляют интерес в связи с проблемой выразимости, поскольку имеет место

Теорема 1. Для любого компактного элемента a множество $S(a)$ является его нижней окрестностью, очевидно наименьшей по включению. Если A – система компактных элементов, то множество $S(A)$, определённое как $S(A) = \cup S(a)$, где объединение $\cup$ берётся по всем элементам a из A, является нижней окрестностью для элемента $(\vee A)'$.

Доказательство первого предложения данной леммы следует из леммы Цорна [2], условиям которой в силу компактности элемента a удовлетворяет упорядоченное отношением $\leq$ множество всех замкнутых элементов b из M, для которых не выполняется неравенство $a \leq b'$. Для доказательства второго предложения заметим, что с одной стороны элементы в $S(A)$ не являются $(\vee A)$-мажорирующими. С другой стороны, любой элемент b, который не является $(\vee A)$-мажорирующим, не является a-мажорирующим для некоторого a из A. Это следует из свойств операции объединения в полной решётке. Тогда в силу доказанного в первом предложении имеет место неравенство $b \leq c$ для некоторого c из $S(a)$. Поскольку множество $S(a)$ включено в множество $S(A)$, последнее является нижней окрестностью элемента $\vee A$. Теорема доказана.

Доказанная теорема для любого множества A компактных элементов позволяет сводить решение проблемы выразимости элемента $(\vee A)'$ к решению ряда проблем выразимости элементов a из A. Именно в соответствии с доказанной теоремой, решив проблему выразимости для всевозможных элементов a из множества A и найдя для них наименьшие нижние окрестности $S(a)$, несложно получить нижнюю окрестность $S(A)$ для элемента $\vee A$, возможно уже не наименьшую.

2. Финитарные элементы

Систему A элементов из M назовём *направленной вверх*, если в ней для любых двух элементов a и b найдется третий элемент c, удовлетворяющий неравенствам $a \leq c$ и $b \leq c$. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. В полной решётке с операцией замыкания для элемента a следующие условия равносильны:

(1) всякое a-мажорирующее множество содержит конечное a-мажорирующее подмножество;

(2) всякое a-мажорирующее направленное вверх множество замкнутых элементов содержит a-мажорирующий элемент.

Доказательство. Пусть имеет место первое условие и A – a-мажорирующее направленное вверх множество замкнутых элементов. В силу первого условия имеется конечное a-мажорирующее подмножество B в множестве A, такое, что $a \leq (\vee B)'$. В силу конечности множества B и направленности вверх множества A в последнем имеется такой элемент b, что $(\vee B) \leq b'$. Из записанных неравенств следует, что элемент b является a-мажорирующим. Следовательно, имеет место второе условие. Таким образом, из первого условия следует второе. Пусть теперь имеет место второе условие и A – некоторое a-мажорирующее множество. Пусть также множество B состоит из замыканий всевозможных конечных объединений элементов из A. Ясно, что множество B направленно вверх и является a-мажорирующим. По второму условию некоторый его элемент b является a-мажорирующим. Следовательно, имеет место первое условие. Лемма доказана.

Элемент a, удовлетворяющий условиям леммы 6, назовём *финитарным*. Определение финитарного элемента формально более сильное, чем определение компактного элемента. Несмотря на это, в некоторых рассмотренных далее случаях данные понятия совпадают. Следующая теорема показывает важность понятий компактности и финитарности в связи с рассматриваемыми проблемами.

Теорема 2. Пусть M – полная решётка с операцией замыкания и для элемента a из M множество $S(a)$ конечное. Тогда следующие условия равносильны:

(1) элемент a финитарен;

(2) элемент a компактен;

(3) элемент a имеет конечную нижнюю окрестность.

Доказательство. Очевидно, что из первого условия следует второе. Из второго условия третье следует по теореме 1. Докажем, что из третьего условия следует первое. Пусть выполняется третье условие, тогда множество $S(a)$ является конечной нижней окрестностью элемента a. Пусть также A – a-мажорирующая направленная вверх система замкнутых элементов. В этом случае в силу свойства a-порождаемости множества A для любого элемента b из $S(a)$ найдется такой элемент $c(b)$ в A, для которого не имеет место неравенство $c(b) \leq b$ (в противном случае легко получить противоречие). Но тогда в силу конечности множества $S(a)$ и верхней направленности множества A в последнем найдётся элемент c, обладающий свойством $\vee c(b) \leq c$, где объединение $\vee$ берётся по всем b из $S(a)$. Так как неравенство $c \leq b$ не имеет места для любого элемента b из множества $S(a)$, являющегося нижней окрестностью элемента a, то элемент c является a-мажорирующим. Показано, что имеет место первое условие. Теорема доказана.

Поскольку множество $S(a)$ является конечной нижней окрестностью в случае, когда элемент a обладает хотя бы одной конечной нижней окрестностью, имеет место

Следствие 1. Пусть M – полная решётка с операцией замыкания. Тогда для любого элемента a из M следующие условия равносильны:

(1) элемент a финитарен и множество $S(a)$ конечное;

(2) элемент a компактен и множество $S(a)$ конечное;

(3) элемент a обладает в M конечной нижней окрестностью.

Понятие замыкания, заданного в полной решётке M, является довольно общим. Очень часто приходится рассматривать замыкания, заданные в множестве M, являющемся полной решёткой упорядоченных включением всевозможных подмножеств некоторого множества P, в которой объединение и пересечение совпадают с одноимёнными теоретико-множественными операциями. В дальнейшем будем иметь в виду в основном именно этот случай. Читатель без труда проверит, что в этом случае финитарность элемента a из M можно определить следующим условием: из всякого a-мажорирующего подмножества множества P можно выделить конечную a-мажорирующую подсистему. Имеет место

Теорема 3. Пусть M – полная решётка всех подмножеств счётного множества P с операцией замыкания. Тогда в M финитарность любого элемента равносильна его компактности.

Доказательство. Пусть a – компактный элемент в M и $\{p1, p2, ...\}$ – a-мажорирующее подмножество множества P. Рассмотрим в решётке M элементы $a1 = \{p1\}'$, $a2 = \{p1, p2\}'$, ... Ясно, что данные элементы составляют a-мажорирующую цепь. По определению свойства компактности, некоторый из этих элементов сам является a-мажорирующим. По замечанию, сделанному перед формулировкой теоремы, элемент a – финитарный. Поскольку из финитарности легко следует компактность, теорема доказана.

3. Компактные и финитарные замыкания

В данном разделе продолжим рассматривать замыкание в полной решётке M, являющейся полной решёткой всех подмножеств множества P. В этом случае замкнутый элемент a из M будем называть *конечно-порождённым*, если он является замыканием конечного множества элементов из P. Имеет место

Лемма 2. В полной решётке всех подмножеств некоторого множества с операцией замыкания всякий замкнутый элемент, имеющий конечную нижнюю окрестность, конечно порождён.

Доказательство. Если S – конечная нижняя окрестность элемента c' и c – некоторое множество элементов из P, то для каждого элемента b из S в множестве c найдётся элемент $c(b)$, не принадлежащий множеству b. Ясно, что замыкание множества всех таких элементов $c(b)$ совпадает с a. Поскольку элементов $c(b)$ конечное число, лемма доказана.

В связи с доказанной леммой и в связи с доказанными ранее утверждениями представляют интерес такие замыкания, при которых либо все конечно-порождённые элементы компактны, либо все они финитарны, либо все они имеют конечные нижние окрестности. Данные типы замыканий будут рассмотрены далее.

Лемма 3. Пусть M – полная решётка всевозможных подмножеств множества P с операцией замыкания. Тогда следующие условия равносильны:

(1) всякий конечно-порождённый элемент в M компактен;

(2) для любого элемента p из P элемент $\{p\}$ компактен в M;

(3) объединение любой цепи замкнутых элементов в M замкнуто.

Доказательство. Из первого условия второе следует очевидным образом. Предположим, что имеет место второе условие и A – цепь замкнутых элементов из M. Очевидно, что $\vee A \leq (\vee A)'$. С другой стороны, для любого элемента p из множества $(\vee A)'$ множество $\vee A$ $\{p\}$-мажорирующее. Отсюда по второму условию некоторый элемент b из A является $\{p\}$-мажорирующим, то есть $\{p\} \leq b'$. Поскольку элемент b замкнут и $b = b'$, элемент p принадлежит множеству $\vee A$. Тем самым доказано равенство $(\vee A)' = \vee A$, и из второго условия следует третье. Пусть, наконец, имеет место третье условие и b – конечное множество элементов из P. Пусть также A – b-мажорирующая цепь замкнутых элементов из M. Тогда, используя третье условие, получаем $b \leq (\vee A)' = \vee A$. В силу конечности множества b и линейной упорядоченности множества A для некоторого элемента $b1$ из A верно $b \leq b1$, а в силу замкнутости элемента $b1$ выполняется $b' \leq b1$. Элемент b' компактен. Лемма доказана.

Замыкание, обладающее свойствами из леммы 3, станем называть *компактным*. Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4. Пусть M – полная решётка всевозможных подмножеств множества P с операцией замыкания. Тогда следующие условия равносильны:

(1) всякий конечно порождённый элемент в M финитарен;

(2) для любого элемента p из P элемент $\{p\}$ финитарен в M;

(3) объединение направленной вверх системы замкнутых элементов из M замкнуто.

Замыкание, удовлетворяющее условиям из леммы 4, называют *финитарным*. В [3] было показано, что финитарность замыкания, заданного в решётке M всех подмножеств множества P, равносильна возможности определить на множестве P универсальную алгебру так, чтобы её подалгебры и только они были бы замкнуты.

Из теоремы 3 получаем

Следствие 2. Пусть M – полная решётка всех подмножеств некоторого счётного множества с операцией замыкания. Тогда замыкание в M финитарно, если и только если оно компактно.

А из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 3. Пусть M – решётка всех подмножеств множества P с операцией замыкания. Тогда следующие условия равносильны:

(1) в M каждый конечно-порождённый элемент имеет конечную нижнюю окрестность;

(2) замыкание компактно в M и для каждого конечно-порождённого элемента a из M множество $S(a)$ конечно;

(3) замыкание компактно в M и для любого элемента p из P множество $S(\{p\})$ конечно;

(4) замыкание финитарно в M и для каждого конечно-порождённого элемента a из M множество $S(a)$ конечно;

(5) замыкание финитарно в M и для любого элемента p из P множество $S(\{p\})$ конечно;

В частности, имеет место

Следствие 4. Если M – решётка всех подмножеств некоторого множества с операцией замыкания и в M все конечно-порождённые элементы имеют конечные нижние окрестности, то замыкание в M финитарно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов А.В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи матем. наук. 1961. Т. XVI. № 2 (98). С. 201 – 202.
2. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре: Учебник. СПб.: Лань, 2005. 560 с.
3. *Birkhoff G.*, *Frink O.* Representations of lattices by sets // Transactions on American Mathematical Society. 1948. V. 64. P. 299 – 316.

Статья представлена кафедрой защиты информации и криптографии факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в редакцию 15 марта 2008 г.