ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(5)

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.865

Н.С. Демин, В.В. Толстобоков

ОПЦИОНЫ НА ДИФФУЗИОННОМ (*B*, *P*)-РЫНКЕ ОБЛИГАЦИЙ В СЛУЧАЕ HJM-МОДЕЛИ

На основе прямого подхода осуществлен расчет стоимости опциона, портфеля и капитала стандартного европейского опциона купли и продажи для непрерывного (*B*, *P*)-рынка облигаций.

Ключевые слова: *опцион*, *облигация*, *хеджирование*, *капитал*, *портфель.*

Опцион на финансовых рынках является одной из наиболее распространенных вторичных (производных) ценных бумаг, поскольку дает право, а не обязанность предъявить его к исполнению [1 – 5]. Покупатель опциона приобретает право покупки или продажи оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец опциона (эмитент, инвестор) за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование владельца опциона при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли (call option), а во втором – опцион продажи (put option). Если платежное обязательство характеризуется только ценой базисного актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения, то такие опционы являются стандартными.

Теория опционов достаточно развита для случая, когда в качестве базисного актива используется рисковый актив типа акции, математическая модель которого в виде некоторого случайного процесса (например, геометрического или экономического винеровского процесса) полностью определяется собственными параметрами (например, коэффициентами роста или доходности и изменчивости или волатильности). Когда в качестве базисного актива используются облигации, то ситуация оказывается более сложной, так как значение их стоимости в момент времени t зависит также от значения терминального момента T (момента погашения облигации), в который по этой облигации выплачивается некоторая фиксированная стоимость (например, для определённости равная единице) и от значения некоторого процесса r_t, определяющего текущую процентную ставку. Простейшим примером облигации является банковский счет с постоянной или переменной, но детерминированной процентной ставкой r_t, стоимость которого в момент времени t определяется формулой

$$B_t(T) = \exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\}, 0 \le t \le T, \quad (1)$$

которой соответствует два дифференциальных уравнения (прямое и обратное):

$$d_T B_t(T) = -r_T B_t(T) dT; \quad (2)$$

$$d_t B_t(T) = r_t B_t(T) dt. \quad (3)$$

Согласно (1), покупатель данной облигации, желающий получить в момент времени T сумму, равную единице, при покупке в момент времени t должен заплатить величину $P_t(T)$. В общем случае r_t является случайным процессом, что определяет $P_t(T)$ так же, как случайный процесс.

В данной работе исследуются стандартные опционы купли и продажи с фиксированной ценой реализации, являющиеся аналогом стандартных опционов на рынке акций [1 – 3].

Используемые обозначения: $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\boldsymbol{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{b\, D\}$ – нормальная (гауссовская) плотность с параметрами b и D;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(z) dz; \tag{4}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

1. Постановка задачи

В теории облигаций используются два основных подхода к заданию стоимости облигации – опосредованный и прямой [2]. В случае опосредованного подхода стоимость облигации определяется через краткосрочную процентную ставку, а в случае прямого, известного как модель Хиса – Джерроу – Мортона (HJM-модель) [6], через форвардную процентную ставку. В данной работе используется прямой подход как более общий, поскольку краткосрочная ставка определяется как предельное значение форвардной ставки.

Рассмотрение задачи ведется на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$ [2, 3]. Следуя [2, 3, 7], введем следующие характеристики (B, P)-рынка облигаций. Стоимость $P_t(T^1)$ в момент времени t бескупонной облигации со сроком погашения T^1 определяется формулой

$$P_t\left(T^1\right) = \exp\left\{-\int\limits_{t}^{T^1} f_t(s) ds\right\}, \; 0 < P_t(T^1) \leq 1, \tag{5}$$

где форвардная процентная ставка $f_t(T^1)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$d_t f_t(T^1) = \alpha_t(T^1)dt + \sigma_t(T^1)dw_t, \tag{6}$$

w_t – винеровский процесс. Стоимость $B(t)$ в момент времени t банковского счета определяется формулой

$$B(t) = \exp\left\{\int\limits_{0}^{t} r(s) ds\right\}, \tag{7}$$

где $r(t) = f_t(t)$ является краткосрочной процентной ставкой.

Утверждение 1. Если форвардная ставка $f_t(T^1)$ подчиняется уравнению (6), то процесс $P_t(T^1)$ цены облигации определяется уравнением

$$dP_t\left(T^1\right) = P_t\left(T^1\right)\left[r(t) + b_t\left(T^1\right) + \frac{1}{2}a_t^2\left(T^1\right)\right]dt + P_t\left(T^1\right)a_t\left(T^1\right)dw_t, \tag{8}$$

где

$$b_t\left(T^1\right) = -\int\limits_{t}^{T^1} \alpha_t(s) ds, \quad a_t\left(T^1\right) = -\int\limits_{t}^{T^1} \sigma_t(s) ds. \tag{9}$$

Данное утверждение следует из [7] (Предложение 2.3).

Утверждение 2. Процесс $P_t(T^1)$ имеет эквивалентное (8) представление в виде уравнения

$$dP_t\left(T^1\right) = P_t\left(T^1\right) r(t)\, dt + P_t\left(T^1\right) a_t\left(T^1\right) dw_t^* \tag{10}$$

с винеровским процессом

$$w_t^* = w_t - \int_0^t \xi_s\left(T^1\right) ds \tag{11}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}^*$, такой, что

$$dP_t^* = Z_t(T^1) dP_t, \tag{12}$$

где
$$Z_t\left(T^1\right) = \exp\left\{\int_0^t \xi_s\left(T^1\right) dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \xi_s^2\left(T^1\right) ds\right\}, \tag{13}$$

а функция $\xi_t(T^1)$ такая, что

$$b_t\left(T^1\right) + \frac{1}{2} a_t^2\left(T^1\right) + a_t\left(T^1\right) \xi_t\left(T^1\right) = 0\,. \tag{14}$$

Действительно, так как $E\{Z_t(T^1)\} = 1$, то сформулированное свойство для процесса w_t^* следует из теоремы Гирсанова [2, 3], а уравнение (10) следует в результате использования (11), (14) в (8).

Утверждение 3. Для двух моментов времени τ и t, таких, что $\tau < t$, значения $P_\tau(T^1)$ и $P_t(T^1)$ связаны соотношением

$$P_t\left(T^1\right) = P_\tau\left(T^1\right) B^{-1}(\tau) B(t)\, \varepsilon\left\{\int_\tau^t a_s\left(T^1\right) dw_s^*\right\}, \tag{15}$$

где
$$\varepsilon\left\{\int_\tau^t a_s\left(T^1\right) dw_s^*\right\} = \exp\left\{\int_\tau^t a_s\left(T^1\right) dw_s^* - \frac{1}{2}\int_\tau^t a_s^2\left(T^1\right) ds\right\} \tag{16}$$

есть стохастическая экспонента относительно $\boldsymbol{P}^*$ [2, 3], т. е.

$$E^*\left\{\varepsilon\left\{\int_\tau^t a_s\left(T^1\right) dw_s^*\right\}\right\} = 1, \tag{17}$$

а E^* – усреднение по мере $\boldsymbol{P}^*$.

Формула (15) следует из (10) в результате применения формулы Ито к процессу $\widetilde{P}_t\left(T^1\right) = \ln\left\{P_t\left(T^1\right)\right\}$ с учетом (7), а свойство (17) следует непосредственно из (16).

Из (15) при $\tau = 0$ следует, что процесс $\overline{P}_t\left(T^1\right) = P_t\left(T^1\right) / B(t)$, являющийся дисконтированной относительно банковского счета ценой облигации, определяется формулой

$$\overline{P}_t\left(T^1\right) = P_0\left(T^1\right) \varepsilon\left\{\int_0^t a_s\left(T^1\right) dw_s^*\right\}, \tag{18}$$

т.е. является мартингалом относительно меры $\boldsymbol{P}^*$ [2, 3]. Таким образом, мера $\boldsymbol{P}^*$ является для рассматриваемого (B, P)-рынка рискнейтральной (мартингальной), а сам рынок – безарбитражным [1 – 3].

Инвестор в момент времени t формирует капитал

$$X_t = \beta_t B(t) + \gamma_t P_t(T^1), \quad t \in [0,T], T < T^1, \tag{19}$$

состоящий из банковского счета B и бескупонной облигации $P(T^1)$ со сроком погашения T^1. Задача инвестирования на таком (B, P)-рынке заключается в следующем: сформировать портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$ таким образом, чтобы эволюция капитала X_t^* в соответствии с (19) обеспечила в момент $T < T^1$ выполнение платежного обязательства

$$X_T^* = f_T, \tag{20}$$

где $f_T \geq 0$ – платежная функция, T – фиксированный момент исполнения опциона, то есть рассматриваются опционы европейского типа [1 – 3].

В данной работе исследуется проблема хеджирования для опционов купли и продажи с платежными функциями соответственно вида (a^+=max$\{a;0\}$)

$$f_T^c = \left(P_T(T^1) - KB(T)\right)^+ = B(T)\left(B^{-1}(T)P_T(T^1) - K\right)^+; \tag{21}$$

$$f_T^p = \left(KB(T) - P_T(T^1)\right)^+ = B(T)\left(K - B^{-1}(T)P_T(T^1)\right)^+. \tag{22}$$

Согласно платежному обязательству (21), если дисконтированное значение стоимости облигации $B^{-1}(T)P_T(T^1)$ превысит уровень K, то покупатель опциона предъявляет его к реализации и получает выплату в размере $B(T)(B^{-1}(T)P_T(T^1) - K)$, т.е. покупает облигацию по оговоренной цене $KB(T)$ и продает по рыночной цене $P_T(T^1)$. Согласно платежному обязательству (22), если дисконтированное значение стоимости облигации $B^{-1}(T)P_T(T^1)$ меньше уровня K, то покупатель опциона предъявляет его к реализации и получает выплату в размере $B(T)(K - B^{-1}(T)P_T(T^1))$, т. е. продает облигацию по оговоренной цене $KB(T)$ и покупает по рыночной цене $P_T(T^1)$.

Замечание 1. То, что в платёжных обязательствах (21), (22) используется дисконтированная величина $B^{-1}(T)P_T(T^1)$отражает желание инвестора учесть инфляцию и сравнивать величины в единицах банковского счёта, т. е. в реальном, а не в номинальном выражении.

Структура статьи следующая. В п. 2 вынесены основные результаты для опционов купли и продажи, для которых получены формулы, определяющие цены опционов, а также хеджирующие стратегии и соответствующие им капиталы, обеспечивающие выполнение платежных обязательств. В п. 3 приводятся свойства решения. Доказательства вынесены в Приложение.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть

$$d_+^c(t) = \frac{\ln\left[\dfrac{P_t(T^1)}{KB(t)}\right] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}, \quad d_-^c(t) = \frac{\ln\left[\dfrac{P_t(T^1)}{KB(t)}\right] - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}, \tag{23}$$

а d_+^c, d_-^c определяются (23) при $t = 0$. Тогда в случае опциона купли стоимость опциона C_T^c, капитал X_t^c и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^c = (\beta_t^c, \gamma_t^c)$ определяются формулами

$$C_T^c = P_0(T^1)\Phi(d_+^c) - K\Phi(d_-^c),$$

$$X_t^c = P_t(T^1)\Phi(d_+^c(t)) - KB(t)\Phi(d_-^c(t)), \quad (24)$$

$$\gamma_t^c = \Phi(d^c{}_+(t)), \beta_t^c = -K\Phi(d_-^c(t)).$$

Теорема 2. Пусть

$$d_+^p(t) = \frac{\ln\left[\dfrac{KB(t)}{P_t(T^1)}\right] + \dfrac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}, \quad d_-^p(t) = \frac{\ln\left[\dfrac{KB(t)}{P_t(T^1)}\right] - \dfrac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}, \quad (25)$$

а d_+^p, d_-^p определяются (25) при $t = 0$. Тогда в случае опциона продажи стоимость опциона C_T^p, капитал X_t^p и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^p = (\beta_t^p, \gamma_t^p)$ определяются формулами

$$C_T^p = K\Phi(d_+^p) - P_0(T^1)\Phi(d_-^P),.$$

$$X_t^p = KB(t)\Phi(d_+^p(t)) - P_t(T^1)\Phi(d_-^p(t)), \quad (26)$$

$$\gamma_t^p = -\Phi(d_-^p(t)), \quad \beta_t^p = K\Phi(d_+^p(t)).$$

3. Свойства решения

Утверждение 4. Портфели $\pi_t^c = (\beta_t^c, \gamma_t^c)$ и $\pi_t^p = (\beta_t^p, \gamma_t^p)$ обладают свойствами

$$\gamma_t^c > 0, \ \beta_t^c < 0; \quad (27)$$

$$\gamma_t^p < 0, \ \beta_t^p > 0. \quad (28)$$

Утверждение 5. Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимости стоимостей опционов от цены исполнения опциона, определяются формулами

$$\frac{\partial C_T^c}{\partial K} = -\Phi(d_-^c), \frac{\partial C_T^p}{\partial K} = \Phi(d_+^p) \quad (29)$$

и при этом

$$\frac{\partial C_T^c}{\partial K} < 0, \quad \frac{\partial C_T^p}{\partial K} > 0, \quad (30)$$

т.е. по K опционы купли и продажи являются соответственно убывающей и возрастающей функциями.

Свойства (27), (28) следуют непосредственно из (24), (26). Формулы (29) следуют в результате дифференцирования C_T^c и C_T^p, определяемых формулами (24) и (26) по K, а свойства (30) следуют непосредственно из (29).

Замечание 2. Структура формул (24), (26) для C_T^c и C_T^p совпадает со структурой соответствующих формул (формулы (1), (6), с. 975 – 976) из [2], которые получены на основе опосредованного подхода, когда в качестве модели краткосрочной процентной ставки используется модель Халла – Уайта [1, 9], а платежные функции имеют вид $\widetilde{f}_t^c = \left(P_T(T^1) - K\right)^+$ и $\widetilde{f}_t^p = \left(K - P_T(T^1)\right)^+$ и отличаются от функций (21) и (22) отсутствием дисконтирования на банковский счет.

Приведем результаты для двух широко используемых моделей цен облигаций [1 – 3, 8, 9]. Для модели Хо – Ли функция $a_s(T^1)$ представляется линейной функцией от времени, оставшегося до погашения облигации, вида

$$a_s(T^1) = \delta\left(T^1 - s\right), \delta > 0\,, \tag{31}$$

а для модели Васичека

$$a_s(T^1) = \frac{\delta}{\alpha}\left[1 - \exp\left\{-\alpha\left(T^1 - s\right)\right\}\right], \delta > 0, \alpha > 0\,, \tag{32}$$

Тогда для модели Хо – Ли

$$\int_t^T a_s^2(T^1)ds = \frac{\delta^2}{3}\left[(T^1 - t)^3 - (T^1 - T)^3\right], \tag{33}$$

а для модели Васичека

$$\int_t^T a_s^2(T^1)ds = \frac{\delta^2}{\alpha^2}\Bigg[(T - t) - \frac{2}{\alpha}\left(\exp\left\{-\alpha\left(T^1 - T\right)\right\} - \exp\left\{-\alpha\left(T^1 - t\right)\right\}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha}\left(\exp\left\{-2\alpha\left(T^1 - T\right)\right\} - \exp\left\{-2\alpha\left(T^1 - t\right)\right\}\right)\Bigg]. \tag{34}$$

Утверждение 6. Для моделей Хо – Ли и Васичека справедливы теоремы 1, 2 и утверждения 4, 5, в которых величины $\int_t^T a^2{}_s(T^1)ds$ в (23), (25) выражаются соответственно формулами (33) и (34).

Дадим комментарии к свойствам (27), (28), (30).Свойство $\beta_t^c < 0$ означает взятие безрискового актива в долг для перераспределения капитала в пользу рискового актива. Это объясняется тем, что в основе заключения контракта по опциону купли лежит игра на повышении стоимости рискового актива. Свойство $\gamma_t^p < 0$ означает взятие в долг рискового актива для перераспределения капитала в пользу безрискового актива. Это объясняется тем, что в основе заключения контракта по опциону продажи лежит игра на понижении стоимости рискового актива. Убывание цены опциона купли по цене исполнения опциона K объясняется тем, что с ростом K согласно платежному обязательству (21) уменьшается вероятность предъявления опциона к исполнению, а за возрастающий риск следует меньше платить. Возрастание цены опциона продажи по цене исполнения опциона K объясняется тем, что с ростом K согласно платежному обязательству (22) увеличивается вероятность предъявления опциона к исполнению, а за уменьшающийся риск следует больше платить.

4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Согласно общей теории платежных обязательств на рынке облигаций [2, 3],

$$X_t^c = B(t)E^*\{B^{-1}(T)f_T^c \mid F_t\}; \tag{35}$$

$$\gamma_t^c = \left.\frac{\partial X_t{}^c}{\partial p}\right|_{p = P_t(T^1)}, \quad \beta_t^c = \frac{X_t^c - \gamma_t^c P_t(T^1)}{B(t)}. \tag{36}$$

Использование (21) в (35) дает , что

$$X_t^c = B(t)E^*\left\{(B^{-1}(T)P_t(T^1)-K)^+ \mid F_t\right\}. \quad (37)$$

Подстановка (15), (16) в (37) с заменой τ на t и t на T приводит к представлению капитала в виде

$$X_t^c = B(t)E^*\left\{\left(P_t(T^1)B^{-1}(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a^2{}_s(T^1)ds+\int_t^T a_s(T^1)dw_s^*\right\}-K\right)^+ \mid F_t\right\}. \quad (38)$$

Поскольку процесс w_s^* является винеровским относительно меры $\boldsymbol{P}^*$, т. е. $w_s^* \sim N\{0;s\}$, то

$$\xi_t^T = \int_t^T a_s(T^1)dw_s^* \sim N\{0,D(t,T)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2D(t,T)}\right\}; \quad (39)$$

$$D(t,T) = \int_t^T a_s^2(T^1)ds\,. \quad (40)$$

Тогда использование (39) в (38) с заменой переменных $x = \sqrt{D(t,T)z}$ дает, что

$$X_t^c = \frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds+\sqrt{D(t,T)}z\right\}-K\right)^+\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\,. \quad (41)$$

Пусть $z_0(t)$ – корень уравнения

$$B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds+\sqrt{D(t,T)}z\right\} = K\,,$$

т. е.

$$z_0(t) = \frac{\ln\left[\dfrac{KB(t)}{P_t(T^1)}\right]+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}\,. \quad (42)$$

Тогда

$$X_t^c = \frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{+\infty} B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds+\sqrt{D(t,T)}z\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz - \frac{KB(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}. \quad (43)$$

Запишем (43) в виде

$$X_t^c = X_t^1 - X_t^2\,, \quad (44)$$

где

$$X_t^1 = \frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{+\infty} B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds+\sqrt{D(t,T)}z\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz, \quad (45)$$

и с учетом свойства Φ(x) + Φ(–x) = 1 функции Φ(x)

$$X_t^2 = KB(T)[1-\Phi(z_0(t))] = KB(t)\Phi(-z_0(t))\,. \quad (46)$$

Представим X_t^1 в виде

$$X_t^1 = P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds\right\}J_t; \tag{47}$$

$$J_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0(t)}^{+\infty}\exp\left\{\sqrt{D(t,T)}z - \frac{z^2}{2}\right\}dz. \tag{48}$$

Сделаем замену $y = z - \sqrt{D(t,T)}$. Тогда из (40), (42) следует, что

$$y_0(t) = z_0(t) - \sqrt{D(t,T)} = \frac{\ln\left[\dfrac{KB(t)}{P_t(T^1)}\right] - \dfrac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds}{\sqrt{\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}; \tag{49}$$

$$\sqrt{D(t,T)}z - \frac{z^2}{2} = \frac{D(t,T)}{2} - \frac{y^2}{2}. \tag{50}$$

Использование (49), (50) в (48) с учетом (40) дает, что

$$J_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(t)}^{+\infty}\exp\left\{\frac{D(t,T)}{2} - \frac{y^2}{2}\right\}dy = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_t^T a^2{}_s(T^1)ds\right\}\Phi(-y_0(t)). \tag{51}$$

Подстановка (51) в (47) дает, что

$$X_t^1 = P_t(T^1)\Phi(-y_0(t)). \tag{52}$$

Тогда X_t^c из (24) следует в результате подстановки (46), (52) в (44) с учетом того, что $y_0(t) = -d_+^c(t),\quad z_0(t) = -d_-^c(t)$, а C_T^c из того, что $C_T^c = X_0^c$ [2, 3].

Пусть

$$\Phi(b(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b(s)}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx. \tag{53}$$

Тогда

$$\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{b^2(s)}{2}\right\}\frac{\partial b(s)}{\partial s}, \frac{\partial\Phi(-b(s))}{\partial s} = -\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s}. \tag{54}$$

Из X_t^c в (24) и (54) следует ($P_t(T^1) = p$)

$$\frac{\partial X_t^c}{\partial p} = \left[\Phi(d_+^c(t))\right] + p\left[\frac{\partial\Phi(d_+^c(t))}{\partial p}\right] - KB(t)\left[\frac{\partial\Phi(d_-^c(t))}{\partial p}\right]. \tag{55}$$

Использование (23), (54) дает

$$\frac{\partial\Phi(d_+^c)}{\partial p} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}\exp\left\{-\frac{d_+^{c2}}{2}\right\}; \tag{56}$$

$$\frac{\partial\Phi(d_-^c)}{\partial p} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_t^T a^2{}_s(T^1)ds}}\exp\left\{-\frac{d_-^{c2}}{2}\right\}. \tag{57}$$

Из (23), (40) следует

$$d_{-}^{c2} = d_{+}^{c2} - 2\ln\left[\frac{P_t(T^1)}{KB(t)}\right]. \qquad (58)$$

Использование (56), (57), (58) в (55) с учетом (36) дает γ_t^c, β_t^c из (24). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Аналогично (35), (36)

$$X_t^p = B(t)E^*\{B^{-1}(T)f_T^p \mid F_t\}; \qquad (59)$$

$$\gamma_t^p = \left.\frac{\partial X_t^p}{\partial p}\right|_{p = P_t(T^1)}, \quad \beta_t^c = \frac{X_t^p - \gamma_t^p P_t(T^1)}{B(t)}. \qquad (60)$$

Использование (22) в (59) дает , что

$$X_t^p = B(t)E^*\left\{\left(K - B^{-1}(T)P_t(T^1)\right)^+ \mid F_t\right\}. \qquad (61)$$

Аналогично (38)

$$X_t^p = B(t)E^*\left\{\left(K - P_t(T^1)B^{-1}(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds + \int_t^T a_s(T^1)dw_s^*\right\}\right)^+ \mid F_t\right\}. \quad (62)$$

Использование (39) в (62) с заменой переменных $x = \sqrt{D(t,T)z}$ дает, что

$$X_t^p = \frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0(t)}\left(K - B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds + \sqrt{D(t,T)}z\right\}\right)^+\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz. \quad (63)$$

Аналогично (43)

$$X_t^p = \frac{KB(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0(t)}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz -$$

$$-\frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0(t)} B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a_s^2(T^1)ds + \sqrt{D(t,T)}z\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz. \qquad (64)$$

Запишем (64) в виде

$$X_t^p = X_t^2 - X_t^1, \qquad (65)$$

где

$$X_t^1 = \frac{B(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0(t)} B^{-1}(t)P_t(T^1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T a^2{}_s(T^1)ds + \sqrt{D(t,T)}z\right\}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz, \qquad (66)$$

$$X_t^2 = \frac{KB(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_0(t)}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz = KB(t)\Phi(z_0(t)). \qquad (67)$$

Преобразование (66) аналогично (45) , с учетом (64), дает

$$X_t^1 = P_t(T^1)\Phi(y_0(t)). \qquad (68)$$

Тогда X_t^p из (26) следует в результате подстановки (67), (68) в (65) с учетом того, что $y_0(t) = d_-^p(t)$, $z_0(t) = d_+^p(t)$, а C_T^p следует из того, что $C_T^p = X_0^p$ [2, 3].

Из X_t^p в (26) и (54) следует

$$\frac{\partial X_t^p}{\partial p} = -\left[\Phi(d_-^p(t))\right] - p\left[\frac{\partial \Phi(d_+^p(t))}{\partial p}\right] + KB(t)\left[\frac{\partial \Phi(d_+^p(t))}{\partial p}\right]. \qquad (69)$$

Использование (25), (54) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(d_+^p)}{\partial p} &= -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}\exp\left\{-\frac{d_+^{p2}}{2}\right\}, \\ \frac{\partial \Phi(d_-^p)}{\partial P} &= -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_t^T a_s^2(T^1)ds}}\exp\left\{-\frac{d_-^{p2}}{2}\right\}. \end{aligned} \qquad (70)$$

Аналогично (58) $$d_-^{p2} = d_+^{p2} - 2\ln\left[\frac{KB(t)}{P_t(T^1)}\right]. \qquad (71)$$

Использование (70) , (71) в (69) с учетом (60) дает γ_t^p, β_t^p из (26). Теорема доказана.

Заключение

Основные результаты заключаются в следующем:

1. Получено аналитическое выражение для стоимости стандартного опциона купли и продажи (Теоремы 1 и 2).

2. Найдена оптимальная хеджирующая стратегия и капитал портфеля для стандартного опциона купли и продажи (Теоремы 1 и 2).

3. Все общие результаты для стандартного опциона конкретизированы для модели Хо – Ли и Васичека (Утверждение 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
3. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУВШЭ, 2001.
4. *Буренин А.Н.* Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995.
5. *Wilmott P.* Derivatives: the theory and practice financial engineering. N.Y.: John Willey, 2000.
6. *Heath D.*, *Jarrow R.*, *Morton A.* Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. 1992. V. 60. No. 1. P. 77 – 105.
7. *Бьорк Т.* О временной структуре разрывных процентных ставок // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 627 – 657.
8. *Hull J.*, *White A.* Pricing interest rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. V.3. No. 5. P. 573 – 592.
9. *Hull J.*, *White A.* Bond option pricing on a model for the evolution of bond prices. // Advances in Futures and Options Research. 1993. No. 6. P. 1 – 13.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 3 октября 2008 г.