

УДК 336.01:51(075.8)

Г.А. Медведев

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СОВМЕСТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Совместные плотности вероятностей некоторых диффузионных процессов представляются как смеси распределений. Смешивающая случайная величина имеет отрицательное биномиальное распределение, причем при фиксированном значении смешивающей случайной величины совместная плотность превращается в произведение маргинальных, т.е. значения процесса в различные моменты времени как бы становятся «независимыми» и получается, что смешивающая случайная величина «регулирует» зависимость между значениями процесса.

Ключевые слова: совместные плотности вероятностей, диффузионные случайные процессы, смеси плотностей вероятностей.

Начиная с Башелье [1], использовавшего в начале прошлого века процесс случайного блуждания для описания динамики стоимости акций, при решении стохастических задач экономики и финансового анализа для описания случайно изменяющихся финансовых и экономических показателей используются случайные процессы броуновского движения. Нобелевские лауреаты Самюэльсон [2] и Мертон [3, 4] впервые предложили динамическую модель эволюции цен в непрерывном времени, используя для описания динамики стохастические дифференциальные уравнения Ито. После публикации их пионерских статей за период продолжительностью около 30 лет непрерывно-временные методы стали неотъемлемой частью финансовой экономики. В некоторых основных областях финансов (например, таких как описание цены актива, определение стоимости финансовых производных, теория временной структуры, выбор оптимального портфеля) непрерывно-временные методы оказались самым удобным способом проведения исследований. Непрерывно-временной подход в этих областях стимулировал появление разнообразных моделей, допускающих получение аналитических решений. Чаще всего в стохастическом финансовом анализе используются диффузионные процессы, являющиеся важным классом марковских процессов. Дело в том, что для процессов этого типа можно выписать уравнение для переходной плотности вероятностей, знание которой в явном виде фактически решает многие проблемы, стоящие перед финансовым аналитиком. Так, пусть динамика рассматриваемого финансового показателя описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = \mu(t, x(t)) dt + \sigma(t, x(t)) dW(t),$$

где $\mu(t, x)$ и $\sigma^2(t, x)$ – так называемые функции дрейфа и диффузии, а $W(t)$ – случайный винеровский процесс, являющийся непрерывно-временным аналогом броуновского движения. Тогда переходная плотность вероятностей $f(x, t | y, s)$, $y = x(s)$, $s < t$, процесса $x(t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка (прямому уравнению Колмогорова)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\mu(t, x)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2(t, x)f]$$

с начальным условием $f(x, s | y, s) = \delta(x - y)$. Такое уравнение относится к классу уравнений с частными производными второго порядка параболического типа и имеет явное аналитическое решение в очень редких случаях. Чаше удастся получить такие решения для однородных по времени случайных процессов, для которых функции дрейфа и диффузии явно не зависят от времени. В этом случае применение метода разделения переменных позволяет свести задачу решения уравнения Фоккера – Планка к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений, к так называемой задаче Штурма – Лиувилля [5], когда решение краевой задачи представляется в виде разложения по собственным функциям, соответствующим требованиям выполнения условий на границах области изменения случайного процесса. Когда однородный процесс допускает стационарное решение, условиями на границах области являются равенства нулю потоков вероятности через эти границы. В этом случае, если множество собственных чисел является счетным, решение представляется в виде ряда по собственным функциям, которые обычно выбираются в виде подходящих ортогональных полиномов, не имеющих какой либо финансовой или вероятностной интерпретации [6].

Вместе с тем можно решить задачу представления решения уравнения Фоккера – Планка в виде разложения в ряд по функциям, имеющим вид стационарных плотностей, в которых в качестве собственных чисел выступают параметры плотности (чаще всего параметры формы), а сами плотности играют роль линейно независимых функций разложения. Такое представление переходной (а также совместной) плотности, по сути, является смесью плотностей, в которой в качестве смешивающей случайной величины для переходной плотности выступает пуассоновская случайная величина, а для совместной плотности – случайная величина с отрицательным биномиальным распределением. Ниже будет рассмотрена такая проблема представления решения уравнения Фоккера – Планка для некоторых случайных процессов, порождаемых известными из литературы моделями процессов процентных ставок.

1. Модель Кокса – Ингерсолла – Росса

В настоящее время наиболее популярной моделью процентной ставки является модель Кокса – Ингерсолла – Росса (CIR) [7], когда процентная ставка $r(t)$ следует процессу

$$dr(t) = k(E - r(t)) dt + \sqrt{2kVr(t)/E} dW(t). \quad (1)$$

Процесс процентной ставки $r(t)$, порождаемый уравнением (1), принимает только неотрицательные значения, причем нулевой уровень процесса $r(t)$ с вероятностью 1 недостижим, если выполняется соответствующее условие Феллера [8]: $E^2/V > 1$. Уравнение (1) допускает стационарный режим со средним значением E и дисперсией V . При этом маргинальной плотностью является гамма-плотность.

Введем обозначения:

$$g(x|q, c) \equiv \frac{c^q x^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cx} - \text{плотность вероятностей гамма-распределения с пара-}$$

метром формы q и параметром масштаба c , $x \geq 0$; если $X \sim g(x|q, c)$, тогда $E[X] = q/c$, $\text{Var}[X] = q/c^2$;

$p(j|\lambda) \equiv \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$ – пуассоновское распределение вероятностей с параметром

$\lambda > 0, j = 0, 1, 2, \dots$; если $J \sim p(j|\lambda)$, тогда $E[J] = \text{Var}[J] = \lambda$;

$b(j | q, \rho) \equiv \frac{\Gamma(q+j)}{j! \Gamma(q)} \rho^j (1-\rho)^q$ – отрицательное биномиальное распределение

вероятностей с параметрами $q > 0, \rho \in (0,1), j = 0, 1, 2, \dots$; если $J \sim b(j|q, \rho)$, тогда $E[J] = q\rho/(1-\rho), \text{Var}[J] = q\rho/(1-\rho)^2$;

$h(x|q, c) \equiv \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{q+1}} e^{-c/x}$ – плотность вероятностей для $x \geq 0$ с параметрами

q, c ; если $X \sim h(x|q, c)$, тогда $E[X] = c/(q-1), \text{Var}[X] = c^2/(q-1)^2(q-2)$.

Ниже для краткости случайные величины и их значения обозначаются одинаковыми символами. Конец утверждения отмечается символом ■.

Утверждение 1 [9]. Двухмерная плотность вероятностей $f(r, t, R, s)$ значений процентной ставки $r(t)$, определяемой уравнением (1), $r(t) = r, r(s) = R, s < t$, имеет представление для $r \geq 0, R \geq 0$:

$$f(r, t, R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j | q, e^{-k(t-s)}) g(r | q + j, c) g(R | q + j, c); \quad (2)$$

условная (переходная) плотность вероятностей $f(r, t | r(s) = R), s < t$, представима в виде

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j} r^{q+j-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-cr} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) g(r | q + j, c), \quad r \geq 0, \quad (3)$$

где обозначено $u = \frac{ER}{V(e^{k(t-s)} - 1)}, c = \frac{E}{V(1 - e^{-k(t-s)})}, q = \frac{E^2}{V}$.

При тех же условиях маргинальная плотность вероятностей $f(r, t)$ является плотностью распределения гамма с параметром формы q и параметром масштаба $c_0 = \lim_{(t-s) \rightarrow \infty} c = E/V$:

$$g(r|q, c_0) = \frac{c_0^q r^{q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c_0 r}, \quad r \geq 0. \quad (4)$$

Начальные моменты стационарного распределения процесса (1) любого порядка i существуют и вычисляются по формуле

$$E[r^i] = \left(\frac{V}{E}\right)^i \frac{\Gamma(i + E^2/V)}{\Gamma(E^2/V)},$$

откуда следует, что стационарное математическое ожидание и стационарная дисперсия процесса $r(t)$ равны соответственно E и V . Коэффициент корреляции $\rho(t-s)$ значений процесса $r(t)$ и $r(s), s < t$, вычисляется по формуле

$$\rho(t-s) = \exp[-k(t-s)]. \quad \blacksquare$$

Как видно из (4), правый хвост гамма-плотности убывает экспоненциально, и в этом смысле такое распределение не подтверждается рыночными наблюдениями, так как реальные плотности имеют более тяжелый правый хвост.

2. Модель Ана – Гао

Альтернативой модели CIR является модель Ана – Гао [10], которая определяет процесс процентной ставки $R(t)$ стохастическим дифференциальным уравнением

$$dR(t) = k(E + V/E - R(t))R(t) dt + \sqrt{2kVR^3(t)} / E dW(t). \quad (5)$$

В этом случае стационарный режим также существует, а маргинальная стационарная плотность обладает более тяжелым хвостом, который убывает пропорционально величине $R^{-(3+E^2/V)}$, то есть относится к паретовскому типу, что уже ближе к свойствам реальных данных. Заметим, что процессы (1) и (5) связаны функциональным соотношением $R(t) = 1/r(t)$, если выполняется условие Феллера $E^2/V > 1$.

Утверждение 2 [11]. Для процесса $R(t)$, порожденного уравнением (5), имеем следующие результаты.

Стационарная маргинальная плотность вероятностей процесса $R(t)$ определяется функцией

$$h(x|q, c) \equiv \frac{c^q}{\Gamma(q)x^{q+1}} e^{-c/x}, \quad x \geq 0,$$

причем параметры этой плотности задаются в виде $c = E(1 + E^2/V)$, $q = 2 + E^2/V$. Начальные моменты стационарного распределения процесса (5) существуют только для порядков $i < (2 + E^2/V)$ и вычисляются по формуле

$$E[R^i] = E^i \left(1 + \frac{E^2}{V}\right)^i \frac{\Gamma(2 - i + E^2/V)}{\Gamma(2 + E^2/V)}.$$

Отсюда следует, что стационарное математическое ожидание и стационарная дисперсия процесса $R(t)$ равны соответственно $E[R] = E$ и $\text{Var}[R] = V$.

Условная плотность вероятностей $f(r, t | R, s)$, где обозначено $r = R(t)$, $R = R(s)$, $s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(r, t | R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{c^{q+j} r^{-q-j-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-c/r} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) h(r | q+j, c), \quad r \geq 0, \quad (6)$$

$$\text{где } u = \frac{\rho E(1 + E^2/V)}{R(1-\rho)}, \quad c = \frac{E(1 + E^2/V)}{(1-\rho)}, \quad q = 2 + \frac{E^2}{V}, \quad \rho = e^{-k(E + V/E)(t-s)}.$$

Совместная плотность вероятностей $f(r, t, R, s)$, для $r = R(t)$, $R = R(s)$, $s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(r, t, R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j | q, \rho) h(r | q+j, c) h(R | q+j, c). \quad (7)$$

Значения параметров q, c, ρ в (7) определены так же, как для формулы (6).

Коэффициент корреляции случайных величин $R(t)$ и $R(s)$ определяется по формуле

$$\text{Corr}[R(t), R(s)] = \sum_{j=1}^{\infty} b(j | q-2, \rho) \frac{j}{q+j-1}. \quad \blacksquare$$

Отметим интересный факт, что при формальной подстановке $q = 1/2$ маргинальная плотность вероятностей $h(x | q, c)$ процесса $R(t)$ превращается в плотность вероятностей распределения Леви – Смирнова [12], относящегося к классу устойчивых:

$$h(x | c) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi} x^{3/2}} e^{-c/x}, \quad x \geq 0.$$

Однако в контексте рассматриваемого случайного процесса $R(t)$ параметр $q \geq 2$, а при выполнении условия Феллера даже $q \geq 3$, так что связь процесса (5) с процессом Леви требует особого рассмотрения.

3. Процесс Бесселя

Укажем также на еще один диффузионный процесс, который также обсуждается в литературе по финансовой математике – это процесс Бесселя $X(t)$ порядка $\alpha > 1$ [12], описываемый уравнением

$$dX(t) = (\alpha - 1) [2X(t)]^{-1} dt + dW(t), \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Этот процесс также порождает неотрицательные значения $X(t)$ и мог бы использоваться в качестве модели процентной ставки. Однако такая модель отличается от предыдущих моделей тем, что процесс (8) не имеет стационарного режима. Поэтому ее применение ограничено. Нетрудно показать, что процесс $X(t)$, определяемый уравнением (8), при $\alpha = 1 + 2E^2/V$ связан с процессом $r(\tau)$, определяемым уравнением (1), следующим функциональным преобразованием:

$$X(t) = \sqrt{(1 + 2Et/V) r(\ln(1 + 2Et/V) / k)}, \quad t \geq 0.$$

Это позволяет с использованием утверждения 1 получить следующие свойства процесса $X(t)$.

Утверждение 3. Для процесса $X(t)$, порождаемого уравнением (8), справедливы следующие результаты.

Маргинальная плотность вероятностей процесса $X(t)$ определяется выражением

$$f(x|q, c(t)) = \frac{2c(t)^q x^{2q-1}}{\Gamma(q)} e^{-c(t)x^2}, \quad x \geq 0, t \geq 0,$$

где параметры плотности задаются в виде $c(t) = E/(V + 2Et)$, $q = E^2/V$. Поэтому начальные моменты порядка i для процесса (8) вычисляются по формуле

$$E[X^i | t] = \frac{1}{\sqrt{c(t)^i}} \frac{\Gamma(q + i/2)}{\Gamma(q)} = \left(\frac{V + 2Et}{E} \right)^{i/2} \frac{\Gamma(E^2/V + i/2)}{\Gamma(E^2/V)},$$

так что все моменты монотонно возрастают со временем и стационарного режима процесс (8) не имеет. Математическое ожидание и дисперсия процесса $X(t)$ соответственно равны

$$E[X(t)] = \sqrt{\frac{V + 2Et}{E}} \frac{\Gamma(E^2/V + 1/2)}{\Gamma(E^2/V)}$$

и

$$\text{Var}[X(t)] = \frac{V + 2Et}{E} \left[\frac{E^2}{V} - \left(\frac{\Gamma(E^2/V + 1/2)}{\Gamma(E^2/V)} \right)^2 \right].$$

Условная плотность вероятностей $f(x, t | X, s)$, где обозначено $x = X(t)$, $X = X(s)$, $0 \leq s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(x, t | X, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{2c(t)^{q+j} x^{2(q+j)-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-c(t)x^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) f(x | q+j, c(t)), \quad x \geq 0, \quad (9)$$

где $u = \rho c(s) X^2$, $c(t) = \frac{E}{(1-\rho)(V+2Et)}$, $q = \frac{E^2}{V}$, $\rho = \frac{V+2Es}{V+2Et}$, $0 \leq s < t$.

Совместная плотность вероятностей $f(x, t; X, s)$, для $x = X(t)$, $X = X(s)$, $s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(x, t; X, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j | q, \rho) f(x | q+j, c(t)) f(X | q+j, c(s)). \quad (10)$$

Значения параметров q, c, ρ в (10) определены так же, как для формулы (9). ■

Заметим, что процесс Бесселя $X(t)$ связан с другим нестационарным процессом, часто используемым в финансовом анализе, – процессом геометрического броуновского движения $S(t)$ следующим функциональным преобразованием [13]:

$$S(t) = X \left(\sigma^2 \int_0^t \exp[2(\mu v + \sigma W(v))] dv \right).$$

Используя уравнение (8) и формулу Ито, получаем стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $S(t)$ в виде

$$dS(t) = S(t)((\mu + \sigma^2/2)dt + \sigma dW(t)). \quad (11)$$

Решением этого уравнения является процесс $S(t) = S(0) \exp[\mu t + \sigma W(t)]$, имеющий логарифмически нормальное распределение. Как следует из многочисленной литературы, такой процесс является подходящим для описания поведения цен акций с течением времени.

Из утверждения 3 можно получить, что преобразование $y(t) = X(t)/\sqrt{(1+2Et/V)}$, $t \geq 0$, приводит к процессу, допускающему стационарный режим. Использование уравнения (8) и формулы Ито дает, что в этом случае процесс $y(t)$ порождается уравнением

$$dy(t) = \frac{k}{2} \left(\frac{E}{y(t)} - y(t) \right) dt + \sqrt{\frac{kV}{2E}} dW(t), \quad (12)$$

а плотности вероятностей процесса $y(t)$ имеют тот же вид, как в утверждении 3, но с параметрами q, c, ρ в том виде, как они определены в утверждении 1. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Для процесса $y(t)$, порождаемого уравнением (12), справедливы следующие результаты.

Маргинальная плотность вероятностей процесса $y(t)$ определяется выражением

$$f(y | q, c) = \frac{2c^q y^{2q-1}}{\Gamma(q)} e^{-cy^2}, \quad y \geq 0,$$

где параметры плотности задаются в виде $c = E/V$, $q = E^2/V$. Начальные моменты порядка i для процесса (12) в стационарном режиме вычисляются по формуле

$$E[y(t)^i] = \left(\frac{V}{E}\right)^{i/2} \frac{\Gamma(E^2/V + i/2)}{\Gamma(E^2/V)}.$$

Условная плотность вероятностей $f(y, t | Y, s)$, где обозначено $y = y(t)$, $Y = y(s)$, $s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(y, t | Y, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} e^{-u} \frac{2c^{q+j} y^{2(q+j)-1}}{\Gamma(q+j)} e^{-cy^2} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j|u) f(y|q+j, c), \quad y \geq 0, \quad (13)$$

где $u = \rho c Y^2$, $c = \frac{E}{(1-\rho)V}$, $q = \frac{E^2}{V}$, $\rho = e^{-k(t-s)}$, $s < t$.

Совместная плотность вероятностей $f(y, t; Y, s)$ для $y = y(t)$, $Y = y(s)$, $s < t$, представима в виде смеси распределений

$$f(y, t; Y, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q, \rho) f(y|q+j, c) f(Y|q+j, c). \quad (14)$$

Значения параметров q, c, ρ в (14) определены так же, как для формулы (13). ■

Заключение

Таким образом, совместные плотности вероятностей $f(y, t; Y, s)$ для рассмотренных диффузионных процессов можно определить как смеси распределений

$$f(r, t; R, s) = \sum_{j=0}^{\infty} b(j|q, \rho) m(y|q+j, \tilde{c}) m(Y|q+j, \tilde{c}), \quad (15)$$

здесь $m(y|q, \tilde{c})$ – маргинальная плотность соответствующего процесса, в которой вместо c используется $\tilde{c} = c/(1-\rho)$. Особенностью плотностей (15) является то, что смешивающая случайная величина имеет отрицательное биномиальное распределение, причем при фиксированном значении смешивающей случайной величины совместная плотность превращается в произведение маргинальных, т.е. значения процесса в различные моменты времени как бы становятся «независимыми». Так что в некотором смысле смешивающая случайная величина «регулирует» зависимость между выборочными значениями процесса. Такая структура плотностей вероятностей является удобной при аналитических расчетах, касающихся вычисления математических ожиданий от различных функций случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bachelier L. Théorie de la spéculation // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900. V. 17. P. 21 – 86.
2. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industr. Managem. Rev. 1965. V. 6. P. 13 – 31.
3. Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case // Rev. Econom. Statist. 1969. V. 51. P. 247 – 257.
4. Merton R.C. Continuous-Time Finance. N.Y.: Oxford University Press, 1990. 720 p.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

6. Primak S., Kontorovich V., Lyandres V. Stochastic Methods and Their Applications. Chichester: John Wiley & Sons, 2004. 439 p.
7. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A Theory of the term structure of interest rate // *Econometrica*. V. 53. 1985. P. 385 – 467.
8. Feller W. Two singular diffusion problems // *Ann. Math.* 1951. V. 54. No. 1. P. 173 –182.
9. Медведев Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск: Изд-во БГУ, 2005. 243 с.
10. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // *The Rev. Finan. Studies*. 1999. V. 12. No. 4. P. 721 – 762.
11. Медведев Г.А. Сравнительный анализ стохастических нелинейных моделей процентных ставок // *Экономика и управление*. 2008. № 2. С. 94 – 103.
12. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. – М: ФАЗИС, 1998. 512 с.
13. Williams D. Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions // *Proc. London Math. Soc.* 1973. V. 28. No. 3. P. 738 – 768.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета и оргкомитетом 7 Российской конференцией с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Поступила в научную редакцию 9 октября 2008 г.