

УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРГОВОЙ ТОЧКИ
В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА М/М/∞
С ОТКАЗАМИ ОТ ПОСТАНОВКИ В ОЧЕРЕДЬ.
ЧАСТЬ 1. ВЫХОДЯЩИЙ ПОТОК ОБСЛУЖЕННЫХ ТРЕБОВАНИЙ**

Изучаются свойства выходящего потока заявок системы массового обслуживания типа М/М/1/∞ с отказами от постановки в очередь.

Ключевые слова: *система массового обслуживания, выходящий поток.*

Системы массового обслуживания (СМО) в качестве математических моделей для самых разнообразных систем с потоками заявок применяются в наше время очень широко. Могут быть они применены и для описания функционирования торговой точки. Ниже рассматривается одна из таких моделей, учитывающая «нетерпеливость» клиентов.

1. Описание модели

Времена всеобщего дефицита, когда в магазинах были пустые полки и за товарами выстраивались многочасовые очереди, канули в прошлое. Сейчас однотипных магазинов очень много, в них продаются однотипные товары и клиент, заходя в магазин, смотрит не только на ассортимент и цены, но и на наличие очереди. И если очередь, с его точки зрения, достаточно большая, то он откажется от покупки в этом магазине и пойдёт в другой магазин, где очередь, возможно, будет меньше.

В качестве математической модели этой ситуации рассмотрим систему массового обслуживания, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ . В данной работе рассмотрен случай, когда время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ .

Дисциплина обслуживания заключается в том, что если поступающая заявка застаёт в системе i заявок, то с вероятностью r_i , $0 \leq r_i \leq 1$ она в очередь не становится и покидает систему, а с вероятностью $1 - r_i$ становится в очередь для ожидания обслуживания.

Обозначения:

$m(t)$ – число заявок, отказавшихся от обслуживания (поток уходящих требований) в течение времени t ;

$n(t)$ – число заявок, обслуженных за время t (выходящий поток заявок);

$i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t .

Для рассматриваемой СМО при заданных значениях параметров λ , μ , r_i процесс $i(t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем (процессом гибели и размножения), управляющим потоками $m(t)$ и $n(t)$. Поэтому оба этих потока относятся к классу МАР-потоков (Markovian Arrival Process).

Асимптотические (в условиях растущего времени t) и допредельные численные методы исследования МАР-потоков изложены в диссертации С.В. Лопуховой [1], на основе которых и проведены дальнейшие исследования.

2. Исследование выходящего потока (потока обслуженных заявок)

Так как двумерный случайный процесс $\{i(t), n(t)\}$ является цепью Маркова, то для его распределения вероятностей

$$P(i, n, t) = P\{i(T) = i, n(t) = n\}$$

используя так называемый Δt -метод [2], можно записать следующие соотношения ($i > 0, n > 0$)

$$\begin{aligned} P(i, n, t + \Delta t) = & P(i, n, t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t] + P(i, n, t)\lambda r_i \Delta t + \\ & + P(i-1, n, t)\lambda(1 - r_{i-1})\Delta t + P(i+1, n-1, t)\mu\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1a)$$

При $i = 0$ эта система приобретает вид

$$\begin{aligned} P(0, n, t + \Delta t) = & P(0, n, t)[1 - \lambda\Delta t] + P(0, n, t)\lambda r_0 \Delta t + \\ & + P(1, n-1, t)\mu\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (1б)$$

так как при $i = 0$ уход обслуженной заявки невозможен (ведь её нет), а $P(-1, n, t) = 0$.

Обычным способом, переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ при $i > 0$, отсюда получаем

$$\frac{\partial P(i, n, t)}{\partial t} = -[\lambda(1 - r_i) + \mu]P(i, n, t) + \lambda(1 - r_{i-1})P(i-1, n, t) + \mu P(i+1, n-1, t), \quad (2a)$$

а при $i = 0$

$$\frac{\partial P(0, n, t)}{\partial t} = -\lambda(1 - r_0)P(0, n, t) + \mu P(1, n-1, t). \quad (2б)$$

Для решения этой системы введём функцию

$$H(i, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(i, n, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$. Тогда для этих функций можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H(i, u, t)}{\partial t} = -[\lambda(1 - r_i) + \mu]H(i, u, t) + \lambda(1 - r_{i-1})H(i-1, u, t) + \mu e^{ju} H(i+1, u, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial H(0, u, t)}{\partial t} = -\lambda(1 - r_0)H(0, u, t) + \mu e^{ju} H(1, u, t).$$

Введём вектор-строку

$$H(u, t) = \{H(0, u, t), H(1, u, t), \dots\}$$

и перепишем систему (3) в виде

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = H(u, t)\{Q + \mu(e^{ju} - 1)B\}, \quad (4)$$

где Q – трехдиагональная инфинитезимальная матрица процесса гибели и размножения $i(t)$, имеющая следующий вид:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda(1 - r_0) & \lambda(1 - r_0) & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -[\lambda(1 - r_1) + \mu] & \lambda(1 - r_1) & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -[\lambda(1 - r_2) + \mu] & \lambda(1 - r_2) & \dots \\ 0 & 0 & \mu & -[\lambda(1 - r_3) + \mu] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (5)$$

а в матрице B поддиагональные элементы равны 1, а остальные равны нулю.

Введём ещё вектор-столбец E , состоящий из единиц: $E = (1, 1, 1, \dots)^T$. Тогда легко видеть, что матрица Q удовлетворяет условию $QE = 0$.

Рассмотрим решение дифференциально-матричного уравнения (4) при следующих начальных условиях:

1. $n(0) = 0$ с вероятностью 1.

2. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ в цепи гибели и размножения $i(t)$ установилось стационарное распределение вероятностей $P(i(t) = i) = R(i)$, которое мы найдём ниже. Тогда, если взять $t = 0$, то $P(i, n, 0) = R(i)\delta_{n0}$, и поэтому $H(i, u, 0) = R(i)$. Вводя вектор-строку

$$R = (R(0), R(1), R(2), \dots),$$

имеем

$$H(u, 0) = R.$$

Далее, если взять $u = 0$, то

$$H(i, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(i, n, t) = P(i, t) = R(i)$$

в силу стационарности распределения вероятностей $R(i)$. Тогда будет верно соотношение $H(0, t) = R$.

Таким образом, начальные условия систем (4) имеют вид

$$H(u, 0) = H(0, t) = R.$$

3. Нахождение финального распределения вероятностей процесса $i(t)$

В стационарном состоянии граф переходов процесса $i(t)$ имеет вид (рис. 1), что даёт следующую систему разностных уравнений для компонент финального распределения вероятностей $R(i)$:

$$\lambda(1 - r_0)R(0) = \mu R(1),$$

$$\lambda(1 - r_{i-1})R(i-1) - [\lambda(1 - r_i) + \mu]R(i) + \mu R(i+1) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что эту систему можно записать в следующем матричном виде: $RQ = 0$.

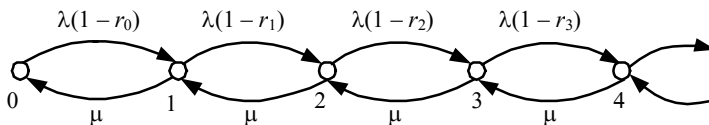


Рис. 1. Граф переходов процесса

Перепишем (6) в виде

$$\lambda(1 - r_{i-1})R(i-1) - \mu R(i) = \lambda(1 - r_i)R(i) - \mu R(i+1),$$

откуда видно, что

$$\lambda(1 - r_{i-1})R(i-1) - \mu R(i) = \text{const}.$$

Из первого уравнения системы (6) следует, что $\text{const} = 0$, так что

$$\lambda(1 - r_{i-1})R(i-1) = \mu R(i),$$

откуда

$$R(i) = \rho(1-r_{i-1})R(i-1) = \dots = R(0)\rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1-r_k), \quad (7)$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

Константа $R(0)$ находится из условия нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} R(i) = 1$, которое можно записать в виде $RE = 0$. Её явный вид

$$R(0) = 1 / \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1-r_k) \right\}. \quad (8)$$

В частности, из (8) следует, что условием существования стационарного распределения вероятностей в рассматриваемой СМО является сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1-r_k) < +\infty.$$

Таким образом, для вектор-строки $H(u, t)$ имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = H(u, t) \{ Q + \mu (e^{ju} - 1) R \}, \\ H(u, 0) = R, \end{cases} \quad (9)$$

решение $H(u, t)$ которой определяет характеристическую функцию величины $n(t)$. Действительно, беря

$$H(i, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun(t)} P(i, n, t)$$

и суммируя по i , получим

$$M\{e^{jun(t)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} \sum_{i=0}^{\infty} P(i, n, t) = \sum_{i=0}^{\infty} H(i, n, t) = H(u, t)E, \quad (10)$$

где E – единичный вектор-столбец.

4. Нахождение среднего числа обслуженных заявок

Для $M\{n(t)\}$, пользуясь свойствами характеристической функции, имеем

$$M\{n(t)\} = \frac{1}{j} \frac{\partial M\{e^{jun(t)}\}}{\partial u} \bigg|_{u=0} = \frac{1}{j} \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} \bigg|_{u=0} E. \quad (11)$$

Обозначим

$$n_1(t) = \frac{1}{j} \frac{\partial H(u, t)}{\partial u} \bigg|_{u=0},$$

так что

$$M\{n(t)\} = n_1(t)E.$$

Тогда из (9) получим

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = n_1(t)Q + R\mu B, \quad (12)$$

так как $H(0, t) = R$. Умножая на E , с учётом того, что $QE = 0$, имеем

$$\frac{dM\{n(t)\}}{dt} = R\mu BE = \mu RBE, \quad (13)$$

с начальным условием $M\{n(0)\} = 0$. Поэтому

$$M\{n(t)\} = \mu RBE \cdot t. \quad (14)$$

В дальнейшем комбинацию μRBE будем обозначать как κ_1 .

Так как

$$BE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} RBE &= [R(0) \quad R(1) \quad R(2) \quad \dots] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} R(i) = \\ &= 1 - R(0) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k)}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k)}, \end{aligned} \quad (15)$$

так что окончательно

$$M\{n(t)\} = \kappa_1 t = \mu(1 - R(0))t. \quad (16)$$

5. Решение задачи методом преобразования Фурье

Обозначим через $Y(u, \alpha)$ преобразование Фурье по t от вектор-функции $H(u, t)$:

$$Y(u, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} Y(u, t) dt. \quad (17)$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} dt &= \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} d_t H(u, t) = \\ &= e^{j\alpha t} H(u, t) \Big|_0^{\infty} - j\alpha \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} H(u, t) dt = -R - j\alpha Y(u, \alpha) \end{aligned}$$

и из (9) получим уравнение

$$-R - j\alpha Y(u, \alpha) = Y(u, \alpha) \{Q + \mu(e^{ju} - 1)B\}. \quad (18)$$

Его решение $Y(u, \alpha)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Y(u, \alpha) &= R \{ \mu B - Q - j\alpha I - e^{ju} \mu B \}^{-1} = \\ &= R \{ (\mu B - Q - j\alpha I) [I - e^{j\alpha} (\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} \mu B] \}^{-1} = \\ &= R [I - e^{ju} (\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} \mu B] (\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} = \\ &= R \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} [(\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} \mu B]^n (\mu B - Q - j\alpha I)^{-1}. \end{aligned}$$

В силу этого равенства определения функции $H(i, u, t)$ и равенства (17), для преобразования Фурье функции $P(n, t)$ запишем

$$P(n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} R \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} [(\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} \mu B]^n (\mu B - Q - j\alpha I)^{-1} E d\alpha.$$

Численная реализация этих формул в общем случае достаточно проблематична, так как вычисления произведения и обращения бесконечных матриц и нахождения значений несобственных интегралов. Поэтому рассмотрим асимптотический метод решения задачи (9) в условиях растущего времени t .

6. Решение задачи (9) асимптотическим методом в условиях растущего времени

Пусть T – некоторая достаточно большая величина, для которой будем полагать, что $T \rightarrow \infty$.

Условие $t = \tau T$ будем называть асимптотическим условием растущего времени. Дальнейшее исследование производится асимптотическим методом, разработанным А.А. Назаровым [3].

Асимптотикой первого порядка для характеристической функции

$$H(u, t)E = M \{ e^{jun(t)} \}$$

числа $n(t)$ событий, наступивших в выходящем потоке за время t , будем называть функцию $h_1(u, t)$ вида

$$h_1(u, t) = \exp \{ ju \kappa_1 t \},$$

где величина κ_1 определена выше методом моментов и имеет вид

$$\kappa_1 = \mu \cdot RBE = \mu(1 - R(0)).$$

6.1. Асимптотика второго порядка

Для построения асимптотики второго порядка $h_2(u, t)$ в уравнении (4)

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = H(u, t) \{ Q + \mu(e^{ju} - 1)B \}$$

выполним замену

$$H(u, t) = H_2(u, t) \exp(ju \kappa_1 t). \quad (19)$$

Тогда для $H_2(u, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H_2(u, t)}{\partial t} = H_2(u, t) \{ Q + \mu(e^{ju} - 1)B - ju \kappa_1 I \}, \quad (20)$$

где I – диагональная единичная матрица.

В силу замены (19) начальное условие для решения $H_2(u, t)$ уравнения (20) то же самое, что и для функции $H(u, t)$ в задаче (4):

$$H_2(u, t) = R. \quad (21)$$

В уравнении (20), обозначив $\varepsilon^2 = 1/T$, выполнив замены

$$t\varepsilon^2 = \tau, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(u, t) = F_2(w, \tau, \varepsilon), \quad (22)$$

получим уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = F_2(w, \tau, \varepsilon) \{ Q + \mu(e^{j\varepsilon w} - 1)B - j\varepsilon w \kappa_1 I \}. \quad (23)$$

Это уравнение решим в два этапа.

Этап 1. Решение $F_2(w, \tau, \varepsilon)$ уравнения (23) запишем в виде

$$F_2(w, \tau, \varepsilon) = \Phi_2(w, \tau) \{ R + j\varepsilon w f \} + O(\varepsilon^2) \quad (24)$$

и найдём вектор f , а скалярную функцию $\Phi_2(w, \tau)$ определим ниже на втором этапе.

Перепишем уравнение (23) в виде

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) &= F_2(w, \tau, \varepsilon) \{ Q + \mu j\varepsilon w B - j\varepsilon w \kappa_1 I \} = (R + j\varepsilon w f) \{ Q + j\varepsilon w [\mu B - \kappa_1 I] \} = \\ &= RQ + j\varepsilon w R[\mu B - \kappa_1 I] + j\varepsilon w f Q = j\varepsilon w \{ fQ + R(\mu B - \kappa_1 I) \}, \end{aligned}$$

где учтено, что $RQ = 0$.

Отсюда получаем, что вектор f является решением неоднородной системы

$$fQ + R(\mu B - \kappa_1 I) = 0. \quad (25)$$

В силу того, что Q – вырожденная матрица, на f , для его однозначного определения, можно наложить дополнительное условие. Наложим его в виде

$$fE = 0. \quad (26)$$

Этап 2. Умножая дифференциально-матричное уравнение (23) на E , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} E &= F_2(w, \tau, \varepsilon) \{ QE + \mu(e^{j\varepsilon w} - 1)BT - j\varepsilon w \kappa_1 E \} = \\ &= F_2(w, \tau, \varepsilon) \left\{ j\varepsilon w (\mu B - \kappa_1 I)E + \mu \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} BE \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложение (24), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w, \tau)}{\partial \tau} RE &= \Phi_2(w, \tau) (R + j\varepsilon w f) \left\{ j\varepsilon w (\mu B - \kappa_1 I)E + \mu \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} BE \right\} = \\ &= \Phi_2(w, \tau) \left\{ j\varepsilon w R(\mu B - \kappa_1 I)E + \mu \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} RBE + (j\varepsilon w)^2 f(\mu B - \kappa_1 I)E \right\} + O(\varepsilon^3) = \\ &= \Phi_2(w, \tau) \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} \{ \mu RBE + 2f \cdot \mu BE \} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Из этого равенства запишем уравнение, определяющее скалярную функцию $\Phi_2(w, \tau)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w, \tau)}{\partial \tau} = \Phi_2(w, \tau) \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2,$$

где

$$\kappa_2 = \mu RBE + 2\mu fBE = \kappa_1 + 2\mu fBE. \quad (27)$$

Очевидно, что $\Phi_2(w, \tau)$ имеет вид

$$\Phi_2(w, \tau) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\}.$$

Подставляя это выражение в (24), получим

$$\begin{aligned} F_2(w, \tau, \varepsilon)E &= \Phi_2(w, \tau)\{RE + j\varepsilon w fE\} + O(\varepsilon^3) = \\ \Phi_2(w, \tau) + O(\varepsilon^3) &= \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Выполнив здесь обратные к (22) замены, получим

$$H_2(u, \tau)E = \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 \tau \right\} + O\left(\frac{1}{T}\right). \quad (28)$$

Подставляя это выражение в (19), запишем асимптотику $h_2(u, t)$ второго порядка для характеристической функции величины $n(t)$

$$h_2(u, t) = \exp \left\{ ju \kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2} \kappa_2 t \right\}. \quad (29)$$

Здесь κ_2 определяется равенством (27), а вектор f определяется системой (25) – (26).

Отсюда следует, что при больших t $D\{t\} = \kappa_2 t$. Очевидно, что если $fBE = -f(0) \neq 0$, то поток $n(t)$ не пуассоновский, так как нарушено его необходимое условие $M\{n(t)\} \neq D\{n(t)\}$.

6.2. Нахождение вектора f

В явном виде система (25) имеет вид

$$\begin{aligned} -\lambda(1-r_0)f(0) + \mu f(1) + \mu R(1) - \kappa_1 R(0) &= 0, \\ \lambda(1-r_0)f(0) - [\lambda(1-r_1) + \mu]f(1) + \mu f(2) + \mu R(2) - \kappa_1 R(1) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \lambda(1-r_{i-1})f(i-1) - [\lambda(1-r_i) + \mu]f(i) + \mu f(i+1) + \mu R(i+1) - \kappa_1 R(i) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (30)$$

Суммируя первые i уравнений этой системы, получим

$$\begin{aligned} -\lambda(1-r_0)f(0) + \mu f(1) + \mu R(1) - \kappa_1 R(0) &= 0, \\ -\lambda(1-r_1)f(1) + \mu f(2) + \mu[R(1) + R(2)] - \kappa_1[R(0) + R(1)] &= 0, \\ -\lambda(1-r_{i-1})f(i-1) + \mu f(i) + \mu \sum_{v=1}^i R(v) - \kappa_1 \sum_{v=0}^{i-1} R(v) &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (31)$$

откуда получаем рекуррентное соотношение для $f(i)$:

$$f(i) = \rho(1-r_{i-1})f(i-1) + \frac{\kappa_1}{\mu} \sum_{v=0}^{i-1} R(v) - \sum_{v=1}^i R(v). \quad (32)$$

Введём обозначение

$$\begin{aligned}
 b(i) &= \frac{\kappa_1}{\mu} \sum_{v=0}^{i-1} R(v) - \sum_{v=1}^i R(v) = (1 - R(0)) \sum_{v=0}^{i-1} R(v) - \sum_{v=1}^i R(v) = \\
 &= R(0) - R(i) - R(0) \sum_{v=0}^{i-1} R(v) = R(0) \sum_{v=i}^{\infty} R(v) - R(i).
 \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, (32) принимает вид

$$f(i) = \rho(1 - r_{i-1})f(i-1) + b(i), \quad \rho = \lambda/\mu, \quad b(i) = R(0) \sum_{v=i}^{\infty} R(v) - R(i).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \rho(1 - r_0)f(0) + b(1), \\
 f(2) &= \rho(1 - r_1)f(1) + b(2) = \rho(1 - r_1)[\rho(1 - r_0)f(0) + b(1)] + b(2) = \\
 &= \rho(1 - r_1)\rho(1 - r_0)f(0) + \rho(1 - r_1)b(1) + b(2), \\
 f(3) &= \rho(1 - r_2)f(2) + b(3) = \\
 &= \rho(1 - r_2)[\rho(1 - r_1)\rho(1 - r_0)f(0) + \rho(1 - r_1)b(1) + b(2)] + b(3) = \\
 &= \rho(1 - r_2)\rho(1 - r_1)\rho(1 - r_0)f(0) + \rho(1 - r_2)\rho(1 - r_1)b(1) + \rho(1 - r_2)b(2) + b(3).
 \end{aligned}$$

В общем виде получаем

$$f(i) = f(0)\rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k) + \sum_{v=1}^{i-1} b(v) \prod_{k=v}^{i-1} (1 - r_k) + b(i). \quad (34)$$

Для нахождения $f(0)$ используем условие $fE = 0$, то есть $\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ f(0)\rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k) + \sum_{v=1}^{i-1} b(v) \prod_{k=v}^{i-1} (1 - r_k) + b(i) \right\} = \\
 &= f(0) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k) \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{v=1}^{i-1} b(v) \prod_{k=v}^{i-1} (1 - r_k) + b(i) \right\}.
 \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда имеем окончательно

$$-f(0) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{v=1}^{i-1} b(v) \prod_{k=v}^{i-1} (1 - r_k) + b(i) \right\}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \prod_{k=0}^{i-1} (1 - r_k)} = fBE, \quad (36)$$

что и определяет κ_2 , а вместе с ним и $D\{n(t)\}$.

6.3. Частный случай

Пусть
$$r_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i < N, \\ 1, & \text{если } i = N. \end{cases}$$

В этом случае

$$R(i) = R(0)\rho^i, \quad R(0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \rho^k} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 f(i) &= f(0)\rho^i + \sum_{v=1}^{i-1} b(v) + b(i) = f(0)\rho^i + \sum_{v=1}^i b(v), \quad i \leq N, \\
 0 &= \sum_{i=0}^N f(i) = f(0) + f(0)\sum_{i=1}^N \rho^i + \sum_{i=0}^N \sum_{v=0}^i b(v) = \\
 &= f(0)\sum_{i=0}^N \rho^i + \sum_{v=0}^N b(v)\sum_{i=v}^N 1 = f(0)\sum_{i=0}^N \rho^i + \sum_{v=0}^N (N+1-v)b(v). \\
 \text{Отсюда} \quad -f(0) &= \frac{\sum_{i=0}^N (N+1-i)b(i)}{\sum_{i=0}^N \rho^i}.
 \end{aligned}$$

Вычислим теперь величины $b(i)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 b(i) &= R(0)\sum_{v=i}^N R(v) - R(i) = R^2(0)\sum_{v=i}^N \rho^v - R(0)\rho^i = R^2(0)\frac{\rho^i - \rho^{N+1}}{1-\rho} - R(0)\rho^i = \\
 &= R(0)\rho^i \left\{ R(0)\frac{1-\rho^{N+1-i}}{1-\rho} - 1 \right\} = R(0)\rho^i \left\{ \frac{1-\rho^{N+1-i}}{1-\rho^{N+1}} - 1 \right\} = R(0)(\rho^i - 1)\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}.
 \end{aligned}$$

Итак, окончательно,

$$-f(0) = \frac{\sum_{i=0}^N (N+1-i)b(i)}{\sum_{i=0}^N \rho^i}, \quad b(i) = R(0)(\rho^i - 1)\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}. \quad (37)$$

Если $f(0) \neq 0$, то выходящий поток не является пуассоновским.

Заключение

Построена математическая модель торговой точки в виде системы массового обслуживания типа $M/M/\infty$ с отказами от постановки в очередь. Выполнено исследование выходящего потока обслуженных требований. Определено среднее число обслуженных заявок и построено финальное распределение вероятностей числа заявок в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
2. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
3. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.

Статья представлена кафедрой программной инженерии факультета информатики Томского государственного университета. Поступила в редакцию 13 октября 2008 г.