УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 517.997

Н.С. Дёмин, Е.В. Кулешова

ПРИНЦИП МАГИСТРАЛИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА НАКОПЛЕНИЕ И ПОТРЕБЛЕНИЕ

На классе линейно-однородных производственных функций приводится исследование задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени при наличии ограничений на накопление и потребление с учетом производственных затрат и налоговых отчислений. Основной результат формулируется в форме «Магистральной теоремы». Получено «Золотое правило накопления», определяющее распределение произведенного экономикой продукта на магистрали. Результаты конкретизируются для случая производственной функции Кобба – Дугласа.

Ключевые слова: *оптимальное управление*, *односекторная экономика*, *магистральная теорема*, *золотое правило накопления*, *производственная функция*.

Анализ динамических моделей макроэкономики характеризуется следующими двумя основными проблемами [1 – 10]: 1) экономическое развитие рассматривается как научно-технический прогресс; 2) распределение произведенного экономикой продукта рассматривается как некоторая оптимальная задача. Первая проблема сводится к нахождению производственных функций, соответствующих какому-то типу научно-технического прогресса (нейтральность по Хиксу, Харроду, Солоу и более сложного вида нейтральности). Вторая проблема сводится к решению на заданном классе производственных функций некоторой задачи оптимального управления.

Основной задачей управления односекторной (агрегированной, однопродуктовой) экономикой на конечном интервале времени является задача максимизации потребления за весь плановый период при выполнении условия экономического горизонта в конечный момент времени. При этом решение ищется в предположении, что на отдельных временных интервалах планового периода на накопление может направляться весь произведенный экономикой продукт либо не направляться вообще, когда весь продукт направляется на потребление. Решение получается в форме «Магистральной теоремы», суть которой состоит в том, что выход экономики на магистраль и сход экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта происходит максимально быстро за счет направления всего продукта целиком либо только на потребление, либо только на накопление, а нахождению экономики на магистрали соответствует распределение валового продукта на накопление и потребление согласно принципа «Золотого правила накопления» [1 – 9].

В данной работе рассматривается задача максимизации интегрального (т.е. за весь плановый период) потребления с дисконтированием при предположениях, в большей мере соответствующих сути макроэкономического процесса, а именно: 1) накопление и потребление ограничены сверху и снизу, т.е. даже на отдельных интервалах планового периода целиком весь произведенный продукт не может направляться только на накопление либо только на потребление; 2) суммарно на накопление и потребление идет только часть произведенного экономикой продукта после изъятия из него некоторой части на налоги и производственные затраты.

Замечание 1. Термин «магистраль» в данной работе соответствует тому смыслу, который он имеет в теории экономического роста [1 – 9]. В [11, 12] этому термину придается более общий смысл.

1. Постановка задачи

Пусть на интервале времени $t \in [0, T]$, составляющем плановый период, задано соотношение $Y(t) = F(K(t), L(t))$, где $Y(t)$ – произведенный экономикой продукт, $K(t)$ – основные фонды (капитал), $L(t)$ – трудовые ресурсы, $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция [1 – 5], причем $L(t) = L_0 \exp\{\lambda t\}$, $L_0 > 0$, $\lambda > 0$. Весь продукт делиться на четыре части в виде

$$Y(t) = \Psi(t) + I(t) + C(t) + N(t), \tag{1}$$

где $I(t)$ – накопление, $C(t)$ – потребление, $N(t)$ – налоговые отчисления, $\Psi(t)$ – производственные затраты с нормой материалоемкости γ, т.е. $\Psi(t) = \gamma Y(t)$, $0 \le \gamma < 1$. Пусть $D(t)$ – прибыль, облагаемая налогом со ставкой u, такой, что $0 \le u < 1$. Тогда $D(t) = Y(t) - \Psi(t) = (1-\gamma)Y(t)$, $N(t) = uD(t) = (1-\gamma)uY(t)$, а $G(t) = D(t) - N(t) = (1-\gamma)(1-u)Y(t)$ является прибылью, которая осталась после выплаты налогов и направляется на накопление и потребление, т.е.

$$G(t) = I(t) + C(t) = (1-\gamma)(1-u)Y(t). \tag{2}$$

Пусть $s(t)$ – норма накопления, $0 \le s_0 \le s(t) \le s_1 \le 1$, а $\tilde{s}(t) = (1 - s(t))$ – норма потребления, т.е.

$$I(t) = s(t)G(t) = (1-\gamma)(1-u)s(t)Y(t), \tag{3}$$

$$C(t) = (1 - s(t))G(t) = (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))Y(t).$$

Если $\mu > 0$ есть коэффициент амортизации основных фондов, то для $K(t)$ справедливо дифференциальное уравнение $\dot{K}(t) = I(t) - \mu K(t)$ [1, 2, 4], которое с учетом (3) принимает вид

$$\dot{K}(t) = (1-\gamma)(1-u))s(t)F(K(t), L(t)) - \mu K(t). \tag{4}$$

Перейдя к нормированным (удельным) относительно трудовых ресурсов величинам, получаем с учетом линейной однородности $F(K(t),L(t))$ [1 – 5] ($k(t)$ – фондовооруженность труда, $y(t)$ – средняя производительность труда, $i(t)$, $c(t)$, $n(t)$ – удельные накопление, потребление и налоговые отчисления, приходящиеся на единицу трудовых ресурсов):

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{F(K(t), L(t))}{L(t)} = f(k(t)),\ k(t) = \frac{K(t)}{L(t)},\ i(t) = \frac{I(t)}{L(t)},$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)},\ n(t) = \frac{N(t)}{L(t)}. \tag{5}$$

Тогда балансовое соотношение (1) с учетом (3), (5) преобразуется к виду

$$y(t) = \gamma y(t) + i(t) + c(t) + n(t); \tag{6}$$

$$i(t) = (1-\gamma)(1-u)s(t)y(t), c(t) = (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))y(t), n(t) = (1-\gamma)uy(t). \tag{7}$$

Приняв в качестве критерия оптимальности удельное потребление с дисконтированием за весь плановый период, приходим к следующей задаче оптимального управления [13]:

$$\dot{k}(t) = (1-\gamma)(1-u)s(t)f(k(t)) - \nu k(t); \tag{8}$$

$$t \in [0,T],\ k(0) = k_0,\ k(T) \ge k_T > 0; \tag{9}$$

$$J = \int_0^T (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt \to \max_{\{s(t)\}}; \tag{10}$$

$$0 \le s_0 \le s(t) \le s_1 \le 1,$$

$$\nu = \mu + \lambda,\ \mu > 0,\ \lambda > 0,\ \delta > 0,\ 0 \le \gamma < 1,\ 0 \le u < 1. \tag{11}$$

Уравнение (8) следует из (4) с учетом (5) и того, что $L(t) = L_0 \exp\{\lambda t\}$. Критерий (10), где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования, следует из (7). Условие $k(T) \ge k_T > 0$ в (9) является условием экономического горизонта, которое определяет, что к моменту окончания планового периода T уровень фондовооруженности $k(T)$ не может опуститься ниже величины k_T. Остальные условия очевидны.

Замечание 2. Считаем, что для $f(k)$выполняются неоклассические условия [1, 2 ,4, 5]:

$$1)\ f(k) > 0, k > 0;\ f(k) = 0, k = 0;$$

$$2)\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0; \tag{12}$$

$$3)\ \lim f'(k) = \infty, k \downarrow 0;\ \lim f'(k) = 0, k \uparrow \infty.$$

Кроме того, потребуем выполнения дополнительно условий

$$0 \le s_0 < \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\alpha(k) < \frac{\nu}{(\nu+\delta)} < s_1 \le 1; \tag{13}$$

$$\alpha(k) = kf'(k)/f(k) \tag{14}$$

и является коэффициентом эластичности по основным фондам. Так как для линейно-однородных производственных функций $\alpha(k)$ обладает свойством $0 < \alpha(k) < 1$, то условия (13) являются корректными.

2. Предварительные результаты

Лемма 1. Если $s(t)$ – оптимальное управление, то

$$s(t) = s_1,\ q(t) > 1;\quad s(t) = s_0,\ q(t) < 1;\quad s(t) \in [s_0; s_1],\ q(t) = 1. \tag{15}$$

Функция $q(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{q}(t) = [(\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s(t)f'(k(t))]q(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s(t))f'(k(t)), \tag{16}$$

где $f'(k(t)) = df(k)/dk\,|_{k=k(t)}$, решения которого удовлетворяют условиям

$$q(T) \ge 0,\ q(T)[k(T) - k_T] = 0. \tag{17}$$

Лемма 2. Функция $q(t)$ неотрицательная, то есть $q(t) \ge 0,\ t \in [0,T]$.

Лемма 3. Если $q(t) > 1$, чему соответствует значение $s(t) = s_1$, то области знакопостоянства $\dot{k}(t)$ и $\dot{q}(t)$ имеют вид

$$\dot{k} = 0, k = k_1; \dot{k} > 0, k < k_1; \dot{k} < 0, k > k_1; \tag{18}$$

$$\dot{q} = 0, q = \Phi_1(k); \dot{q} < 0, q < \Phi_1(k), k < k^*; \dot{q} > 0, q > \Phi_1(k), k < k^*; \tag{19}$$

$$\dot{q} > 0, k > k^*.$$

Значения $k = k_1$ и $k = k^*$, такие, что $k^* < k_1$, являются единственными корнями соответственно уравнений

$$k_1 : f(k) = \frac{\nu}{(1-\gamma)(1-u)s_1} k\ ; \tag{20}$$

$$k^* : f'(k) = \frac{\nu + \delta}{(1-\gamma)(1-u)}. \tag{21}$$

Для $k \le k^*$ функция

$$\Phi_1(k) = \frac{(1-\gamma)(1-u)(1-s_1) f'(k)}{(\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1 f'(k)} \tag{22}$$

является убывающей и при этом $\Phi_1(k) > 1$ для $k \in [0; k^*)$, $\Phi_1(k^*) = 1$.

Лемма 4. Если $q(t) < 1$, чему соответствует значение $s(t) = s_0$, то области знакопостоянства $\dot{k}(t)$ и $\dot{q}(t)$ имеют вид

$$\dot{k} = 0, k = k_2;\ \ \dot{k} < 0, k > k_2;\ \ \dot{k} > 0, k < k_2; \tag{23}$$

$$\dot{q} = 0, q = \Phi_0(k);\ \ \dot{q} > 0, q > \Phi_0(k), k > k^*;\ \ \dot{q} < 0, q < \Phi_0(k), k > k^*; \tag{24}$$

$$\dot{q} < 0, k < k^*.$$

Значения $k = k_2$ и $k = k^*$, такие, что $k^* > k_2$, являются единственными корнями соответственно уравнения

$$k_2 : f(k) = \frac{\nu}{(1-\gamma)(1-u)s_0} k \tag{25}$$

и уравнения (21). Для $k \ge k^*$ функция

$$\Phi_0(k) = \frac{(1-\gamma)(1-u)(1-s_0) f'(k)}{(\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k)} \tag{26}$$

является убывающей и при этом $\Phi_0(k) < 1$ для $k > k^*$, $\Phi_0(k^*) = 1$.

Лемма 5. На плоскости (k,q) особая точка $X^* = (k^*;1)$ является стационарным решением системы (8), (16). При этом $s(t) \equiv s^* = const$ определяется двумя эквивалентными формулами

$$s^* = \frac{\nu k^*}{(1-\gamma)(1-u) f(k^*)}; \tag{27}$$

$$s^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - \frac{\delta k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)} \tag{28}$$

и удовлетворяет условию $$s_0 < s^* < s_1, \tag{29}$$

которое раскрывает неопределенность третьего соотношения в (15).

Следствие 1. Пусть $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ являются коэффициентами эластичности соответственно по основным фондам и трудовым ресурсам. Тогда s^* имеет следующие эквивалентные (27), (28) представления

$$s^* = \alpha(k^*) - \frac{\delta k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)}; \tag{30}$$

$$s^* = \frac{\nu}{\nu+\delta}\alpha(k^*). \tag{31}$$

Так как для линейно-однородных производственных функций [2]

$$\alpha(k) = \frac{kf'(k)}{f(k)}, \beta(k) = 1-\alpha(k), \tag{32}$$

то формулы (30), (31) следуют в результате использования (32) и (21) в (27), (28).

Следствие 2. Норма потребления $\tilde{s}(t) = 1 - s(t)$, для которой выполняются условия

$$0 \le \tilde{s}_0 \le \tilde{s}(t) \le \tilde{s}_1 \le 1, \tilde{s}_0 = 1 - s_1, \tilde{s}_1 = 1 - s_0, \tag{33}$$

в особой точке определяется следующими эквивалентными формулами

$$\tilde{s}^* = 1 - \frac{\nu k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)}; \tag{34}$$

$$\tilde{s}^* = 1 - \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} + \frac{\delta k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)}; \tag{35}$$

$$\tilde{s}^* = \beta(k^*) + \frac{\delta k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)}; \tag{36}$$

$$\tilde{s}^* = \frac{\delta}{(\nu+\delta)} + \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\beta(k^*) \tag{37}$$

и удовлетворяет условию $$\tilde{s}_0 \le \tilde{s}^* \le \tilde{s}_1. \tag{38}$$

Соотношения (34) – (38) очевидным образом следуют из (27) – (33).

3. Магистральная теорема

Исходя из доказанных результатов, сформулируем алгоритм управления, предполагая достаточно общие условия: 1) время управления T достаточно большое (см.п.5); 2) интервал принадлежности фондовооруженности $k \in [0, k_1]$; 3) k_0, k^*, k_T находятся между собой в произвольных соотношениях с дополнительным условием $k_T > k_2$.

На рис. 1 в соответствии с проведенными в предыдущем пункте исследованиями жирными линиями выделены области знакопостоянства $\dot{k}$ и $\dot{q}$ (области I – V), а также изображены типовые фазовые траектории (экстремали) $X(t) = \{k(t); q(t)\}$ под номерами *1 – 7*. Траектории, входящие в особую точку $X^* = (k^*;1)$ и выходящие из нее, обозначены соответственно Γ_0 и Γ_T. При этом $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^3$, $\Gamma_T = \Gamma_T^2 \cup \Gamma_T^4$. Очевидно, как и в задаче Рамсея [2, 4], алгоритм не может реализоваться на траекториях 1 – 7, так как при этом нарушается одно или несколько оговоренных условий. Таким образом, аналогично задаче Рамсея алгоритм управления может реализоваться только путем перевода $X(t)$ в некоторый момент времени $t = T^*$ в особую точу X^*, что соответствует выходу экономики на магистраль, и перевода $X(t)$ на интервале времени $t \in (T^{**}, T]$ в точку $X(T) = (k(T); q(T))$, такую, что $k(T) = k_T$, что соответствует сходу экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта $k(T) \ge k_T > 0$. Согласно приведенным рассуждениям, алгоритм управления выглядит следующим образом (см. рис. 1):

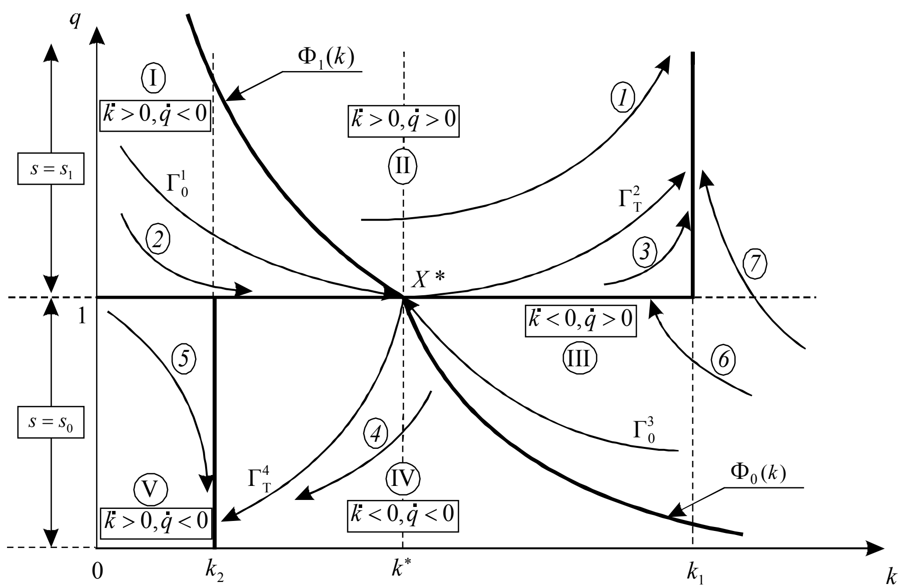

Рис. 1. Типовые фазовые траектории

1. Если $k_0 < k^*$, то подбирается такое значение $q(0) = q_0$, чтобы точка $(k_0, q_0) \in \Gamma_0^1$, и с управлением $s(t) = s_1$ по траектории $X(t) = \Gamma_0^1$ к моменту времени $t = T^*$ точка $(k(t); q(t))$ переводиться в особую точку $X^* = (k^*;1)$, повышая при этом значение $k(t)$ от k_0 до $k(T^*) = k^*$.

2. Управлению $s(t)$ в момент времени $t = T^*$ присваивается значение s^* (см. (27), (28), (30), (31)).

3. В момент времени $t = T^*$ управлению $s(t)$ присваивается значение $s(t) = s_1$, если $k_T > k^*$, и значение $s(t) = s_0$, если $k_T < k^*$, и по траекториям соответственно Γ_T^2 или Γ_T^4 к моменту времени $t = T$ точка $(k(t); q(t))$ переводится в точку $X(T) = (k(T); q(T))$, такую, что $k(T) = k_T$, соответственно повышая либо понижая значение $k(t)$ от $k(T^{**}) = k^*$ до $k(T) = k_T$. Выбор момента времени T^{**} осуществляется таким образом, чтобы $T^{**} = T - \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ – время движения по Γ_T.

4. Если $k_0 > k^*$, то подбирается такое значение $q(0) = q_0$, чтобы точка $(k_0, q_0) \in \Gamma_0^3$, и с управлением $s(t) = s_0$ по траектории $X(t) = \Gamma_0^3$ к моменту времени $t = T^*$ точка $(k(t); q(t))$ переводится в особую точку $X^* = (k^*;1)$, понижая при этом значение $k(t)$ от k_0 до $k(T^*) = k^*$.

5. Пункты 2 и 3 алгоритма повторяются.

Введем для $k' < k''$, $\tau_1 < \tau_2$ по обозначению величины, смысл которых следующий: $T_1(k', k'')$ равно времени возрастания фондовооруженности $k(t)$ от значения k' до значения k'', когда $s(t) = s_1$; $T_0(k', k'')$ равно времени убывания фондовооруженности $k(t)$ от значения k'' до значения k', когда $s(t) = s_0$; $J^1(\tau_1, \tau_2)$, $J^0(\tau_1, \tau_2)$, $J^*(\tau_1, \tau_2)$ равны значениям критерия качества на интервале $t \in [\tau_1, \tau_2]$, когда соответственно $s(t) = s_1$, $s(t) = s_0$, $s(t) = s^*$. Тогда непосредственно из (8), (10) с учетом результатов лемм 3 – 5 следует

$$T_1(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{(1-\gamma)(1-u)s_1 f(k) - \nu k}; \tag{39}$$

$$T_0(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{\nu k - (1-\gamma)(1-u)s_0 f(k)}; \tag{40}$$

$$J^1(\tau_1, \tau_2) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_1)\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt; \tag{41}$$

$$J^0(\tau_1, \tau_2) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_0)\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(k(t))\exp\{-\delta t\}dt; \tag{42}$$

$$J^*(\tau_1, \tau_2) = \frac{(1-\gamma)(1-u)(1-s^*)f(k^*)}{\delta}[\exp\{-\delta\tau_1\} - \exp\{-\delta\tau_2\}]. \tag{43}$$

Таким образом, основной результат в форме «Магистральной теоремы» формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 1. При достаточно большом времени управления T решение задачи имеет следующий вид.

1. Интервал времени $[0,T]$ разбивается на три интервала, т.е.

$$[0,T] = [0,T^*) \cup [T^*, T^{**}] \cup (T^{**}, T].$$

2. Управление $s(t) \in \{s_1; s_0; s^*\}$, т.е. являются кусочно-постоянным с тремя возможными значениями.

3. На магистральном интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$ $s(t) = s^*$, которое определяется эквивалентными формулами (27), (28), (30), (31), а фондовооруженность $k(t)$ сохраняет постоянное значение k^*, являющееся единственным корнем уравнения (21).

4. На начальном интервале времени $t \in [0, T^*)$, когда происходит выход экономики на магистраль, $s(t) = s_1$, если $k_0 < k^*$, и $s(t) = s_0$, если $k_0 > k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^*.

5. На конечном интервале времени $t \in (T^{**}, T]$, когда происходит сход экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта $k(T) = k_T$, $s(t) = s_1$, если $k_T > k^*$, и $s(t) = s_0$, если $k_T < k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T.

6. Значения T^*, T^{**}, J определяются следующими формулами:

a) если $k_0 < k^*$, $k_T < k^*$, то

$$T^* = T_1(k_0, k^*),\ T^{**} = T - T_0(k_T, k^*),$$

$$J = J^1(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \tag{44}$$

b) если $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$, то

$$T^* = T_1(k_0, k^*),\ T^{**} = T - T_1(k^*, k_T),$$

$$J = J^1(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^1(T^{**}, T); \tag{45}$$

c) если $k_0 > k^*$, $k_T < k^*$, то

$$T^* = T_0(k^*, k_0),\ T^{**} = T - T_0(k_T, k^*),$$

$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^0(T^{**}, T); \tag{46}$$

d) если $k_0 > k^*$, $k_T > k^*$, то

$$T^* = T_0(k^*, k_0),\ T^{**} = T - T_1(k^*, k_T),$$

$$J = J^0(0, T^*) + J^*(T^*, T^{**}) + J^1(T^{**}, T). \tag{47}$$

Следующее утверждение определяет «Золотое правило накопления» [1, 2, 4, 5, 9] в рассматриваемой задаче, а именно, каким образом произведенный экономикой продукт $Y^*(t) = F(K^*(t), L(t))$, где $K^*(t) = k^* L(t)$, как сумма доходов с основных фондов $Y_K^*(t)$ и трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$ распределяется на магистрали между накоплением $I^*(t)$, потреблением $C^*(t)$, налоговыми отчислениями $N^*(t)$ и материальными затратами $\Psi^*(t)$.

Теорема 2. На интервале времени $t \in [T^*, T^{**}]$, когда экономика находится на магистрали и $s(t) = s^*$, $k(t) = k^*$:

1) на накопление используется $(1–\gamma)(1–u)$ часть дохода с основных фондов $Y_K^*(t)$ минус величина $\delta K^*(t)$, т.е.

$$I^*(t) = (1-\gamma)(1-u)Y_K^*(t) - \delta K^*(t); \tag{48}$$

$$Y_K^*(t) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial K^*(t)} K^*(t); \tag{49}$$

2) на потребление используется (1–γ)(1–*u*) часть дохода с трудовых ресурсов $Y_L^*(t)$ плюс величина $\delta K^*(t)$, т.е.

$$C^*(t) = (1-\gamma)(1-u)Y_L^*(t) + \delta K^*(t); \tag{50}$$

$$Y_L^*(t) = \frac{\partial F(K^*(t), L(t))}{\partial L(t)} L(t); \tag{51}$$

3) на налоговые отчисления используется сумма [(1–γ)*u*] частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$N^*(t) = (1-\gamma)u[Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = (1-\gamma)uF(K^*(t), L(t)); \tag{52}$$

4) материальные затраты равны сумме оставшихся [1 – (1 – γ)(1 – *u*) – (1 – γ)*u*] частей доходов с основных фондов и трудовых ресурсов, т.е.

$$\Psi^*(t) = [1-(1-\gamma)(1-u) - (1-\gamma)u][Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = \gamma F(K^*(t), L(t)). \tag{53}$$

4. Случай производственной функции Кобба – Дугласа

Широко используемой в исследованиях линейно-однородной производственной функцией является функция Кобба – Дугласа [1, 2, 4, 5]

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta},\ f(k) = Ak^{\alpha},\ A>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1, \tag{54}$$

где α – коэффициент эластичности по основным фондам, β – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам. Конкретизируем для нее теорему 1.

Теорема 3. В случае производственной функции Кобба – Дугласа решение задачи в форме «Магистральной теоремы» имеет следующий вид:

1. Для s^*, $\tilde{s}^*$, k^*, k_1, k_2 имеют место формулы

$$s^* = \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\alpha,\ \tilde{s}^* = \frac{\delta}{(\nu+\delta)} + \frac{\nu}{(\nu+\delta)}\beta; \tag{55}$$

$$k^* = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)\alpha A}{(\nu+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$k_1 = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},\ k_2 = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{56}$$

2. Для T^* и T^{**} имеют место формулы (44) – (47), где

$$T_1(k',k'') = \frac{1}{\nu(1-\alpha)} \ln \frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu(k')^{1-\alpha}}{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu(k'')^{1-\alpha}},$$

$$T_0(k',k'') = \frac{1}{\nu(1-\alpha)} \ln \frac{\nu(k'')^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A}{\nu(k')^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A}. \tag{57}$$

3. На интервале $t \in [0, T^*)$:

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_0^{1-\alpha}]\exp\{-\nu(1-\alpha)t\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu (k^*)^{1-\alpha}]\exp\{\nu(1-\alpha)(T^* - t)\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$k_0 < k^*; \tag{58}$$

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu k_0^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]\exp\{-\nu(1-\alpha)t\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu (k^*)^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]\exp\{\nu(1-\alpha)(T^* - t)\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$k_0 > k^*. \tag{59}$$

4. На интервале $t \in (T^{**}, T]$:

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu (k^*)^{1-\alpha}]\exp\{-\nu(1-\alpha)(t - T^{**})\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - [(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_T^{1-\alpha}]\exp\{\nu(1-\alpha)(T - t)\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$k_T > k^*; \tag{60}$$

$$k(t) = \left[\frac{s(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu (k^*)^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]\exp\{-\nu(1-\alpha)(t - T^{**})\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)s_0 A + [\nu k_T^{1-\alpha} - (1-\gamma)(1-u)s_0 A]\exp\{\nu(1-\alpha)(T - t)\}}{\nu} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$k_T < k^*. \tag{61}$$

5. Для $J^*(T^*, T^{**})$, $J^1(0, T^*)$, $J^1(T^{**}, T)$, $J^0(0, T^*)$, $J^0(T^{**}, T)$ имеют место формулы:

$$J^*(T^*, T^{**}) = \frac{(1-\gamma)(1-u)(1-s^*)A(k^*)^\alpha}{\delta}\left[\exp\{-\delta T^*\} - \exp\{-\delta T^{**}\}\right]; \tag{62}$$

$$J^1(0, T^*) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_1)A\int_0^{T^*} k^\alpha(t; s_1)\exp\{-\delta t\}dt; \tag{63}$$

$$J^1(T^{**},T) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_1)A\int\limits_{T^{**}}^{T} k^{\alpha}(t;s_1)\exp\{-\delta t\}dt; \tag{64}$$

$$J^0(0,T^{*}) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_0)A\int\limits_{0}^{T^{*}} k^{\alpha}(t;s_0)\exp\{-\delta t\}dt; \tag{65}$$

$$J^0(T^{**},T) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_0)A\int\limits_{T^{**}}^{T} k^{\alpha}(t;s_0)\exp\{-\delta t\}dt, \tag{66}$$

где $k(t;s_1)$ и $k(t;s_0)$ определяются соответственно формулами (58), (60) и (59), (61).

5. Анализ результатов

1. Как и в классической задаче при отсутствии ограничений на накопление и потребление ($s_0 = 0,\ s_1 = 1$), а также налоговых отчислений ($u = 0$) и производственных затрат ($\gamma = 0$), в рассмотренной задаче при наличии перечисленных факторов суть решения в форме «Магистральной теоремы» (теорема 1) заключается в наискорейшем выводе экономики на магистраль, где осуществляется сбалансированный рост и распределение продукта происходит в соответствии с «Золотым правилом накопления» (теорема 2), и наискорейшем сходе экономики с магистрали для удовлетворения условия экономического горизонта в момент T окончания планового периода. Подобный режим функционирования экономики осуществляется за счет использования на интервалах времени $t \in [0,T^{*})$ и $t \in (T^{**},T]$ выхода экономики на магистраль и схода экономики с магистрали только максимальной s_1 ($k_0 < k^{*},\ k_T > k^{*}$) либо только минимальной s_0 ($k_0 > k^{*},\ k_T < k^{*}$) норм накопления в зависимости от соотношения между начальным k_0, конечным k_T и магистральным k^{*} значениями фондовооруженности. Тем самым обеспечивается максимально возможное время нахождения экономики на магистрали.

2. Условием существования решения в форме «Магистральной теоремы» является условие $\Delta T^{*} = T^{**} - T^{*} > 0$. Так как $T^{**} = T - \tilde{T}$, где $\tilde{T}$ равно времени достижения траекторией $k(t)$ значения k_T на интервале времени $t \in (T^{**},T]$, то данное условие принимает вид $T > T^{*} + \tilde{T}$, а именно (см. п. 6 теоремы 1):

$$T > T_1(k_0,k^{*}) + T_0(k_T,k^{*}),\ k_0 < k^{*},\ k_T < k^{*}; \tag{67}$$

$$T > T_1(k_0,k^{*}) + T_1(k^{*},k_T),\ k_0 < k^{*},\ k_T > k^{*}; \tag{68}$$

$$T > T_0(k^{*},k_0) + T_0(k_T,k^{*}),\ k_0 > k^{*},\ k_T < k^{*}; \tag{69}$$

$$T > T_0(k^{*},k_0) + T_1(k^{*},k_T),\ k_0 > k^{*},\ k_T > k^{*}. \tag{70}$$

3. Суть «Золотого правила накопления» в рассмотренной задаче (теорема 2) состоит в том, что оно определяет единственный способ использования валового продукта на магистрали, обеспечивающий максимизацию потребления в течение всего планового периода $t \in [0,T]$ при обязательном обеспечении выполнения условия экономического горизонта, которое не допускает, чтобы к моменту оконча-

ния планового периода $t = T$ значения фондовооруженности $k(T)$ опустилось ниже заданной величины k_T.

4. Формулы (31), (37) определяют вклад коэффициентов эластичности по основным фондам $\alpha(k^*)$ и трудовым ресурсам $\beta(k^*)$ в структуру накопления и потребления на магистрали, т.е. определяют, в какой степени накопление и потребление зависят от эффективности факторов производства. Из этих формул следует, что s^* и $\tilde{s}^*$ являются возрастающими функциями соответственно α и β. Поскольку с ростом коэффициента эластичности увеличивается производительность, т.е. эффективность соответствующего фактора производства, то это означает, что накопление возрастает с ростом эффективности основных фондов, а потребление – соответственно с ростом эффективности трудовых ресурсов, что согласуется с «Золотым правилом накопления» (теорема 2), согласно которому накопление $I^*(t)$ формируется на основе дохода с основных фондов, а потребление $C^*(t)$ – на основе дохода с трудовых ресурсов.

5. Устойчивый экономический рост, когда за весь плановый период времени $t \in [0, T]$ не происходит уменьшения фондовооруженности $k(t)$, осуществляется, согласно теореме 1, в ситуации, когда $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$. В этом случае на интервалах выхода экономики на магистраль $t \in [0, T)$ и схода экономики с магистрали $t \in (T^{**}, T]$ используется максимальная норма накопления $s(t) = s_1$, а условие существования решения в форме «Магистральной теоремы» имеет вид (68) в общем случае и вид

$$T > \frac{1}{\nu(1-\alpha)} \ln \frac{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_0^{1-\alpha}}{(1-\gamma)(1-u)s_1 A - \nu k_T^{1-\alpha}} \tag{71}$$

в случае производственной функции Кобба – Дугласа, что следует из (57). Условием экономического роста являются два эквивалентных условия:

$$dY(t)/dt > 0, \;\; \hat{Y}(t) > 0, \tag{72}$$

где $\hat{Y}(t) = [1/Y(t)][dY(t)/dt]$ – относительная скорость роста валового продукта. Так как $Y(t) = F(K(t),L(t))$, $L(t) = L_0 e^{\lambda t}$ и $K(t) = k(t)L(t)$, то

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left[\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K(t)} \frac{dK(t)}{dt} + \lambda \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} L(t)\right]. \tag{73}$$

Непосредственно получаем, что $\dot{K}(t) = \lambda K(t) + \dot{k}(t) L(t)$. Так как $\dot{k}(t) > 0$ на интервалах выхода экономики на магистраль $t \in [0, T^*)$ и схода с магистрали $t \in (T^{**}, T]$ в случае $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$, то из (73) с учетом неоклассических условий $\partial F(\cdot)/\partial K > 0$ и $\partial F(\cdot)/\partial L > 0$ следует, что на этих интервалах условия (72) выполняются. Так как на магистрали $k^*(t) \equiv k^* = const$, то из (73) следует, что

$$\frac{dY^*(t)}{dt} = \lambda \left[\frac{\partial F(\cdot)}{\partial K^*(t)} K^*(t) + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial L(t)} L(t)\right], \tag{74}$$

где $K^*(t) = k^* L(t)$, т.е. условия (72) выполняются. Так как $\alpha = [\partial F/\partial K][K/F]$, $\beta = [\partial F/\partial L][L/F]$, причем $\alpha + \beta = 1$ для линейно-однородных $F(K,L)$ [2], то, поделив

(74) слева и справа на $F(K^*, L)$, получим, что $\hat{Y}^*(t) \equiv \hat{Y}^* = \lambda$, т.е. на магистрали относительная скорость роста валового продукта равна коэффициенту экспоненциального роста трудовых ресурсов. Из проведенного анализа следует, что в случае $k_0 < k^*$, $k_T > k^*$ на всем интервале времени $t \in [0, T]$ обеспечивается экономический рост. При этом на магистрали – сбалансированный рост ($\dot{k}(t) = 0$, $k(t) \equiv 0$), а на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^{**}, T]$ – расширенный рост ($\dot{k}(t) > 0$). В случае $k_0 > k^*$ и $k_T < k^*$ на интервалах $t \in [0, T^*)$ и $t \in (T^{**}, T]$, согласно теореме 1, $\dot{k}(t) < 0$. Таким образом, на начальном и конечном интервалах времени условия (72) могут нарушаться, что позволяет определить ситуации, когда $k_0 > k^*$ и $k_T < k^*$, как вырожденные. Преодоление этих ситуаций путем максимально быстрого вывода экономики на магистраль и схода с магистрали осуществляется за счет минимально возможных норм накопления на указанных интервалах времени.

6. При отсутствии ограничений на накопление ($s_0 = 0$, $s_1 = 1$), а также производственных затрат ($\gamma = 0$) и налоговых отчислений ($u = 0$) результаты «Магистральной теоремы» (теорема 1) и «Золотого правила накопления» (теорема 2) переходят в классических варианты этих теорем [1, 2, 4 – 6, 9], когда выход экономики на магистраль и сход экономики с магистрали осуществляется направлением валового продукта целиком только на накопление либо только на потребление, а распределение продукта на магистрали осуществляется только между накоплением и потреблением с учетом дисконтирования. Если дополнительно отсутствует и дисконтирование ($\delta = 0$), когда текущему потреблению не отдается предпочтение перед будущим потреблением, то «Золотое правило накопления» получается в его первоначальном виде [9].

7. Наличие ограничений на величину накопления (и соответственно потребления) в случае $k_T < k^*$ ограничивает интервал разрешимости задачи в форме «Магистральной теоремы» снизу величиной k_2, т.е. $k \in [k_2, k_1]$, в то время как при отсутствии таких ограничений подобный интервал $k \in (0, k_1]$, когда для фондовооруженности k отсутствуют ограничения снизу величиной $k_2 > 0$ [1, 2, 4, 5]. Таким образом, рассмотренный случай наличия ограничений дает более реалистичное решение в форме «Магистральной теоремы», поскольку оно даже в вырожденной ситуации $k_T < k^*$ не позволяет фондовооруженности $k(t)$ к конечному моменту времени $t = T$ опуститься до сколь угодно малого значения.

6. Доказательство основных утверждений

Доказательство леммы 1. Согласно принципу максимума Понтрягина из (8) – (11) следует [13]

$$H(k,s,\psi) = \psi[(1-\gamma)(1-u)sf(k) - \nu k] + (1-\gamma)(1-u)(1-s)f(k)e^{-\delta t}; \qquad (75)$$

$$s(t) = \arg\max_{s_0 \le s \le s_1} H(k(t), s, \psi(t)); \qquad (76)$$

$$\dot{\psi}(t) = -\partial H(k(t), s(t), \psi(t))/\partial k(t); \qquad (77)$$

$$\psi(T) \ge 0, \psi(T)[k(T) - k_T] = 0. \qquad (78)$$

Согласно (75), (76),

$$s(t) = \arg \max_{s_0 \le s \le s_1} \{(1-\gamma)(1-u) f(k(t))[\psi(t) - e^{-\delta t}]s\}. \tag{79}$$

Так как $(1-\gamma) > 0$, $(1-u) > 0$, $f(k) > 0$, то из (79) следует

$$s(t) = s_1,\ \psi(t) - e^{-\delta t} > 0;\ \ s(t) = s_0,\ \psi(t) - e^{-\delta t} < 0;\ \ s(t) \in [s_0; s_1],\ \psi(t) - e^{-\delta t} = 0. \tag{80}$$

Из (75), (77) для сопряженной переменной $\psi(t)$ следует уравнение

$$\dot{\psi}(t) = -[(1-\gamma)(1-u)s(t) f'(k(t)) - \nu]\psi(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s(t)) f'(k(t)) e^{-\delta t}. \tag{81}$$

Введем новую сопряженную переменную $q(t) = e^{\delta t}\psi(t)$. Тогда (15) – (17) следуют соответственно из (80), (81), (78). Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Согласно (15), свойство $q(t) < 0$ может реализоваться только при $s(t) = s_0$, когда уравнение (16) принимает вид

$$\dot{q}(t) = a(t)q(t) - b(t), \tag{82}$$

где $a(t) = (\nu + \delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k(t))$, $b(t) = (1-\gamma)(1-u)(1-s_0) f'(k(t))$. Решение этого уравнения при условии $q(T) = q_T$ выглядит следующим образом [14]:

$$q(t) = \exp\left\{\int_0^t a(\tau)d\tau\right\}\left[\int_t^T b(\xi)\exp\left\{-\int_0^{\xi} a(\tau)d\tau\right\}d\xi + q_T \exp\left\{-\int_0^T a(\tau)d\tau\right\}\right]. \tag{83}$$

Так как, учитывая (12), (17), $b(t) > 0$, $q_T \ge 0$, то из (83) следует, что $q(t) \ge 0$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. При $s(t) = s_1$ уравнения (8), (16) принимают вид

$$\dot{k}(t) = (1-\gamma)(1-u)s_1 f(k(t)) - \nu k(t); \tag{84}$$

$$\dot{q}(t) = [(\nu + \delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1 f'(k(t))]q(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s_1) f'(k(t)). \tag{85}$$

Свойства (18) для $\dot{k}$ и единственность решения k_1 уравнения (20) следуют с учетом неоклассических условий (12) из (84) (см. рис. 2).

Свойство $\dot{q} = 0$ для $q = \Phi_1(k)$ следует из (22), (85). Условие $\Phi_1(k) > 1$ соответствует, согласно (22), условию

$$(1-\gamma)(1-u)(1-s_1) f'(k) > (\nu + \delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1 f'(k),$$

из которого следует

$$f'(k) > \frac{(\nu + \delta)}{(1-\gamma)(1-u)}. \tag{86}$$

Единственность решения k^* уравнения (21) следует с учетом неоклассических условий (12). Так как, согласно (21), $f'(k) > (\nu + \delta)/[(1-\gamma)(1-u)]$ для $k < k^*$, то из (86) следует, что $\Phi_1(k) > 1$ для $k \in (0; k^*)$. Свойство $\Phi_1(k^*) = 1$ следует в результате использования (21) в (22).

Для доказательства свойства $k^* < k_1$ нужно доказать с учетом неоклассических условий, что (см. рис. 2)

$$f(k^*) > \frac{\nu}{(1-\gamma)(1-u)s_1} k^* = y_1(k^*). \tag{87}$$

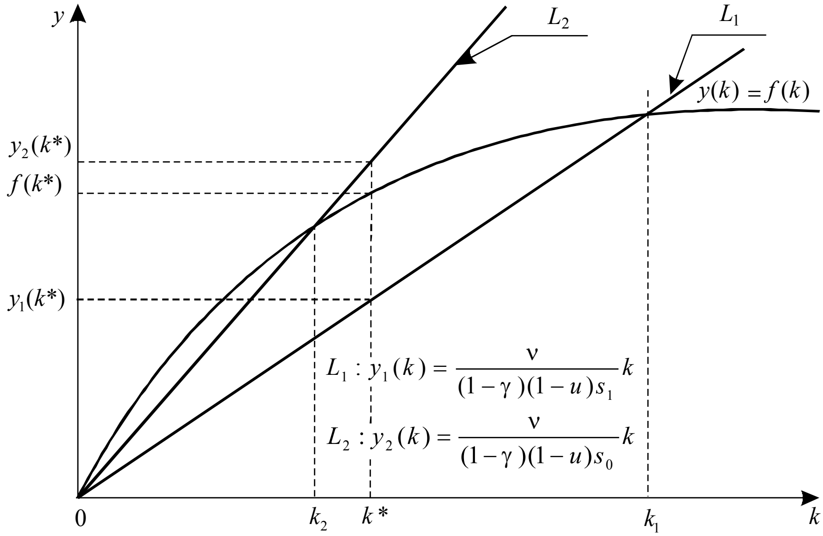

Рис. 2. Единственность корней k_1 и k_2

Так как, согласно неоклассическим условиям, $f'(k)$ – монотонно убывающая функция, то, учитывая (86), имеем

$$f(k^*) = \int_0^{k^*} f'(k)dk > \frac{(\nu+\delta)}{(1-\gamma)(1-u)}k^*. \tag{88}$$

Из (87) следует, что $s_1 > \nu/(\nu+\delta)$, т.е. $(\nu+\delta) > \nu/s_1$. Использование этого неравенства в (88) приводит к (87), что доказывает требуемое свойство.

Докажем свойство $\Phi_1'(k) < 0$. Из (22) следует, что

$$\Phi_1'(k) = \frac{(\nu+\delta)(1-\gamma)(1-u)(1-s_1)f''(k)}{\Psi_1^2(k)}; \tag{89}$$

$$\Psi_1(k) = (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1 f'(k). \tag{90}$$

Тогда из (89) с учетом неоклассического условия $f''(k) < 0$ следует свойство $\Phi_1'(k) < 0$, т.е. функция $\Phi_1(k)$ является убывающей.

Свойства $\dot{q} < 0$ и $\dot{q} > 0$ в (5) для $k < k^*$ следуют из доказанных свойств функции $\Phi_1(k)$. Пусть теперь $k > k^*$ (см. рис. 1). Так как $q > 1$, то из (85) следует

$$\dot{q} > (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_1 f'(k) - (1-\gamma)(1-u)(1-s_1)f'(k) =$$
$$= (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)f'(k). \tag{91}$$

Так как, согласно (21) и неоклассическим условиям, $0 < f'(k) < [(\nu+\delta)/(1-\gamma)\times$ $\times(1-u)]$ для $k > k^*$, то из (91) следует требуемое свойство $\dot{q} > 0$ для $k > k^*$ в (19). Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. При $s(t) = s_0$ уравнения (8), (16) принимают вид

$$\dot{k}(t) = (1-\gamma)(1-u)s_0 f(k(t)) - \nu k(t); \tag{92}$$

$$\dot{q}(t) = [(\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k(t))]q(t) - (1-\gamma)(1-u)(1-s_0)f'(k(t)). \tag{93}$$

Свойства (23) для $\dot{k}$ и единственность решения k_2 уравнения (25) следуют с учетом неоклассических условий (12) из (92) (см. рис. 2).

Свойство $\dot{q} = 0$ для $q = \Phi_0(k)$ следует из (26), (93). Условие $\Phi_0(k) < 1$ соответствует, согласно (26), условию

$$(1-\gamma)(1-u)(1-s_0)f'(k) < (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k),$$

из которого следует
$$f'(k) < \frac{(\nu+\delta)}{(1-\gamma)(1-u)}. \tag{94}$$

Так как, согласно (21), $f'(k) < (\nu+\delta)/[(1-\gamma)(1-u)]$ для $k > k^*$, то из (94) следует, что $\Phi_0(k) < 1$ для $k > k^*$. Свойство $\Phi_0(k^*) = 1$ следует в результате использования (21) в (26).

Для доказательства свойства $k^* > k_2$ нужно доказать с учетом неоклассических условий, что (см. рис. 2)

$$f(k^*) < \frac{\nu}{(1-\gamma)(1-u)s_0} k^* = y_2(k^*). \tag{95}$$

Из левой части условия (13) следует

$$s_0 < \frac{\nu}{(\nu+\delta)} \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}. \tag{96}$$

Тогда использование (96) дает, что

$$\frac{\nu}{(1-\gamma)(1-u)s_0} k^* > \frac{\nu+\delta}{(1-\gamma)(1-u)f'(k^*)} f(k^*). \tag{97}$$

Так как, согласно (21), $(\nu+\delta) = (1-\gamma)(1-u)f'(k^*)$, то (95) следует из (97).

Аналогично (89), (90)

$$\Phi_0'(k) = \frac{(\nu+\delta)(1-\gamma)(1-u)(1-s_0)f'(k)}{\Psi_0^2(k)},$$

$$\Psi_0(k) = (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k). \tag{98}$$

Тогда из (98) с учетом неоклассического условия $f''(k) < 0$ следует, что $\Phi_0'(k) < 0$, т.е. функция $\Phi_0(k)$ является убывающей.

Свойства $\dot{q} > 0$ и $\dot{q} < 0$ в (24) для $k > k^*$ следуют из доказанных свойств функции $\Phi_0(k)$. Пусть теперь $k < k^*$ (см. рис. 1). Так как $q < 1$, то из (93) следует

$$\dot{q} < (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)s_0 f'(k) - (1-\gamma)(1-u)(1-s_0)f'(k) =$$
$$= (\nu+\delta) - (1-\gamma)(1-u)f'(k). \tag{99}$$

Так как, согласно (21) и неоклассическим условиям, $f'(k) > [(\nu+\delta)/(1-\gamma)(1-u)]$ для $k < k^*$, то из (99) следует требуемое свойство $\dot{q} < 0$ для $k < k^*$ в (24). Лемма доказана.

Доказательство леммы 5. Условиями существования стационарных решений уравнений (8), (16) являются условия $\dot{k} = 0$, $\dot{q} = 0$. Пусть эти условия реализуются при управлении $s(t) \equiv s^* = const$, которому соответствует стационарное решение

$k(t) \equiv k^* = const$. Тогда из (8), (16) следует

$$(1-\gamma)(1-u)s^* f(k^*) - \nu k^* = 0; \tag{100}$$

$$[(\nu+\delta)-(1-\gamma)(1-u)s^* f'(k^*)]q - (1-\gamma)(1-u)(1-s^*) f'(k^*) = 0\,. \tag{101}$$

Тогда (27) следует из (100). Использование (21) в (101) дает $q = 1$. Использование (21) в (27) приводит к (28).

Пусть $g(k) = f(k)/k$. С учетом неоклассических условий (12)

$$\lim_{k\downarrow 0} g(k) = \lim_{k\downarrow 0} f'(k) = \infty; \lim_{k\uparrow\infty} g(k) = \lim_{k\uparrow\infty} f'(k) = 0. \tag{102}$$

Так как $g'(k) = [kf'(k) - f(k)]/k^2$, то доказать свойство $g'(k) < 0$, значит доказать, что

$$kf'(k) - f(k) < 0. \tag{103}$$

С учетом неоклассических условий (12) последовательно получаем, что

$$f(k) = \int_0^k f'(y)dy > \int_0^k f'(k)dy = kf'(k), \tag{104}$$

что доказывает (103). Таким образом, функция $g(k)\downarrow_0^\infty$ при $k\uparrow_0^\infty$, т.е. является убывающей. Так как $k^* < k_1$, то $g(k^*) > g(k_1)$, т.е. $[k^*/f(k^*)] < [k_1/f(k_1)]$. Тогда из (27) с учетом последнего неравенства и (20) следует

$$s^* = \frac{\nu k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)} < \frac{\nu k_1}{(1-\gamma)(1-u)f(k_1)} = s_1, \tag{105}$$

что доказывает правую часть (29). Так как $k^* > k_2$, то аналогично предыдущему получаем, что $[k^*/f(k^*)] > [k_2/f(k_2)]$. Тогда из (27) с учетом последнего неравенства и (25) следует

$$s^* = \frac{\nu k^*}{(1-\gamma)(1-u)f(k^*)} > \frac{\nu k_2}{(1-\gamma)(1-u)f(k_2)} = s_0, \tag{106}$$

что доказывает левую часть (29). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Формула Эйлера для линейно-однородных производственных функций дает представление для валового продукта $Y(t) = F(K(t),L(t))$ как суммы доходов с основных фондов $Y_K(t)$ и трудовых ресурсов $Y_L(t)$ в виде [2]

$$F(K(t),L(t)) = \frac{\partial F(K(t),L(t))}{\partial K(t)} K(t) + \frac{\partial F(K(t),L(t))}{\partial L(t)} L(t) = Y_K(t) + Y_L(t). \tag{107}$$

Из (28) следует

$$(1-\gamma)(1-u)s^* f(k^*) = (1-\gamma)(1-u)k^* f'(k^*) - \delta k^*. \tag{108}$$

Из (108), согласно (5), (107), получаем, что

$$(1-\gamma)(1-u)s^* F(K^*(t),L(t)) = (1-\gamma)(1-u)Y_K^*(t) - \delta K^*(t), \tag{109}$$

где $Y_K^*(t)$ определяется формулой (49). Согласно (3),

$$I^*(t) = (1-\gamma)(1-u)s^* F(K^*(t),L(t)). \tag{110}$$

Использование (110) в (109) приводит к (48).

Из (107) следует

$$Y_K^*(t) = F(K^*(t), L(t)) - Y_L^*(t), \tag{111}$$

где $Y_L^*(t)$ определяется формулой (51). Использование (111) в (109) дает, что

$$(1-\gamma)(1-u)s^* F(K^*(t), L(t)) =$$
$$= (1-\gamma)(1-u)F(K^*(t), L(t)) - (1-\gamma)(1-u)Y_L^*(t) - \delta K^*(t). \tag{112}$$

Согласно (3),

$$C^*(t) = (1-\gamma)(1-u)(1-s^*)F(K^*(t), L(t)). \tag{113}$$

Использование (113) в (112), приводит к (50).

Так как $N^*(t) = (1-\gamma)uF(K^*(t), L(t))$, то (52) следует из (107).

Из (48), (50) и (52) следует, что остаются неиспользованными на $I^*(t)$, $C^*(t)$ и $N^*(t)$ суммарно $[1 - ((1-\gamma)(1-u) + (1-\gamma)u)]$ части $Y_K^*(t)$ и $Y_L^*(t)$, которые остаются на возмещение материальных затрат Ψ^*. Таким образом,

$$[1 - ((1-\gamma)(1-u) + (1-\gamma)u)][Y_K^*(t) + Y_L^*(t)] = \Psi^*(t). \tag{114}$$

Тогда (53) следует из (114) с учетом (107) очевидным образом. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Формулы (55) для s^*, $\tilde{s}^*$ следуют из (31), (37) и (54). Формулы (56) для k^*, k_1, и k_2 получаются в результате использования (54) в (20), (21) и (25).

Использование (54) в (39), (40) дает, что

$$T_1(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{(1-\gamma)(1-u)s_1 A k^\alpha - \nu k},$$

$$T_0(k', k'') = \int_{k'}^{k''} \frac{dk}{\nu k - (1-\gamma)(1-u)s_0 A k^\alpha}. \tag{115}$$

Интегрирование в (115) приводит к формулам (57).

При $s(t) \equiv s = const$ общее решение уравнения (8) в случае $f(k)$ вида (54)

$$k(t) = \left[\frac{(1-\gamma)(1-u)sA - C\exp\{-\nu(1-\alpha)t\}}{\nu}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{116}$$

где C – константа интегрирования. Выражения (58), (59) следуют из (116) соответственно для $s = s_1$ и $s = s_0$ при условиях $k(0) = k_0$ и $k(T^*) = k^*$ для нахождения константы C. Выражения (60), (61) следуют из (116) соответственно для $s = s_1$ и $s = s_0$ при условиях $k(T^{**}) = k^*$ и $k(T) = k_T$ для нахождения константы C.

Формулы (62) – (66) очевидным образом следуют из (41) – (43) с учетом (54). Теорема доказана.

Заключение

Проведено полное исследование задачи управления односекторной экономикой при наличии ограничений на нормы накопления и потребления и при учете ненулевой материалоемкости и налоговых отчислений. Доказано существование

«Магистрального принципа» управления экономикой при сделанных предположениях. Получено «Золотое правило накопления», определяющее единственный способ распределения валового продукта на магистрали. Выделен случай, для которого на всем временном интервале планового периода осуществляется экономический рост, а именно, на магистрали – сбалансированный рост, а на начальном и конечном интервалах времени – расширенный рост. Все результаты конкретизируются для производственной функции Кобба – Дугласа. Совместно с работами [15 – 17] проведенное исследование утверждает универсальность «Магистрального принципа» независимо от критерия оптимальности и дополнительных условий функционирования экономики и вместе с тем зависимость «Золотого правила накопления» как способа распределения произведенного продукта на магистрали от указанных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту /Математическая экономика. М.: Мир, 1974.
2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
3. *Ramsey F.P.* Mathematical theory of savings // Econ. J. 1928. V. 38. P. 543 – 559.
4. *Митягин Б.С.* Заметки по математической экономике // УМН. 1972. Т.27. №3. С.3 – 19.
5. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрисс пресс, 2002.
6. *Solow R.A.* Contribution to the theory of economic growth //Quart. J. Economics. 1956. V. 70, P.65 – 94.
7. *Солоу Р.А.* Перспективы теории роста //Мировая экономика и международные отношения. 1966. №8. Р.69 – 77.
8. *Дубовский С.И.* Энергетика и распределение доходов в экономическом развитии. М.: УРСС, 2004.
9. *Phelps E.S.* Golden rules of economic growth. New-York: Norton, 1966.
10. *Москаленко А.И.* Оптимальное управление моделями экономической динамики. Новосибирск: Наука, 1999.
11. *Габасов Р.*, *Габасова О.Р.*, *Дмитрук Н.М.* Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы I. Построение магистралей //Автоматика и телемеханика. 1998. №9. С. 100 – 117.
12. *Гурман В.И.* Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений // Автоматика и телемеханика. 2003. №3. С.61 – 71.
13. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1978.
14. *Матвеев А.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967.
15. *Демин Н.С.*, *Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей //Автоматика и телемеханика. 2008. №9. С.140 – 155.
16. *Демин Н.С.*, *Кулешова Е.В.*Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом налоговых отчислений по критерию максимизации потребления работодателей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. №6. С.87 – 98.
17. *Демин Н.С.*, *Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации налоговых отчислений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т.12. № 1(37). С.74 – 88.

Демин Николай Серапионович
Кулешова Елена Викторовна
Томский государственный университет
E-mail: dyomin@fpmk.tsu.ru; kuleshova.e@mail.ru

Поступила в редакцию 18 февраля 2009 г.