УДК 519.2

М.Ю. Киселева, В.И. Смагин

УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВОМ, ХРАНЕНИЕМ И ПОСТАВКАМИ ТОВАРОВ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ВЫХОДА СИСТЕМЫ

Рассматривается задача управления экономической системой производства, хранения и поставок товара потребителям, которая решается с помощью метода прогнозирующего управления выходом системы. При синтезе управления учитываются ограничения на управление и вектор состояния. Критерий качества выражен через выпуклую квадратичную функцию.

Ключевые слова: *модель производства*, *прогнозирующая модель выхода*, *квадратичный критерий*, *управление с прогнозирующей моделью.*

В настоящее время широкое применение находит метод прогнозирующего управления, который используется при управлении технологическими процессами [1], в экономике – при управлении производством [2] и портфелем ценных бумаг [3]. Метод прогнозирующего управления применяется на практике для решения задач синтеза систем управления, функционирующих в условиях жестких ограничений, накладываемых на переменные состояния и управления.

В работе рассмотрена задача синтеза прогнозирующего управления производством, хранением и поставками товара с учетом случайных факторов. Задача сводится к задаче управления выходом экономической системы с использованием экстраполятора Калмана [4].

1. Модель производства, хранения и поставок товаров. Постановка задачи управления

Рассмотрим модель производства, хранения и поставок товаров [2, 5]. Пусть динамика экономической системы описывается разностными уравнениями:

$$q_{t+1} = \overline{A} q_t + \varphi_t + \xi_t, \quad q_0 = \overline{q}_0; \tag{1}$$

$$z_{t+1} = z_t + \overline{B} \omega_t - \varphi_t + \zeta_t, \quad z_0 = \overline{z}_0, \tag{2}$$

где $q_t \in R^n$, $q_{i,t}$ – количество товаров i-го типа у потребителя ($i = \overline{1,n}$); $z_t \in R^n$, $z_{i,t}$ – количество товаров i-го типа на складе производителя; $\omega_t \in R^n$, $\omega_{i,t}$ – объем производства товаров i-го типа; $\varphi_t \in R^n$, $\varphi_{i,t}$ – объем поставок товаров i-го типа; ξ_t, ζ_t – векторные гауссовские случайные последовательности с характеристиками: $M\{\xi_t\} = 0$, $M\{\zeta_t\} = 0$, $M\{\xi_t \zeta_k^{\mathrm{T}}\} = \Sigma \delta_{t,k}$, $M\{\zeta_t \zeta_k^{\mathrm{T}}\} = \Xi \delta_{t,k}$, $M\{\xi_t \zeta_k^{\mathrm{T}}\} = 0$ ($\delta_{t,k}$ – символ Кронекера); $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – заданные матрицы. В модели (1), (2) случайные векторы ξ_t, ζ_t учитывают ошибки, возникающие из-за погрешностей при задании модели.

В каждый момент времени t должны выполняться ограничения:

$$z_{\min} \le z_t \le z_{\max}, \quad 0 \le \omega_t \le \omega_{\max}, \quad 0 \le \varphi_t \le z_t. \tag{3}$$

Переменные ω_t и φ_t рассматриваются как управляющие воздействия.

Модель экономической системы (1), (2) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} q_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_t \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & 0 \\ -E & \overline{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \omega_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $E - n \times n$ -единичная матрица. Введем обозначения:

$$x_t = \begin{bmatrix} q_t \\ z_t \end{bmatrix},\ u_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ \omega_t \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -E & \overline{B} \end{bmatrix},\ w_t = \begin{bmatrix} \xi_t \\ \zeta_t \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Xi \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Тогда модель (4) можно представить в виде

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t\ , \quad x_0 = \overline{x}_0\ , \tag{6}$$

где w_t – гауссовская случайная последовательность ($M\{w_t\} = 0$, $M\{w_t w_k^{\mathrm{T}}\} = W\delta_{t,k}$), $\overline{x}_0 = (\overline{q}_0^{\mathrm{T}} \quad \overline{z}_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

Пусть $y_t \in R^n$ – вектор выхода и $\psi_t \in R^l$ – вектор наблюдений определяются следующими формулами:

$$y_t = Gx_t\ ; \tag{7}$$

$$\psi_t = Hx_t + v_t\ , \tag{8}$$

где $G = (E \quad 0)$ (в силу (7) $y_t = q_t$); H – заданная матрица системы контроля; v_t – вектор случайных ошибок (гауссовская случайная последовательность с характеристиками: $M\{v_t\} = 0$, $M\{v_t v_k^{\mathrm{T}}\} = V\delta_{t,k}$, $M\{v_t w_k^{\mathrm{T}}\} = 0$). Формула (8) является моделью системы контроля за состоянием объекта (6).

Ставится задача по наблюдениям (8) определить стратегию управления производством, хранением и поставками товара, обеспечивающей количество товаров у потребителя q_t, близкое к заданному постоянному вектору $\overline{q}$, с учетом ограничений вида (3).

2. Прогнозирующая модель вектора выхода системы

Поскольку случайные процессы w_t и v_t имеют гауссовское распределение, то можно выполнить оптимальное прогнозирование поведения объекта и вектора выхода, используя экстраполятор Калмана [4]. Пусть $\hat{x}_{t|j}$ и $\hat{y}_{t|j}$ – оценки состояния и вектора выхода в момент времени t, построенные по информации, поступившей в j-й момент времени ($j \le t$). Тогда

$$\hat{x}_{t+1|t} = A\hat{x}_{t|t-1} + Bu_t + K_t(\psi_t - H\hat{x}_{t|t-1})\ , \quad \hat{x}_{1|0} = \overline{x}_0\ ; \tag{9}$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = G\hat{x}_{t+1|t}\ ; \tag{10}$$

$$K_t = AP_tH^{\mathrm{T}}(HP_tH^{\mathrm{T}} + V)^{-1}\ ; \tag{11}$$

$$P_{t+1} = W + AP_tA^{\mathrm{T}} - AP_tH^{\mathrm{T}}(HP_tH^{\mathrm{T}} + V)^{-1} HP_tA^{\mathrm{T}}\ , \quad P_0 = P_{x_0}\ . \tag{12}$$

Указанное выражение для P_t известно как разностное уравнение типа Риккати, P_{x_0} – начальное значение дисперсионной матрицы (задается по имеющейся априорной информации).

Модель прогнозирующего управления требует, чтобы оценки состояния были такими, чтобы можно было делать прогнозы на моменты времени $t+1$, $t+2$, …, $t+N$, основываясь на информации, имеющейся в момент времени t. Здесь N – горизонт прогноза. Из уравнений (9)–(12) можно вычислить оценки прогноза $\hat{x}_{t+1|t}$ и $\hat{y}_{t+1|t}$, а также оценки прогноза для моментов $t+2,\ldots,t+N$:

$$\hat{x}_{t+i+1|t} = A\,\hat{x}_{t+i|t} + Bu_{t+i|t}\,; \tag{13}$$

$$\hat{y}_{t+i|t} = G\,\hat{x}_{t+i|t}\,, \quad i = \overline{1,N}\,. \tag{14}$$

Обозначение $u_{t+i|t}$ используется для того, чтобы отличать действующее управление в момент $t+i$ u_{t+i} от тех, которые используются в модели с целью прогнозирования.

Уравнение (9) может быть расширено и записано через состояние $\hat{x}_{t+1|t}$ и будущих управляющих воздействий $u_{t+i|t}$ следующим образом:

$$\hat{x}_{t+2|t} = A\hat{x}_{t+1|t} + Bu_{t+1|t}\,,$$

$$\hat{x}_{t+3|t} = A\hat{x}_{t+2|t} + Bu_{t+2|t} = A(A\hat{x}_{t+1|t} + Bu_{t+1|t}) + Bu_{t+2|t} = A^2\hat{x}_{t+1|t} + ABu_{t+1|t} + Bu_{t+2|t}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{x}_{t+j|t} = A^{j-1}\hat{x}_{t+1|t} + \sum_{k=1}^{j-1} A^{j-k-1}Bu_{t+k|t}\,. \tag{15}$$

Аналогично может быть преобразовано уравнение (10) с использованием записанного выше выражения для $\hat{x}_{t+j|t}$. Важно заметить, что каждый прогнозируемый вектор выхода – это функция от состояния $\hat{x}_{t+1|t}$ и будущих управляющих сигналов $u_{t+i|t}$:

$$\hat{y}_{t+1|t} = G\hat{x}_{t+1|t}\,,$$

$$\hat{y}_{t+2|t} = G\hat{x}_{t+2|t} = G(A\hat{x}_{t+1|t} + Bu_{t+1|t}) = GA\hat{x}_{t+1|t} + GBu_{t+1|t}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{y}_{t+j|t} = GA^{j-1}\hat{x}_{t+1|t} + G\Big(\sum_{k=1}^{j-1} A^{j-k-1}Bu_{t+k|t}\Big)\,. \tag{16}$$

Записанные уравнения для прогнозируемых векторов состояния и выхода могут быть представлены в эквивалентной векторно-матричной форме. Для этого введем следующие обозначения:

$$\hat{X}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{x}_{t+N|t} \end{bmatrix},\ \hat{Y}_t = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+1|t} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+N|t} \end{bmatrix},\ U_t = \begin{bmatrix} u_{t+1|t} \\ \vdots \\ u_{t+N|t} \end{bmatrix},\ \Psi = \begin{bmatrix} E \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N-1} \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} G \\ GA \\ GA^2 \\ \vdots \\ GA^{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ A^{N-2}B & A^{N-3}B & \cdots & B & 0 \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ GB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ GAB & GB & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ GA^{N-2}B & GA^{N-3}B & \cdots & GB & 0 \end{bmatrix}.$$

Прогнозируемые векторы состояния и выхода системы опишутся следующими соотношениями:

$$\hat{X}_t = \Psi \hat{x}_{t+1|t} + \mathrm{P} U_t \;; \tag{17}$$

$$\hat{Y}_t = \Lambda \hat{x}_{t+1|t} + \Phi U_t \;. \tag{18}$$

3. Синтез управлений

В качестве целевой функции выбрана функция вида

$$J(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\{(\hat{y}_{t+k|t} - \overline{q})^{\mathrm{T}} C(\hat{y}_{t+k|t} - \overline{q}) + (u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t})^{\mathrm{T}} D(u_{t+k|t} - u_{t+k-1|t})\}\,, \tag{19}$$

где $C > 0$ и $D > 0$ – весовые матрицы. Введем следующие матрицы:

$$\overline{\overline{q}} = \begin{bmatrix} \overline{q} \\ \vdots \\ \overline{q} \end{bmatrix}, \; \overline{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & C & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & C \end{bmatrix}, \; \overline{D} = \begin{bmatrix} 2D & -D & 0 & \vdots & 0 \\ -D & 2D & -D & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & -D & 2D & -D \\ 0 & \cdots & 0 & -D & 2D \end{bmatrix},$$

где $\overline{\overline{q}}$ – nN-мерный вектор, $\overline{C}$ – матрица размера $nN{\times}nN$, $\overline{D}$ – матрица размера $2nN{\times}2nN$. Тогда критерий (19) преобразуется к виду

$$J(t) = \frac{1}{2} U_t^{\mathrm{T}} F U_t + U_t^{\mathrm{T}} f + c\,, \tag{20}$$

где c – слагаемые, не зависящие от U_t;

$$F = \Phi^{\mathrm{T}} \overline{C} \Phi + \overline{D}, \quad f = [\Phi^{\mathrm{T}} \overline{C} \Lambda \quad -\Phi^{\mathrm{T}} \overline{C}] \begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1|t} \\ \overline{\overline{q}}_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Для учета ограничений вида (3) предлагается оптимизацию критерия (20) проводить численно с помощью процедуры quadprog системы Matlab. Тогда оптимальное прогнозирующее управление можно представить в следующем виде:

$$u^*_{t+1|t} = (E \quad 0 \quad \ldots \quad 0) U_t^*\,, \tag{22}$$

где U_t^* – вычисленное численно оптимальное управление с учетом ограничений. Для учета ограничений (3) в системе Matlab их необходимо преобразовать. Введем следующие вспомогательные матрицы:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix}, \; R_2 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & E & 0 \end{bmatrix}, \; \overline{E} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ \cdots \\ E \end{bmatrix},$$

где матрицы R_1, R_2 имеют размерность $nN{\times}2nN$, а матрица $\overline{E}$ – $nN{\times}n$. Тогда ограничение на объем производства $\omega_t \le \omega_{max}$ примет вид

$$R_1 U_t \le \overline{E} \omega_{\max}\,. \tag{23}$$

Ограничение на количество поставок $\varphi_t \le z_t$ представляется следующим образом:

$$R_2 U_t \le R_1 \hat{X}_t \ .$$

С учетом того, что $\hat{X}_t = \Psi \hat{x}_{t+1|t} + \mathrm{P} U_t$, получим

$$(R_2 - R_1 \mathrm{P}) U_t \le R_1 \Psi \hat{X}_{t+1|t} \ . \tag{24}$$

Так как $\omega_t \ge 0$ и $\varphi_t \ge 0$, то имеем

$$U_t \ge 0. \tag{25}$$

Ограничение на переменную, отвечающую за количество товара на складе, $z_t \le z_{\max}$, примет вид

$$R_1 \hat{X}_t \le \overline{E} z_{\max} \ ,$$

или
$$R_1 \Psi \hat{x}_{t+1|t} + R_1 \mathrm{P} U_t \le \overline{E} z_{\max} \ ,$$

откуда
$$R_1 \mathrm{P} U_t \le \overline{E} z_{\max} - R_1 \Psi \hat{x}_{t+1|t} \ . \tag{26}$$

Аналогично, ограничению вида $z_t \ge z_{\min}$ соответствует следующее ограничение:

$$-R_1 \mathrm{P} U_t \le -\overline{E} z_{\min} + R_1 \Psi \hat{x}_{t+1|t} \ . \tag{27}$$

Таким образом, система ограничений (3) представляется в виде (23)–(27).

4. Результаты моделирования

Выполним моделирование экономической системы производства, хранения и поставок товаров (1), (2), (7), (8) для следующих исходных данных:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ -0,25 & 0,9 \end{bmatrix}, \ \overline{B} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, \ z_{\min} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \ z_{\max} = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{\max} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,7 \end{bmatrix}, \ z_0 = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \ q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overline{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$H = \mathrm{diag}\{1;\ 1;\ 1;\ 1\}, \ W = 0, \ V = \mathrm{diag}\{0,0005;\ 0,0005;\ 0,0005;\ 0,0005\}.$$

Результаты моделирования для N=3 и интервала моделирования [0, 30] приведены в виде графиков на рис. 1 – 3.

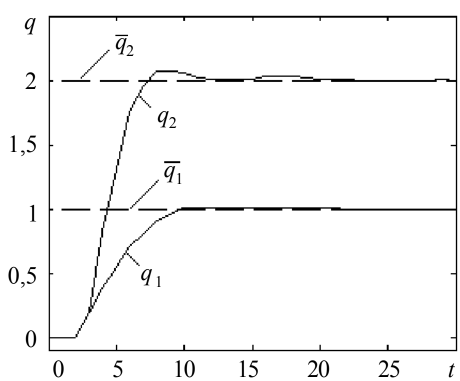

Рис. 1. Реализации количества товаров у потребителя

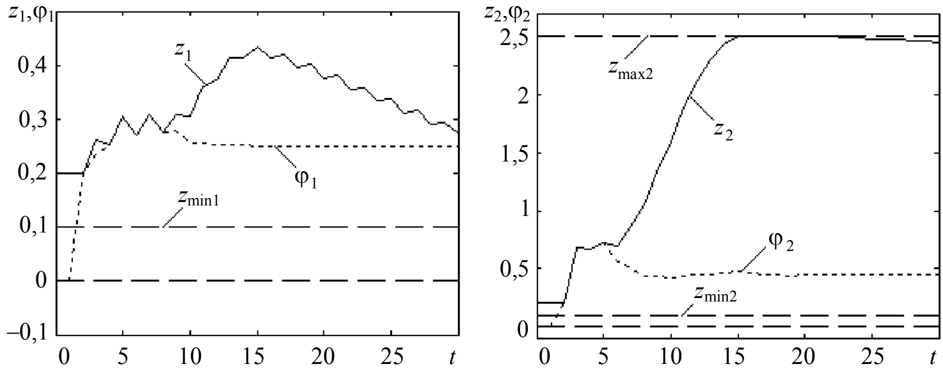

Рис. 2. Реализации объемов товаров на складе и объемов поставок

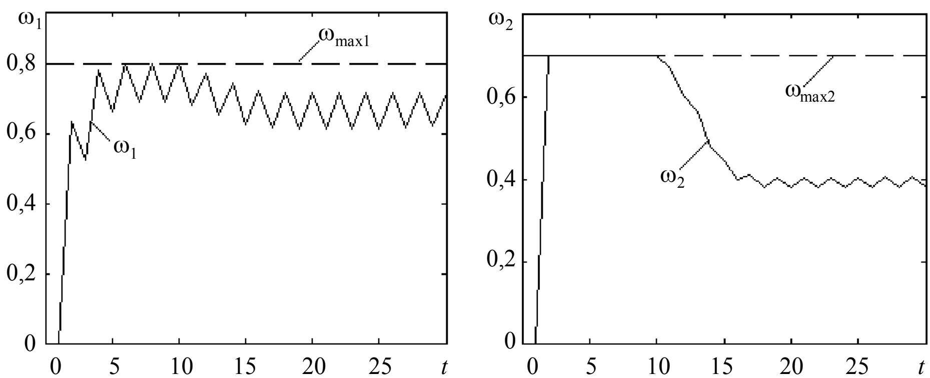

Рис. 3. Объемы производства товаров

Анализ результатов моделирования показал, что заданное количество товаров достигается к 10 шагу (рис. 1), при этом в каждый момент времени выполнены все ограничения на переменные состояния (рис. 2) и управления (рис. 3). Переменные управления сначала принимают максимально допустимые значения, затем по достижению цели управления стабилизируются, и система в целом переходит в положение равновесия.

Заключение

Получено решение задачи синтеза управлений выходом экономической системы производства, хранения и поставок товаров потребителям для модели с дискретным временем с учетом реальных ограничений в форме неравенств. С использованием пакета прикладных программ Matlab 7.6 выполнены расчеты с учетом всех ограничений. Показано, что цель управления достигается, ограничения выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Camacho E.F.*, *Bordons C.* Model predictive control. London: Springer-Verlag, 2004. 405 p.
2. *Перепелкин Е.А.* Прогнозирующее управление экономической системой производства, хранения и поставок товаров потребителям // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 1. С. 125 – 128.

3. *Домбровский В.В.*, *Домбровский Д.В.*, *Лященко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 71 – 85.
4. *Браммер К.*, *Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1972. 200 с.
5. *Параев Ю.И.* Решение задач об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 103 – 107.

Киселева Марина Юрьевна
Смагин Валерий Иванович
Томский государственный университет
E-mail: Marina_Kiseleva@sibmail.ru; vsm@mail.tsu.ru Поступила в редакцию 6 февраля 2009г.