

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865

У.В. Андреева, Н.С. Демин, Е.В. Ерофеева

ОПЦИОН КУПЛИ НА ОСНОВЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ЦЕНЫ РИСКОВОГО АКТИВА С ФИКСИРОВАННОЙ ЦЕНОЙ ИСПОЛНЕНИЯ

Рассматривается задача нахождения цены опциона, портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала на диффузионном (B, S) -финансовом рынке Европейского типа с фиксированной ценой исполнения, когда в качестве цены рискованного актива используется ее максимальное значение в рассматриваемом временном периоде. Исследуются свойства решения.

Ключевые слова: опцион, портфель, капитал, хеджирование.

Опцион представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного рискованного актива по оговоренной цене, а продавец опциона за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион покупки, а во втором – опцион продажи. Стандартные платежные функции этих опционов характеризуются ценой исполнения и ценой базисного актива в момент исполнения [1 – 4]. С развитием рынка опционных контрактов стали появляться дополнительные требования к платежным обязательствам, что породило класс экзотических опционов [5 – 7]. Важным частным случаем подобных опционов являются опционы, основанные на учете экстремальных значений цены базисного актива. В данной работе для диффузионного (B, S) -финансового рынка Европейского типа проводится полное исследование задачи хеджирования опциона покупки, основанного на максимальном значении цены рискованного актива, в случае выплаты дивидендов по рискованным активам [1, 2, 8].

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ [1 – 3]. На финансовом рынке обращаются рискованные (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}, \quad B_t = B_0 \exp\{rt\}. \quad (2)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad (3)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ есть пара F_t – измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [9, §6] предполагается, что за обладание акциями происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta \gamma_t S_t$, пропорциональной рискованной части капитала с коэффициентом δ , таким, что $0 \leq \delta < r$, т.е. $dD_t = \delta \gamma_t S_t dt$. Тогда изменения капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \quad (4)$$

Так как

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t, \quad (5)$$

то

$$B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t. \quad (6)$$

Условие (6) является балансовым соотношением, которое заменяет условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче без дивидендов. Тогда капитал определяется уравнением [9]

$$dX_t = rX_t dt + \sigma \gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}, \quad (7)$$

где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta} = \frac{\mu-r+\delta}{\sigma} t + W_t \quad (8)$$

является винеровским относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$, такой, что

$$d\mathbf{P}_t^{\mu-r+\delta} = \mathbf{Z}_t^{\mu-r+\delta} d\mathbf{P}_t, \quad (9)$$

$$\mathbf{Z}_t^{\mu-r+\delta} = \exp \left\{ -\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right)^2 t \right\}. \quad (10)$$

Обозначая через $Law(\cdot | \mathbf{P})$ и $Law(\cdot | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta})$ свойства процессов относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$, получаем [1]

$$Law(W^{\mu-r+\delta} | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W | \mathbf{P}).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} Law \left(S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mu-r+\delta} \right\}; t \leq T | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta} \right) = \\ = Law \left(S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}; t \leq T | \mathbf{P} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно,

$$Law(S(\mu, r, \delta) | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(S(r, \delta) | \mathbf{P}), \quad (12)$$

т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, описываемого уравнением

$$d_t S_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}), \quad (13)$$

относительно меры $\mathbf{P}^{u-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, который определяется уравнением

$$d_t S_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad (14)$$

относительно меры $\mathbf{P}$.

Ставится задача: сформировать хеджирующую стратегию $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$, а также соответствующий ей капитал X_t^* таким образом, чтобы выполнить платежное обязательство $X_T^* = f_T^{\max}(S)$ относительно платежной функции

$$f_T^{\max}(S) = (\max_{0 \leq t \leq T} S_t - K)^+, \quad (15)$$

где $a^+ = \max(a, 0)$, $K > 0$ – цена исполнения опциона, а также найти стоимость опциона $C_T^{\max} = X_0^*$.

Из (15) следует, что опцион с платежной функцией $f_T^{\max}(S)$ предъявляется к исполнению, если максимальное значение цены рискового актива на интервале времени $t \in [0, T]$ превышает цену исполнения K . При этом владелец опциона получает доход $\Delta = M_T - K$, где $M_T = \max_{0 \leq t \leq T} S_t$.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a; D\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и D ; $I[A]$ – индикаторная функция события A ; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R = (-\infty, +\infty)$;

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}. \quad (16)$$

2. Предварительные результаты

Приведем два результата, которые понадобятся при решении поставленной задачи.

Утверждение 1 [1, 8]. Пусть для $t \leq T$

$$M_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} \sigma \xi_\tau = \max_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma W_\tau + h\tau), \quad (17)$$

$$\xi_t = W_t + \frac{h}{\sigma} t, \quad h = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (18)$$

Тогда для $x \geq 0$ и $h \in R$ плотность вероятности $p^M(t, x) = \partial \mathbf{P}\{M_t \leq x\} / \partial x$ имеет вид

$$\begin{aligned} p^M(t, x) = & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\} - \frac{2h}{\sigma^2} \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(-\frac{x + ht}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \\ & + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{2hx}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x + ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Утверждение 2. Если

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\{cx\} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2d}\right\} dx, \quad (20)$$

то
$$J = \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\left\{-\frac{[x-(a+cd)]^2}{2d}\right\} dx. \quad (21)$$

Пусть $X \sim N\{a; d\}$. Тогда

$$E\{\exp\{cX\}I[X \geq b]\} = \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\} \Phi\left(-\frac{b-(a+cd)}{\sqrt{d}}\right). \quad (22)$$

Представление (21) для J следует из (20) в результате элементарных преобразований, а (22) следует из (20) и (21) с учетом свойства функции Лапласа

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1. \quad (23)$$

3. Основные результаты

Пусть

$$d_1(t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}, \quad (24)$$

$$d_2(t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}, \quad (25)$$

$$y_1(t) = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (26)$$

$$y_2(t) = \frac{\ln(K/S_t) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (27)$$

$$y_3(t) = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (28)$$

$$\alpha = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}, \quad (29)$$

а d_1, d_2, y_1, y_2, y_3 определяются формулами (24) – (28) при $t = 0$.

Теорема 1. Стоимость опциона, платежная функция которого имеет вид (15), определяется формулами

$$\begin{aligned} C_T^{\max} = S_0 & \left[(1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \Phi(d_1) + (1 - \alpha^{-1})e^{-rT} \Phi(-d_2) \right] - \\ & - Ke^{-rT}, \quad \text{если } S_0 \geq K; \end{aligned} \quad (30)$$

$$C_T^{\max} = S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta T} \Phi(-y_1) - (\alpha^{-1}) e^{-rT} \left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(-y_2) \right] - \\ - K e^{-rT} \Phi(-y_3), \quad \text{если } S_0 < K. \quad (31)$$

Доказательство. Поскольку платежная функция $f_T(S)$ вида (15) является естественной [1,2], то

$$C_T^{\max} = \exp\{-rT\} E\{f_T^{\max}(S(r, \delta))\}, \quad (32)$$

где с учетом (1), (2), (14), (18)

$$S_T(r, \delta) = S_0 \exp\{\sigma \xi_T\}. \quad (33)$$

Тогда согласно (17), (18),

$$\max_{0 \leq t \leq T} S_t = S_0 \max_{0 \leq t \leq T} \exp\{ht + \sigma W_t\} = S_0 \exp\{\max_{0 \leq t \leq T} (ht + \sigma W_t)\} = S_0 \exp\{M_T\}. \quad (34)$$

Следовательно,

$$f_T^{\max}(S(r, \delta)) = (S_0 \exp\{M_T\} - K)^+. \quad (35)$$

Использование (35) в (32) дает с учетом (19), что

$$C_T^{\max} = e^{-rT} E\{(S_0 \exp\{M_T\} - K)^+\} = e^{-rT} F_T(S_0), \quad (36)$$

$$F_T(S_0) = \int_0^\infty (S_0 e^x - K)^+ p^M(T, x) dx. \quad (37)$$

а) Случай $S_0 \geq K$. Использование (19) в (37) дает с учетом условия нормировки для $p^M(t, x)$, что

$$F_T(S_0) = S_0 \int_0^\infty e^x p^M(T, x) dx - K = S_0 J - K, \quad (38)$$

$$J = J_1 - J_2 + J_3, \quad (39)$$

$$J_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty e^x \exp\left\{-\frac{(x - hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx, \quad (40)$$

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_0^\infty \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \Phi\left(-\frac{x + hT}{\sigma \sqrt{T}}\right) dx, \quad (41)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \exp\left\{-\frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx. \quad (42)$$

Из сравнения (40) с (22) следует, что $b = 0$, $c = 1$, $a = hT$, $d = \sigma^2 T$. Тогда, согласно (22) с учетом (18), получаем

$$J_1 = \exp\left\{hT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right\} \Phi\left(\frac{hT + \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}\right) = \exp\{(r - \delta)T\} \Phi\left(\left(\frac{r - \delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T}\right). \quad (43)$$

Использование (24) в (43) дает, что

$$J_1 = \exp\{(r - \delta)T\} \Phi\{d_1\}. \quad (44)$$

Из сравнения (42) с (22) следует, что $b = 0, c = 1 + \frac{2h}{\sigma^2}, a = -hT, d = \sigma^2 T$. Тогда, согласно (22), аналогично (43)

$$J_3 = \exp \left\{ -hT \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 T \right\} \Phi \left(-\frac{-hT + (1 + (2h/\sigma^2))\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \quad (45)$$

Использование (18) и (24) в (45) приводит с учетом (44) к тому, что

$$J_3 = J_1 = \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(d_1). \quad (46)$$

Для вычисления J_2 вида (41) воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (47)$$

Возьмем

$$u = \Phi \left(-\frac{x + hT}{\sigma\sqrt{T}} \right), \quad dv = \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) x \right\} dx. \quad (48)$$

Тогда

$$du = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ -\frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx, \quad v = \frac{\sigma^2}{2h + \sigma^2} \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) x \right\}. \quad (49)$$

Следовательно:

$$J_2 = \frac{2h}{2h + \sigma^2} \left[-\Phi \left(-\frac{h\sqrt{T}}{\sigma} \right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) x - \frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx \right]. \quad (50)$$

Так как, согласно (42), интеграл в (50) равен J_3 , то с учетом (46)

$$J_2 = \frac{2h}{2h + \sigma^2} \left[\exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(d_1) - \Phi \left(-\frac{h\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]. \quad (51)$$

Использование (18) в (51) дает, что

$$J_2 = \frac{2(r - \delta - (\sigma^2/2))}{2(r - \delta - (\sigma^2/2)) + \sigma^2} \left[\exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(d_1) - \Phi \left(-\frac{(r - \delta - (\sigma^2/2))\sqrt{T}}{\sigma} \right) \right]. \quad (52)$$

В результате использования (25) и (29) в (52) получаем, что

$$J_2 = (1 - \alpha^{-1}) [\exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(d_1) - \Phi(-d_2)]. \quad (53)$$

Подстановка (44), (46) и (53) в (39) дает, что

$$J = (1 + \alpha^{-1}) \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(d_1) + (1 - \alpha^{-1}) \Phi(-d_2). \quad (54)$$

Последовательно подставляя (54) в (38), а (38) в (36), приходим к (30).

б) Случай $S_0 < K$. Согласно (37),

$$F_T(S_0) = \int_b^\infty (S_0 e^x - K) p^M(T, x) dx, \quad (55)$$

где b – это решение уравнения $S_0 e^x = K$, т.е.

$$b = \ln \left(\frac{K}{S_0} \right). \quad (56)$$

Выражение (55) можно представить в виде

$$F_T(S_0) = F_T^1 - F_T^2, \quad (57)$$

$$F_T^1 = S_0 \int_b^\infty e^x p^M(T, x) dx, \quad F_T^2 = K \int_b^\infty p^M(T, x) dx. \quad (58)$$

Обозначим

$$J^1 = \int_b^\infty e^x p^M(T, x) dx. \quad (59)$$

Учитывая, что $p^M(T, x)$ имеет вид (19), J^1 представим в виде

$$J^1 = J_1^1 - J_2^1 + J_3^1, \quad (60)$$

где

$$J_1^1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty e^x \exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx, \quad (61)$$

$$J_2^1 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_b^\infty \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \Phi\left(-\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right) dx, \quad (62)$$

$$J_3^1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx. \quad (63)$$

Из сравнения (61) с (22) следует, что $c=1, a=hT, d=\sigma^2 T$. Тогда, согласно (22) с учетом (18), получаем

$$\begin{aligned} J_1^1 &= \exp\left\{hT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right\} \Phi\left(-\frac{b-(h+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\ &= \exp\{(r-\delta)T\} \Phi\left(-\frac{b-(r-\delta+(\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \quad (64)$$

Использование (26), (56) в (64) дает, что

$$J_1^1 = \exp\{(r-\delta)T\} \Phi(-y_1). \quad (65)$$

Из сравнения (63) с (22) следует, что $c=1+\frac{2h}{\sigma^2}, a=-hT, d=\sigma^2 T$. Тогда, согласно (22), аналогично (64)

$$J_3^1 = \exp\left\{-hT\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2 T\right\} \Phi\left(-\frac{-b-(-hT+(1+(2h/\sigma^2))\sigma^2 T)}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (66)$$

Использование (18), (26) и (56) в (66) приводит с учетом (65) к тому, что

$$J_3^1 = J_1^1 = \exp\{(r-\delta)T\} \Phi(-y_1). \quad (67)$$

Для вычисления J_2^1 вида (62) воспользуемся формулой интегрирования по частям (47) аналогично вычислению интеграла J_2 , где u, du, v, dv имеют вид (48)

и (49). Тогда аналогично (50)

$$J_2^1 = \frac{2h}{2h + \sigma^2} \left[-\Phi \left(-\frac{b + hT}{\sigma\sqrt{T}} \right) \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) b \right\} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) x - \frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx \right]. \quad (68)$$

Так как, согласно (63), интеграл в (68) равен J_3^1 , то с учетом (18)

$$J_2^1 = \frac{2(r - \delta - (\sigma^2/2))}{2(r - \delta - (\sigma^2/2)) + \sigma^2} \times \\ \times \left[\exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-y_1) - \Phi \left(-\frac{b + (r - \delta - (\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \exp \left\{ \frac{2b}{\sigma^2} \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) + b \right\} \right]. \quad (69)$$

В результате использования (27), (29) и (56) в (69) получаем, что

$$J_2^1 = (1 - \alpha^{-1}) [\exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-y_1) - \exp \{ \alpha b \} \Phi(-y_2)]. \quad (70)$$

Подстановка (65), (67) и (70) в (60) дает, что

$$J^1 = (1 + \alpha^{-1}) \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(-y_2). \quad (71)$$

Тогда из (58), (71) следует

$$F_T^1 = S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(-y_2) \right]. \quad (72)$$

Учитывая, что $p^M(T, x)$ имеет вид (19), F_T^2 представим в виде

$$F_T^2 = K[J_1^2 - J_2^2 + J_3^2], \quad (73)$$

где

$$J_1^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty \exp \left\{ -\frac{(x - hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx, \quad (74)$$

$$J_2^2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_b^\infty \exp \left\{ \frac{2h}{\sigma^2} x \right\} \Phi \left(-\frac{x + hT}{\sigma\sqrt{T}} \right) dx, \quad (75)$$

$$J_3^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty \exp \left\{ \frac{2h}{\sigma^2} x \right\} \exp \left\{ -\frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx. \quad (76)$$

Из сравнения (74) с (61) с учетом (22) следует, что вычисление J_1^2 будет аналогичным вычислению J_1^1 при $c = 0$. В результате получается с учетом (28), что

$$J_1^2 = \Phi(-y_3). \quad (77)$$

Из сравнения (76) с (22) следует, что $c = \frac{2h}{\sigma^2}$, $a = -hT$, $d = \sigma^2 T$. Тогда, согласно (22), выполняя преобразования, аналогичные проводившимся при вычислении J_3^1 , получаем, что

$$J_3^2 = J_1^2 = \Phi(-y_3). \quad (78)$$

Для вычисления J_2^2 вида (75) воспользуемся формулой интегрирования по частям (47), полагая

$$u = \Phi\left(-\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad dv = \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}dx. \quad (79)$$

Тогда

$$du = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx, \quad v = \frac{\sigma^2}{2h} \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}. \quad (80)$$

Следовательно,

$$J_2^2 = -\exp\left\{\frac{2hb}{\sigma^2}\right\} \Phi\left(-\frac{b+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_b^\infty \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x - \frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx. \quad (81)$$

Так как, согласно (75), интеграл в (81) равен J_3^2 , то с учетом (78), (18), (27) и (29)

$$J_2^2 = \Phi(-y_3) - \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(-y_2). \quad (82)$$

Тогда, согласно (73), (82),

$$F_T^2 = K \left[\Phi(-y_3) + \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(-y_2) \right]. \quad (83)$$

Подставляя (72) и (83) в (57), а (57) в (36), приходим к (31).

Теорема доказана.

Теорема 2. Капитал X_t^* и хеджирующая стратегия $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$ определяются формулами

$$\left(X_t^{\max}\right)^* = S_t \left[(1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(t)) + (1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t)) \right] - Ke^{-r(T-t)}, \quad (84)$$

$$\left(\gamma_t^{\max}\right)^* = (1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1(t)) + (1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t)), \quad (85)$$

$$\left(\beta_t^{\max}\right)^* = -\frac{K}{B_t} e^{-r(T-t)}, \quad (86)$$

если $S_t \geq K$;

$$\begin{aligned} \left(X_t^{\max}\right)^* = S_t & \left[(1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\Phi(-y_1(t)) - \alpha^{-1}e^{-r(T-t)}\left(\frac{K}{S_t}\right)^\alpha \Phi(-y_2(t)) \right] - \\ & - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-y_3(t)), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\left(\gamma_t^{\max}\right)^* = (1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\Phi(-y_1(t)) + (1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}\left(\frac{K}{S_t}\right)^\alpha \Phi(-y_2(t)), \quad (88)$$

$$\left(\beta_t^{\max}\right)^* = -\frac{1}{B_t} e^{-r(T-t)} \left[K\Phi(-y_3(t)) + S_t \left(\frac{K}{S_t}\right)^\alpha \Phi(-y_2(t)) \right], \quad (89)$$

если $S_t < K$.

Доказательство. Поскольку платежная функция вида (15) является естественной, то согласно общей теории платежных обязательств [1 – 3],

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} E\{f_T(S(r, \delta)) | S_t\} = e^{-r(T-t)} F_{T-t}(S_t) = X_t^*(S_t), \quad (90)$$

$$F_{T-t}(S_t) = E\{f_T(S(r, \delta)) | S_t\}, \quad (91)$$

$$\gamma_t^* = \frac{\partial X_t^*(s)}{\partial s}(S_t), \quad (92)$$

$$\beta_t^* = \frac{X_t^*(S_t) - \gamma_t^* S_t}{B_t}. \quad (93)$$

Из сравнения (32) и (90) следует, что вычисления по нахождению $F_{T-t}(S_t)$ аналогичны вычислениям по нахождению C_T с заменой S_0 на S_t и T на $(T-t)$. Таким образом, (84) и (87) следуют из (30) и (31) с учетом указанных замен. Использование (84) в (92) приводит к (85), а (86) следует из (84), (85), (93).

Из (16) следует

$$\frac{\partial \Phi(a(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}a^2(s)\right\} \frac{\partial a(s)}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Phi(-a(s))}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi(a(s))}{\partial s}. \quad (94)$$

Согласно (87),

$$\begin{aligned} \frac{\partial (X_t^{\max}(s))^*}{\partial s} &= (1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(-y_1(t)) - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha e^{-r(T-t)} \Phi(-y_2(t)) + \\ &+ s \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(-y_1(t))}{\partial s} - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(-y_2(t))}{\partial s} \right] - \\ &- K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(-y_3(t))}{\partial s} + \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha e^{-r(T-t)} \Phi(-y_2(t)). \end{aligned} \quad (95)$$

Представим (95) в виде

$$\frac{\partial (X_t^{\max}(s))^*}{\partial s} = (1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(-y_1(t)) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha \Phi(-y_2(t)) + \psi, \quad (96)$$

$$\psi = \psi_1 + s \alpha^{-1} \psi_2, \quad (97)$$

$$\psi_1 = K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_3(t))}{\partial s} - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s}, \quad (98)$$

$$\psi_2 = e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha \frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial s} - e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s}. \quad (99)$$

Из (26) – (28) следует, что

$$y_1(t) = y_3(t) - \sigma \sqrt{T-t}, \quad (100)$$

$$y_1(t) = y_2(t) - \frac{2(r-\delta)}{\sigma} \sqrt{T-t}. \quad (101)$$

Согласно (27), (28), (94),

$$\frac{\partial \Phi(y_3(t))}{\partial s} = -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_3^2(t)\right\}, \quad (102)$$

$$\frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial s} = -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2(t)\right\}. \quad (103)$$

Из (100) и (102) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} &= -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_3(t) - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right\} = \\ &= -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{y_3^2(t)}{2}\right\} \exp\left\{\sigma\sqrt{T-t}y_3(t) - \frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right\}. \end{aligned} \quad (104)$$

Использование (28) в (104) дает, что

$$\frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} = -\frac{K}{s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\{-(r-\delta)(T-t)\} \exp\left\{-\frac{y_3^2(t)}{2}\right\}. \quad (105)$$

Из (101) и (103) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} &= -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_2(t) - \frac{2(r-\delta)}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)^2\right\} = \\ &= -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{y_2^2(t)}{2}\right\} \exp\left\{\frac{2(r-\delta)}{\sigma}\sqrt{T-t}y_2(t) - \frac{2(r-\delta)^2}{\sigma^2}(T-t)\right\}. \end{aligned} \quad (106)$$

Использование (27) в (106) дает, что

$$\frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} = -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\{-(r-\delta)(T-t)\} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha \exp\left\{-\frac{y_2^2(t)}{2}\right\}. \quad (107)$$

Подставляя (102) и (105) в (98), а (103) и (107) в (99), получаем, что $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, то есть, согласно (97), $\psi = 0$. Тогда (88) следует из (92) и (96), а (89) – из (87), (88) и (93). Теорема доказана.

4. Свойства

Введем в рассмотрение коэффициенты чувствительности

$$C_T^{S_0} = \frac{\partial C_T}{\partial S_0}, \quad C_T^K = \frac{\partial C_T}{\partial K}, \quad (108)$$

определяющие зависимость цены опциона от начальной цены акции S_0 и цены исполнения опциона K .

Теорема 3. Выражения для чувствительностей цены опциона, основанного на максимальном значении цены рискового актива, имеют вид

$$\left(C_T^{S_0}\right)^{\overline{\max}} = (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \Phi(d_1) + (1 - \alpha^{-1})e^{-rT} \Phi(-d_2), \quad (109)$$

$$\left(C_T^K\right)^{\overline{\max}} = -e^{-rT}, \quad (110)$$

если $S_0 \geq K$;

$$\left(C_T^{S_0}\right)^{\max} = (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \Phi(-y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \Phi(-y_2), \quad (111)$$

$$\left(C_T^K\right)^{\max} = -e^{-rT} \left[\left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(-y_2) + \Phi(-y_3) \right], \quad (112)$$

если $S_0 < K$.

Доказательство. Дифференцирование (30) по S_0 приводит к (109). Дифференцирование (31) по S_0 дает

$$\begin{aligned} \left(C_T^{S_0}\right)^{\max} &= (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \Phi(-y_1) - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \Phi(-y_2) + \\ &+ S_0 \left[(1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \frac{\partial \Phi(-y_1)}{\partial S_0} - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_2)}{\partial S_0} \right] - \\ &- K e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_3)}{\partial S_0} + \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \Phi(-y_2). \end{aligned}$$

Представим это выражение в виде

$$\left(C_T^{S_0}\right)^{\max} = (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \Phi(-y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \Phi(-y_2) + \psi, \quad (113)$$

где ψ определяется формулами (97) – (99). Так как $\psi = 0$, то (111) следует из (113).

Дифференцирование (30) по K приводит к (110). Дифференцирование (31) по K дает

$$\begin{aligned} \left(C_T^K\right)^{\max} &= S_0 \left[(1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \frac{\partial \Phi(-y_1)}{\partial K} - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_2)}{\partial K} \right] - \\ &- e^{-rT} \left[\left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(-y_2) + \Phi(-y_3) \right] - K e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_3)}{\partial K}. \end{aligned}$$

Это выражение представим в виде

$$\left(C_T^K\right)^{\max} = -e^{-rT} \left[\left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(-y_2) + \Phi(-y_3) \right] + \tilde{\psi}, \quad (114)$$

$$\tilde{\psi} = S_0 \left[(1 + \alpha^{-1})e^{-\delta T} \frac{\partial \Phi(-y_1)}{\partial K} - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_2)}{\partial K} \right] - K e^{-rT} \frac{\partial \Phi(-y_3)}{\partial K}. \quad (115)$$

Из (26) – (28), (94) следует

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(-y_1)}{\partial K} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi TK}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_1^2\right\}, \\ \frac{\partial \Phi(-y_2)}{\partial K} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi TK}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_2^2\right\}, \\ \frac{\partial \Phi(-y_3)}{\partial K} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi TK}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_3^2\right\}. \end{cases} \quad (116)$$

Использование (116) в (115) с последующим использованием (100) и (101) дает, что

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & -\frac{S_0}{\sigma\sqrt{2\pi T}K} \left[\left(1 + \alpha^{-1}\right) e^{-\delta T} \exp\left\{-\frac{1}{2}y_1^2\right\} - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^\alpha e^{-rT} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{2(r-\delta)\sqrt{T}}{\sigma}\right)^2\right\} \right] + \\ & + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-rT} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1 + \sigma\sqrt{T})^2\right\}. \end{aligned} \quad (117)$$

Подставляя (26) в (117), получаем, что $\tilde{\psi} = 0$. Тогда (112) следует из (114). Теорема доказана.

Теорема 4. При $S_0 \geq K$ стоимость опциона $C_T^{\max}$, основанного на максимальном значении цены рискового актива, является возрастающей функцией по начальной цене акции S_0 и убывающей функцией по цене исполнения опциона K , то есть

$$(C_T^{S_0})^{\max} > 0; (C_T^K)^{\max} < 0. \quad (118)$$

При $S_0 < K$ стоимость опциона $C_T^{\max}$ является возрастающей функцией по начальной цене акции S_0 для $\alpha > 1$ и убывающей по цене исполнения опциона K для любых значений α , то есть

$$(C_T^{S_0})^{\max} > 0, \alpha > 1; (C_T^K)^{\max} < 0. \quad (119)$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать следующие свойства функции Лапласа:

$$\Phi(a) > \Phi(b), a > b; 0 \leq \Phi(z) \leq 1; \quad (120)$$

Рассмотрим случай $S_0 \geq K$. Так как $0 < \delta < r$, то из (109) следует, что

$$(C_T^{S_0})^{\max} > e^{-rT} [\Phi(d_1) + \Phi(-d_2) + \alpha^{-1}(\Phi(d_1) - \Phi(-d_2))]. \quad (121)$$

Так как, согласно (24) и (25), $d_1 > -d_2$, то свойство $(C_T^{S_0})^{\max} > 0$ следует с учетом (120) из (121), а свойство $(C_T^K)^{\max} < 0$ следует непосредственно из (110). Теперь рассмотрим случай $S_0 < K$. Если $\alpha > 1$, то $(1 - \alpha^{-1}) > 0$, и свойство $(C_T^{S_0})^{\max} > 0$ следует из (111), а свойство $(C_T^K)^{\max} < 0$ следует непосредственно из (112). Теорема доказана.

Дадим интерпретацию доказанных свойств.

1. Свойство возрастания $C_T^{\max}$ по S_0 .

Согласно платежному обязательству (15), опцион предъявляется к исполнению, если максимальное значение цены рискового актива на всем временном интервале от момента заключения контракта $t = 0$ до момента исполнения опциона $t = T$ превысит цену исполнения опциона K , т.е. $\max_{0 \leq t \leq T} S_t > K$. Поскольку при увеличении начальной цены акции S_0 риск не предъявить опцион уменьшается,

то, естественно, что цена опциона возрастает, так как за меньший риск следует больше платить.

2. Свойство убывания $C_T^{\max}$ по K .

Поскольку при увеличении величины K вероятность того, что максимальное значение цены рискованного актива превысит цену исполнения опциона, уменьшается, т.е. увеличивается риск не предъявить опцион к исполнению, то естественно, что величина, которую покупатель платит за опцион, уменьшается, так как за больший риск следует меньше платить.

Заключение

Основные результаты заключаются в следующем.

1. Получены аналитические выражения для стоимости опциона (Теорема 1).
2. Найдены хеджирующие стратегии (портфели) и соответствующие им капиталы, обеспечивающие выполнение платежного обязательства (Теорема 2).
3. Исследованы свойства цены опциона, касающиеся характера ее зависимостей от начальной цены акции и от цены исполнения опциона (Теорема 3 и 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80 – 29.
2. *Ширяев А.Н.* Стохастические проблемы финансовой математики // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 5. С. 780 – 820.
3. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001. 253 с.
4. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
5. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. 2002. Вып. 15. С. 53 – 57.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance working paper. Berkeley: Inst. of Business and Economic Research, Univ. of California, 1991. No. 220.
7. *Zhang P.G.* An introduction to exotic options // Europ. Financial M. 1995. V. 1. No. 1. P. 87 – 95.
8. *Аникина А.В., Демин Н.С.* Исследование Европейского опциона продажи с последствием в случае выплаты дивидендов. // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 216 – 220.
9. *Шенн Л.А., Ширяев А.Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 130 – 148.

Андреева Ульяна Викторовна

Демин Николай Серапионович

Ерофеева Екатерина Владимировна

Томский государственный университет

E-mail: egi@sibmail.com; dyomin@fpmk.tsu.ru; yltra@inbox.ru

Поступила в редакцию 18 февраля 2009 г.