УДК 519.2

Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков

ВЗВЕШЕННЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ARCH(1)[1]

Предложена последовательная процедура оценивания параметров процесса ARCH(1), основанная на методе наименьших квадратов. Выбор весовых коэффициентов и правила остановки гарантирует точность оценивания. Работоспособность процедуры подтверждена численным моделированием.

Ключевые слова: *процесс ARCH(1), метод наименьших квадратов, гарантированное оценивание.*

Некоторым типам данных, в частности финансовым индексам, бывает присущ эффект кластерности, т.е. чередования групп значений с большой и малой дисперсией. Для описания случайных процессов такого типа Р. Энглом была предложена модель авторегрессии с условной гетероскедастичностью (ARCH), в которой дисперсия наблюдений представляет собой случайный процесс авторегрессионного типа. В данной работе рассматривается задача оценивания параметров такого процесса и предлагается последовательный метод, гарантирующий ограниченность среднеквадратического отклонения оценки от истинного значения параметров.

1. Постановка задачи

Рассматривается случайный процесс ARCH(1):

$$\begin{gathered} x_l = \sigma_l \varepsilon_l; \\ \sigma_l^2 = \mu + \lambda x_{l-1}^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\{\varepsilon_l\}_{l\ge 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Параметры μ и λ неизвестны. Ставится задача по наблюдениям за процессом $\{x_l\}$ оценить вектор неизвестных параметров $\Lambda = [\mu, \lambda]$ с гарантированной точностью.

2. Последовательная оценка параметров

Для оценки параметров процесса (1) применим подход, предложенный в [1] для классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией. Чтобы иметь возможность использовать эти результаты, представим процесс (1) в виде

$$x_l^2 = \sigma_l^2 + \sigma_l^2(\varepsilon_l^2 - 1).$$

Введем обозначения $B^2 = M(\varepsilon_l^2 - 1)^2$, $\eta_l = (\varepsilon_l^2 - 1)/B$ и, учитывая (1), получим

$$x_l = \mu + \lambda x_{l-1}^2 + (\mu + \lambda x_{l-1}^2) B \eta_l. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-01-00172а.

Здесь $\{\eta_l\}_{l\ge 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\eta_l = 0$, $M\eta_l^2 = 1$. Процесс (2) является процессом авторегрессии первого порядка, дисперсия шумов которого $(\mu + \lambda x_{l-1}^2)B$ неизвестна и, более того, не ограничена сверху. Преобразуем далее процесс (2). Введем обозначения

$$y_{l-1}^2 = \max\{1, x_{l-1}^2\}, \quad z_l = \frac{x_l^2}{y_{l-1}^2}, \quad a_{l-1} = \left[\frac{1}{y_{l-1}^2}, \frac{x_{l-1}^2}{y_{l-1}^2}\right]^T. \tag{3}$$

Перейдем теперь к случайному процессу $\{z_l\}$ вида

$$z_l = \Lambda a_{l-1} + \Lambda a_{l-1} B\eta_l. \tag{4}$$

Так как $\Lambda a_{l-1} \le \mu + \lambda$, данный процесс обладает ограниченной дисперсией шумов.

Поставим задачу оценки вектора параметров Λ процесса (4). Используем для построения оценки модифицированный метод наименьших квадратов. Оценка параметров строится в два этапа.

На первом этапе на интервале $[1, n]$ вычисляется статистика Γ_n, затем она используется для компенсации неизвестной дисперсии помех. Для определения вида Γ_n преобразуем процесс (2). Введем обозначения

$$\tilde{y}_{l-1}^2 = \min\{1, x_{l-1}^2\}, \quad \tilde{x}_l = \frac{x_l}{\tilde{y}_{l-1}^2}, \quad \tilde{a}_{l-1} = \left[\frac{1}{\tilde{y}_{l-1}^2}, \frac{x_{l-1}^2}{\tilde{y}_{l-1}^2}\right]^T.$$

В этом определении требуется, чтобы наблюдения x_{l-1} на промежутке $[1, n]$ были отличны от нуля, иначе можно выбрать первый промежуток, для которого верно это условие. Случайный процесс $\{\tilde{x}_l\}$ имеет вид

$$\tilde{x}_l = \Lambda \tilde{a}_{l-1} \varepsilon_l. \tag{5}$$

Очевидно, что $\Lambda \tilde{a}_{l-1} \ge \lambda + \mu$. Тогда Γ_n можно представить как

$$\Gamma_n = C_n \sum_{l=1}^{n} \tilde{x}_l^2, \quad C_n = B^2 M\left(\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l^2\right)^{-1}. \tag{6}$$

На плотность распределения шумов $\{\varepsilon_l\}$ наложим условие [1]

$$f_\varepsilon(u) = O\left(|u|^{-\gamma}\right) \text{ при } u \to 0 \text{ для некоторого } 0 \le \gamma < 1, \tag{7}$$

которое достаточно для обеспечения конечности множителя C_n при $n \ge [2/(1-\gamma)] + 1$.

На втором этапе строится собственно оценка параметров:

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l z_{l+1} a_l^T\right) A^{-1}(\tau), \quad A(k) = \sum_{l=n+1}^{k} v_l a_l a_l^T, \tag{8}$$

где τ – случайный момент остановки, определяемый следующим образом

$$\tau = \min\{k \ge n+1 : \quad \nu_{\min}(k) \ge H\}, \tag{9}$$

$\nu_{\min}(k)$ – минимальное собственное значение матрицы $A(k)$. Определим веса v_l.

Пусть m – минимальное значение k, при котором матрица $A(n+k)$ не вырождена. На интервале $[n+1, n+m-1]$ веса имеют вид

$$v_l = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma_n a_l^T a_l}}, & \text{если } a_l \text{ линейно независим с } \{a_{n+1}, ..., a_{l-1}\}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

На интервале $[n+m, \tau-1]$ веса v_l определяются из условия

$$\frac{\nu_{\min}(k)}{\Gamma_n} = \sum_{l=n+m}^{k} v_l^2 a_l^T a_l, \tag{11}$$

а в момент τ – из условий

$$\frac{\nu_{\min}(\tau)}{\Gamma_n} \geq \sum_{l=n+m}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l, \quad \nu_{\min}(\tau) = H. \tag{12}$$

Теорема 1. Если выполнено условие (7), то момент остановки $\tau(H)$ конечен почти наверное, среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения параметров оценивается сверху величиной

$$M\left\|\Lambda^*(H) - \Lambda\right\|^2 \leq \frac{H+1}{H^2}. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно [2], момент остановки $\tau(H)$ (9) конечен почти наверное, если

$$\sum_{l=1}^{\infty} v_l^2 a_l^T a_l = \infty \text{ п.н.} \tag{14}$$

Для сходимости почти наверное ряда в (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие [3]

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left\{\sum_{l=k}^{\infty} v_l^2 a_l^T a_l \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Так как $a_l^T a_l > 1$, это условие может выполняться только при $v_l \to 0$ по вероятности. Коэффициент v_l является одним из положительных корней уравнения

$$2\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2 v^3 - 2\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2 v^2 - 2\sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2}\, v +$$
$$+\left((A_{11} - A_{22})\left(a_2^2 - a_1^2\right) - 4A_{12}a_1a_2 + \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2}\left(a_1^2 + a_2^2\right)\right) = 0.$$

Здесь a_1, a_2 – компоненты вектора a_l, а A_{11}, A_{12} и A_{22} – элементы матрицы $A(l-1)$. Нижняя граница положительных корней этого уравнения стремится к нулю, если его свободный член стремится к нулю. Но так как, согласно (3), одна из компонент вектора a_l равна 1, а вторая может принять любое значение на интервале $[0,1]$, получаем, что свободный член уравнения больше нуля с положительной вероятностью.

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров. Используя (4), неравенство Коши – Буняковского, соотношение $\| A(k)\| \geq \nu_{\min}(k)$ и (12), получаем

$$M\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2 = M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau}\left(\Lambda v_l a_l a_l^T B\eta_{l+1}\right)A^{-1}(\tau)\right\|^2 \leq$$
$$\leq M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau}\left(\Lambda v_l a_l a_l^T B\eta_{l+1}\right)\right\|^2 \left\|A^{-1}(\tau)\right\|^2 \leq \frac{1}{H^2}M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau}\Lambda v_l a_l a_l^T B\eta_{l+1}\right\|^2. \tag{15}$$

Рассмотрим второй множитель, учтем, что $\Lambda a_l \leq \lambda+\mu$, тогда

$$M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau}\Lambda v_l a_l a_l^T B\eta_{l+1}\right\|^2 \leq$$
$$\leq (\lambda+\mu)^2 B^2\left(M\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 + 2M\sum_{l=n+2}^{\tau}\sum_{k=n+1}^{l-1} v_k v_l a_k^T a_l \eta_{k+1}\eta_{l+1}\right). \tag{16}$$

Оценим первое слагаемое. Для этого введем усеченный момент остановки $\tau(N)=\min\{\tau,N\}$. Очевидно, что $\tau(N)\to\tau$ при $N\to\infty$. Рассмотрим случайную величину

$$\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2,$$

отличающуюся от суммы в первом слагаемом в (18) только верхним пределом, и найдем ее математическое ожидание. Пусть $F_l=\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l)$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l\}$, тогда τ, определенный в (9), – марковский момент относительно $\{F_l\}$. Используя свойства условных математических ожиданий, получаем

$$M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 = M\sum_{l=n+1}^{N} v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\leq\tau}\eta_{l+1}^2 = M\sum_{l=n+1}^{N} M\left\{v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\leq\tau}\eta_{l+1}^2 \middle| F_l\right\} =$$
$$= M\sum_{l=n+1}^{N} v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\leq\tau} M\left\{\eta_{l+1}^2 \middle| F_l\right\} = M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l.$$

Так как $\tau(N)\to\tau$ при $N\to\infty$, то отсюда с учетом (10) – (12)

$$M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} M\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l =$$
$$= M\sum_{l=n+1}^{n+m-1} v_l^2 a_l^T a_l + M\sum_{l=n+m}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l \leq M\left(\frac{1}{\Gamma_n}+\frac{H}{\Gamma_n}\right) = M\left(\frac{H+1}{\Gamma_n}\right).$$

Аналогично можно показать, что второе слагаемое в (16) равно нулю. Подставляя полученные результаты в (16), а затем в (15), получаем

$$M\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2 \leq \frac{H+1}{H^2}M\left(\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{\Gamma_n}\right) \tag{17}$$

Покажем теперь, что $M\left(B^2(\lambda+\mu)^2/\Gamma_n\right)\le 1$. Согласно (5), имеем

$$P\left\{\sum_{l=1}^{n}\tilde{x}_l^2\le t\right\}=P\left\{\sum_{l=1}^{n}(\Lambda\tilde{a}_{l-1})^2\varepsilon_l^2\le t\right\}\le P\left\{\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^2\le\frac{t}{(\lambda+\mu)^2}\right\}.$$

Пользуясь этим результатом, получаем

$$M\left(\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{\Gamma_n}\right)=\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{C_n}M\left(\sum_{l=1}^{n}\tilde{x}_l^2\right)^{-1}=\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{C_n}\int_0^{+\infty}P\left\{\sum_{l=1}^{n}\tilde{x}_l^2<\frac{1}{t}\right\}dt\le$$

$$\le\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{C_n}\int_0^{+\infty}P\left\{\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^2<\frac{1}{(\lambda+\mu)^2 t}\right\}dt=\frac{B^2}{C_n}M\left(\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l^2\right)^{-1}.$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$M\left(\frac{B^2(\lambda+\mu)^2}{\Gamma_n}\right)\le 1.$$

Подставляя этот результат в (19), получаем (13). Теорема доказана.

3. Результаты моделирования

Предложенный алгоритм был реализован на ЭВМ. Для каждого параметра H проводилось 1000 реализаций процедуры оценивания параметров процесса (1) при $\mu = 0,7$ и $\lambda = 0,5$. Результаты моделирования приведены в таблице.

H	$\hat{\mu}$	D_μ	Δ_μ	$\hat{\lambda}$	D_λ	Δ_λ	$\hat{\tau}$	τ_{max}
10	0,7073	0,0179	0,6670	0,4993	0,0327	0,6698	160	221
20	0,7062	0,0093	0,3736	0,5033	0,0172	0,4254	313	415
40	0,7032	0,0048	0,2581	0,5005	0,0110	0,3075	617	761

Здесь $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ – средние оценки параметров, D_λ и D_μ – среднеквадратические отклонения оценок от истинных значений параметров, Δ_λ и Δ_μ – максимальные отклонения оценок от истинных значений параметров, $\hat{\tau}$ и τ_{max} – среднее и максимальное время оценивания. Среднеквадратическое отклонение оценки от истинного значения параметра убывает с ростом H, что соответствует теоретическим результатам. Кроме того, среднее и максимальное число наблюдений, необходимое для оценивания, растет линейно относительно H, что говорит о хорошем качестве процедуры оценивания. Максимальное число наблюдений отличается от среднего не более чем на 40 %, и эта величина уменьшается с ростом H.

Заключение

В работе предложена последовательная процедура оценивания параметров процесса ARCH(1). Использование взвешенного метода наименьших квадратов со специальным выбором весовых коэффициентов и момента окончания наблюдений позволяет получать оценки с гарантированным среднеквадратическим уклонением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриенко А.А.*, *Конев В.В.* О последовательной классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией помех // Проблемы передачи информации. 1995. Т. 31. Вып. 4. С. 51 – 62.
2. *Воробейчиков С.Э.*, *Медер Н.А.* On guaranteed estimation of parameter of random processes by the weighted least square method // Preprints of the 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. Barcelona. Spain, 21 – 26 July 2002. No. 1200.
3. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

Буркатовская Юлия Борисовна
Воробейчиков Сергей Эрикович
Томский государственный университет
E-mail: burkatovskaya@sibmail.com; sev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 19 мая 2009 г.