

УДК 519.872

С.П. Моисеева, И.А. Ананина, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКОВ В СИСТЕМЕ $M/G/∞$ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ¹

В работе построена математическая модель изменения числа заявок в системе массового обслуживания с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов. Методом предельной декомпозиции исследованы суммарный и двумерный потоки обращений к системе. Найдено аналитическое выражение для производящих функций исследуемых потоков.

Ключевые слова: *немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, метод предельной декомпозиции.*

В классической теории массового обслуживания существует не так много моделей, исследование которых удаётся выполнить аналитическими методами и получить окончательные результаты в виде формул для вероятностно-временных характеристик исследуемых систем. Это, прежде всего, марковские системы, процесс изменения состояний которых определяется цепями Маркова, то есть дискретными марковскими процессами [1], однолинейные полумарковские системы, исследование которых реализуется методом вложенных цепей Маркова [2], в частности, известна формула Поллачека – Хинчина [3], а также формулы Эрланга для N -линейных систем с произвольным временем обслуживания [4], процесс изменения состояний которых является немарковским и даже немарковизируемым. В этих моделях входящие потоки определены классом стационарных пуассоновских либо рекуррентных потоков [5].

В то же время многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей потоков (пуассоновских и рекуррентных) реальным данным. Например, потоки обращений в торговые или страховые компании [6]. При построении математических моделей таких компаний нужно учитывать, что поток клиентов, повторно обращающихся в ту же компанию, очевидно, не является пуассоновским. Построению и исследованию математических моделей таких потоков в СМО с экспоненциальным временем обслуживания посвящены работы [6 – 10]. Вместе с тем, исследованию потоков в СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов с произвольным временем обслуживания, а также многофазных СМО уделяется мало внимания. Для анализа таких систем разработка новых методов исследования несомненно является актуальной.

В настоящей работе предлагается метод предельной декомпозиции [11] для анализа потоков в СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обращением.

¹ Работа выполнена при поддержке АВИП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Время обслуживания на каждом приборе имеет произвольную функцию распределения $B(x)$, одинаковую для всех приборов. Заявка, завершившая обслуживание, с вероятностью $1 - r$ покидает систему, а с вероятностью r обращается к системе для повторного обслуживания (рис. 1).

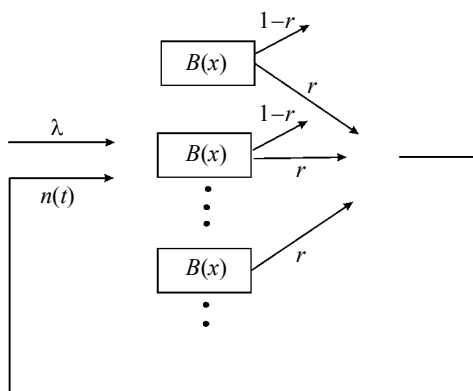


Рис. 1. СМО с неограниченным числом приборов с повторными обращениями заявок

Ставится задача исследования суммарного $s(t)$ и двумерного $\{v(t), n(t)\}$ потоков в рассматриваемой системе, где $n(t)$ – число повторных обращений, реализованных за время t , $v(t)$ – число первичных обращений реализованных за время t , $s(t) = v(t) + n(t)$.

2. Метод предельной декомпозиции

Для решения поставленной задачи предлагается метод предельной декомпозиции [11]. Суть этого метода заключается в следующем.

Входящий пуассоновский поток делится на N независимых простейших потоков с параметром λ/N , заявки каждого потока направляются для обслуживания на соответствующий прибор. Таким образом, получаем совокупность N независимых однолинейных СМО. Будем полагать, что эти СМО с отказами (рис. 2). То есть новая заявка, поступившая в систему, занятую обслуживанием, теряется.

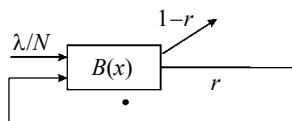


Рис. 2. Однолинейная СМО с отказом и повторными обращениями заявок

При $N \rightarrow \infty$ вероятностью потерь заявок можно пренебречь, и тогда суммарные характеристики совокупности N однолинейных СМО сходятся к характери-

стикам исходной модели. Таким образом, задача нахождения распределения вероятностей числа обращений в бесконечнолинейной СМО сводится к решению задачи нахождения распределения вероятностей числа обращений в однолинейной СМО с отказами.

3. Исследование однолинейной СМО с отказами и повторным обращением

Обозначим $s(t, N)$ – число обращений, реализованных за время t в однолинейной СМО. Тогда $P(s, t) = P\{s(t, N) = s\}$ – распределение вероятностей суммарного числа обращений к прибору за время t .

Введем следующие обозначения:

$$k(t) - \text{состояние прибора, } k(t) = \begin{cases} 0 - \text{прибор свободен,} \\ 1 - \text{прибор занят;} \end{cases}$$

$z(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если прибор занят, то есть $k(t) = 1$;

$P_1(s, z, t, N) = P\{k(t) = 1, z(t) < z, s(t, N) = s\}$ – вероятность того, что суммарное число обращений равно s , прибор занят и до конца обслуживания остается времени меньше z ;

$P_0(s, t, N) = P\{k(t) = 0, s(t, N) = s\}$ – вероятность того, что суммарное число обращений равно s и прибор свободен.

Составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [12]. По формуле полной вероятности запишем равенства

$$P_0(s, t + \Delta t, N) = P_0(s, t, N)(1 - \frac{\lambda}{N} \Delta t) + (1 - r)P_1(s, \Delta t, t, N) + o(\Delta t);$$

$$P_1(s, z - \Delta t, t + \Delta t, N) = P_1(s, z, t, N) - P_1(s, \Delta t, t, N) + P_1(s - 1, \Delta t, t, N)rB(z) + \\ + \frac{\lambda}{N} P_0(s - 1, t, N)\Delta t B(z) + o(\Delta t).$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P_0(s, t, N)}{\partial t} = \frac{(1 - r)\partial P_1(s, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} P_0(s, t, N); \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_1(s, z, t, N)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(s, z, t, N)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(s, 0, t, N)}{\partial z} + rB(z) \frac{\partial P_1(s - 1, 0, t, N)}{\partial z} + \\ + \frac{\lambda}{N} P_0(s - 1, t, N)B(z). \quad (2)$$

Рассмотрим функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_0(s, t, N) = H_0(x, t, N); \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_1(s, z, t, N) = H_1(x, z, t, N). \quad (4)$$

Тогда из (1), (2) следует, что $H_1(x, z, t, N)$ и $H_0(x, t, N)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [13]:

$$\frac{\partial H_0(x, t, N)}{\partial t} = \frac{(1-r)\partial H_1(x, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} H_0(x, t, N),$$

$$\frac{\partial H_1(x, z, t, N)}{\partial t} - \frac{\partial H_1(x, z, t, N)}{\partial z} = (rxB(z)-1) \frac{\partial H_1(x, 0, t, N)}{\partial z} + H_0(x, t, N) x \frac{\lambda}{N} B(z),$$

решение которой будем искать в виде

$$H_0(x, t, N) = 1 + \frac{1}{N} F_0(x, t) + o(N^{-2}); \quad (5)$$

$$H_1(x, z, t, N) = \frac{1}{N} F_1(x, z, t) + o(N^{-2}). \quad (6)$$

Тогда уравнения для $F_1(x, z, t)$, $F_0(x, t)$ имеют вид

$$\frac{\partial F_0(x, t)}{\partial t} = -\lambda + (1-r)h(x, t); \quad (7)$$

$$\frac{\partial F_1(x, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x, z, t)}{\partial z} = \lambda x B(z) + (rxB(z)-1)h(x, t), \quad (8)$$

где $h(x, t) = \partial F_1(x, 0, t)/\partial z$.

Решение дифференциального уравнения первого порядка в частных производных первого порядка (8) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [13]

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dF_1}{\lambda x B(z) + (rxB(z)-1)h(x, t)}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Один из них найдем из уравнения $-dt = dz$.

Отсюда,

$$z = C_1 - t. \quad (9)$$

Другой первый интеграл находим из уравнения

$$dF_1 = [\lambda x B(z) + (rxB(z)-1)h(x, t)] dt.$$

Откуда, подставляя (9), получаем равенство

$$F_1 = C_2 + \int_0^t [\lambda x B(z) + (rxB(C_1 - s) - 1)h(x, s)] ds$$

которое перепишем в виде

$$F_1(x, z, t) = \Phi(C_1) + \int_0^t [\lambda x B(C_1 - s) + (rxB(C_1 - s) - 1)h(x, s)] ds,$$

или, учитывая, что C_1 определяется из равенства (9), общее решение $F_1(x, z, t)$ уравнения (8) запишем следующим образом:

$$F_1(x, z, t) = \Phi(z+t) + \int_0^t [\lambda x B(z+t-s) + (rxB(z+t-s) - 1)h(x, s)] ds; \quad (10)$$

$$F_0(x, t) = C - \lambda t + (1-r) \int_0^t h(x, s) ds, \quad (11)$$

где $\Phi(z)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для определения частного решения уравнения (8) необходимо воспользоваться начальными условиями. Из (3), (4) и (10) имеем, что

$$F_1(x, z, 0) = R_1(z) = \Phi(z) = \frac{\lambda}{1-r} \int_0^z (1-B(y)) dy ;$$

$$F_0(x, 0) = C = R_0 = \frac{\lambda b}{1-r} .$$

Таким образом, частное решение уравнения (8) принимает вид

$$F_1(x, z, t) = \frac{\lambda}{1-r} \int_0^{z+t} (1-B(y)) dy + \int_0^t [\lambda x B(z+t-s) + (rx B(z+t-s) - 1) h(x, s)] ds .$$

Дифференцируя это тождество по z в нуле, получаем интегральное уравнение

$$h(x, t) = \frac{\lambda}{1-r} + (\lambda x - \frac{\lambda}{1-r}) B(t) + rx \int_0^t b(t-s) h(t, s) ds .$$

Решение относительно функции $h(x, t)$ интегрального уравнения можно получить через преобразования Фурье [14]. Обозначив

$$\int_0^\infty e^{j\alpha t} b(t) dt = B^*(\alpha), \quad \int_0^\infty h(x, t) e^{j\alpha t} dt = \varphi(\alpha) ,$$

получаем равенство

$$\varphi(\alpha) = \frac{\lambda}{1-r} (x-1) \frac{B^*(\alpha)}{1-rx B^*(\alpha)} .$$

Следовательно, выражение для $h(x, t)$ принимает вид

$$h(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-j\alpha t} \varphi(\alpha) d\alpha . \quad (12)$$

Подставляя найденное решение $h(x, t)$ интегрального уравнения в (10), (11), при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$F_0(x, t) = -\frac{\lambda b}{1-r} - \lambda t + (1-r) \int_0^t h(x, s) ds ;$$

$$F_1(x, t) = \frac{\lambda b}{1-r} + \lambda x t + (rx - 1) \int_0^t h(x, s) ds ,$$

где $h(x, t)$ определяется равенством (12). Откуда

$$F(x, t) = F_1(x, t) + F_0(x, t) = (x-1)\lambda t + r(x-1) \int_0^t h(x, s) ds . \quad (13)$$

4. Исследование потока в СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов

Производящая функция суммарного числа обращений в рассматриваемой СМО определяется выражением

$$G(x, t) = Mx^{n(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ Mx^{(n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_N(t))} \right\} .$$

В силу того, что все $n_i, i=1 \dots N$, независимы и одинаково распределены, имеем

$$G(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} (H(x, t, N))^N.$$

Учитывая (5), (6), получаем

$$G(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} F_0(x, t) + \frac{1}{N} F_1(x, \infty, t) + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N.$$

При $z \rightarrow \infty$

$$G(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} F(x, t) + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^N.$$

Таким образом, с учетом (13) имеем

$$G(x, t) = \exp \{F(x, t)\} = \exp \left\{ (x-1)\lambda t + r(x-1) \int_0^t h(x, s) ds \right\}.$$

В случае экспоненциального времени производящую функцию можно переписать следующим образом:

$$G(x, t) = \exp \left\{ \lambda t \frac{x-1}{1-rx} - \frac{\lambda r}{\mu(1-r)} \frac{(x-1)^2}{(1-rx)^2} (1 - e^{-\mu(1-rx)t}) \right\}.$$

Полученное выражение совпадает с ранее полученными результатами для бесконечнолинейных систем массового обслуживания с повторным обращением и экспоненциальным временем обслуживания [8].

5. Исследование двумерного потока в системе СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов

Рассмотрим исходную СМО, но уже разделяя повторные и первичные обращения. Обозначим: $n(t)$ – число повторных обращений, реализованных за время t , $v(t)$ – число первичных обращений, реализованных за время t .

Будем рассматривать двумерный немарковский процесс $\{v(t), n(t)\}$.

Для соответствующей одномерной СМО аналогично $z(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t до момента окончания текущего обслуживания, если прибор занят, то есть $k(t) = 1$.

Обозначим:

$$P_1(v, n, z, t, N) = P\{k(t) = 1, v(t) = v, z(t) < z, n(t, N) = n\},$$

$$P_0(v, n, t, N) = P\{k(t) = 0, v(t) = v, n(t, N) = n\},$$

где $P_1(v, n, z, t, N)$ – вероятность того, что число первичных обращений равно v , повторных – n , прибор занят и до конца обслуживания остается времени меньше z ; $P_0(v, n, z, t, N)$ – вероятность того, что число первичных обращений равно v , повторных – n и прибор свободен.

Для вышеуказанных распределений вероятностей, применяя формулу полной вероятности, запишем равенства

$$P_0(v, n, t + \Delta t, N) = P_0(v, n, t, N) \left(1 - \frac{\lambda}{N} \Delta t\right) + (1-r) P_1(v, n, \Delta t, t, N) + o(\Delta t),$$

$$P_1(v, n, z - \Delta t, t + \Delta t, N) = P_1(v, n, z, t, N) - P_1(v, n, \Delta t, t, N) + P_1(v, n - 1, \Delta t, t, N)rB(z) + \\ + \frac{\lambda}{N} P_0(v - 1, n, t, N)\Delta t B(z) + o(\Delta t),$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(v, n, t, N)}{\partial t} = \frac{(1-r)\partial P_1(v, n, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} P_0(v, n, t, N); \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_1(v, n, z, t, N)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(v, n, z, t, N)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(v, n, 0, t, N)}{\partial z} + rB(z) \frac{\partial P_1(v, n - 1, 0, t, N)}{\partial z} + \\ + \frac{\lambda}{N} P_0(v - 1, n, t, N)B(z). \quad (15)$$

Рассмотрим функции

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^v y^n P_0(v, n, t, N) = G_0(x, y, t, N); \quad (16)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^v y^n P_1(v, n, z, t, N) = G_1(x, y, z, t, N). \quad (17)$$

Тогда из (14), (15) следует, что $G_1(x, y, z, t, N)$ и $G_0(x, y, t, N)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial G_0(x, y, t, N)}{\partial t} = \frac{(1-r)\partial G_1(x, y, 0, t, N)}{\partial z} - \frac{\lambda}{N} G_0(x, y, t, N); \quad (18)$$

$$\frac{\partial G_1(x, y, z, t, N)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(x, y, z, t, N)}{\partial z} = (rB(z)y - 1) \frac{\partial G_1(x, y, 0, t, N)}{\partial z} + \\ + G_0(x, y, t, N)x \frac{\lambda}{N} B(z), \quad (19)$$

решение которой будем искать в виде

$$G_0(x, y, t, N) = 1 + \frac{1}{N} F_0(x, y, t) + o(N^{-2}); \quad (20)$$

$$G_1(x, y, z, t, N) = \frac{1}{N} F_1(x, y, z, t) + o(N^{-2}). \quad (21)$$

Тогда уравнения для $F_1(x, z, t)$ и $F_0(x, t)$ запишутся как

$$\frac{\partial F_0(x, y, t)}{\partial t} = \lambda - (1-r) \frac{\partial F_1(x, y, 0, t)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial z} = \lambda x B(z) + (ryB(z) - 1) \frac{\partial F_1(x, y, 0, t)}{\partial z}.$$

Обозначим $\partial F_1(x, y, 0, t)/\partial z = h(x, y, t)$.

Таким образом, систему для F_0, F_1 перепишем в виде

$$\frac{\partial F_0(x, y, t)}{\partial t} = \lambda - (1-r)h(x, y, t);$$

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x, y, z, t)}{\partial z} = \lambda x B(z) + (ryB(z) - 1)h(x, y, t). \quad (22)$$

Решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (22) определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dF_1}{\lambda x B(z) + (ryB(z) - 1)h(x, y, t)}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Один из них из уравнения

$$-dt = dz.$$

$$\text{Отсюда} \quad z = C_1 - t. \quad (23)$$

Другой первый интеграл находим из уравнения

$$dF_1 = [\lambda x B(z) + (ryB(z) - 1)h(x, y, t)] dt.$$

Откуда получаем равенство

$$F_1(x, y, z, t) = C_2 + \int_0^t [\lambda x B(z) + (ryB(z) - 1)h(x, y, s)] ds.$$

Следовательно, общее решение (32) можно записать в виде

$$F_1(x, y, z, t) = \Phi(C_1) + \int_0^t [\lambda x B(C_1 - s) + (ryB(C_1 - s) - 1)h(x, y, s)] ds.$$

или, учитывая, что C_1 определяется из равенства (22), общее решение уравнения (21) запишем в виде

$$F_1(x, y, z, t) = \Phi(z + t) + \int_0^t [\lambda x B(z + t - s) + (ryB(z + t - s) - 1)h(x, y, s)] ds. \quad (23)$$

где $\Phi(z)$ – произвольная дифференцируемая функция,

Для определения частного решения уравнения (22) необходимо воспользоваться начальными условиями:

$$P_0(v, n, 0, N) = \begin{cases} 0, & v > 0, n > 0, \\ R_0(N), & v = 0, n = 0. \end{cases}$$

$$P_1(v, n, z, 0, N) = \begin{cases} 0, & v > 0, n > 0, \\ R_1(z, N), & v = 0, n = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим стационарное распределение вероятностей состояния прибора.

Из (16) следует, что выполняются равенства

$$G_0(1, 1, t, N) = R_0(N); \quad (24)$$

$$G_1(1, 1, z, t, N) = R_0(z, N). \quad (25)$$

Поэтому из (17), (18) очевидно следует, что $R_0(N)$, $R_1(z, N)$ являются решением системы уравнений

$$\frac{\lambda}{N} R_0(N) = (1 - r) \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial R_1(z, N)}{\partial z} - \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} + rB(z) \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N} R_0(N) B(z) = 0. \quad (27)$$

Отсюда получаем равенство

$$\frac{\partial R_1(z, N)}{\partial z} - \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} + rB(z) \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} + (1-r) \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} B(z) = 0,$$

или

$$\frac{\partial R_1(z, N)}{\partial z} = \frac{\partial R_1(0, N)}{\partial z} (1 - B(z)).$$

Учитывая (26), получим

$$\frac{\partial R_1(z, N)}{\partial z} = \frac{\lambda}{N(1-r)} (1 - B(z)) R_0(N),$$

$$R_1(z, N) = \frac{\lambda}{N(1-r)} R_0(N) \int_0^z (1 - B(s)) ds. \quad (28)$$

С учетом условия нормировки при $z \rightarrow \infty$, имеем систему двух линейных алгебраических уравнений

$$R_0(N) + R_1(\infty, N) = 1,$$

$$R_1(\infty, N) = \frac{\lambda b}{N(1-r)} R_0(N),$$

решение которой имеет вид

$$R_0(N) = \frac{N(1-r)}{\lambda b + N(1-r)},$$

$$R_1(\infty, N) = \frac{\lambda b}{\lambda b + N(1-r)}. \quad (28)$$

Следовательно, в силу (28) запишем

$$R_1(z, N) = \frac{\lambda}{N(1-r)} \frac{\lambda b}{\lambda b + N(1-r)} \int_0^z (1 - B(s)) ds = \frac{\lambda}{\lambda b + N(1-r)} \int_0^z (1 - B(s)) ds.$$

Устремляя $N \rightarrow \infty$ и используя формулы (20), (21), получаем

$$F_1(x, y, z, 0) = R_1(z) = \Phi(C_1) = \frac{\lambda}{1-r} \int_0^z (1 - B(s)) ds;$$

$$F_0(x, y, 0) = R_0 = \frac{\lambda b}{1-r}.$$

Таким образом, частное решение (23) принимает вид

$$F_1(x, y, z, t) = \frac{\lambda}{1-r} \int_0^{z+t} (1 - B(w)) dw + \int_0^t [\lambda x B(z+t-s) + (ry B(z+t-s) - 1) h(x, y, s)] ds.$$

Дифференцируя это тождество по z в нуле, получаем интегральное уравнение относительно $h(x, y, t)$:

$$h(x, y, t) = \frac{\lambda}{1-r} + (\lambda x - \frac{\lambda}{1-r}) B(t) + ry \int_0^t b(t-s) h(x, y, s) ds, \quad (29)$$

где $b(t-s) = \partial B(z+t-s)/\partial z|_{z=0}$.

Решение $h(x, y, t)$ интегрального уравнения (29) записывается через преобразования Фурье $\varphi(\alpha, xy) = \int_0^\infty h(x, y, t) e^{i\alpha t} dt$ в виде

$$\varphi(\alpha) = \frac{\lambda}{1-r} (x-1) \frac{B^*(\alpha)}{1-ryB^*(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$h(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} \varphi(\alpha) d\alpha$$

Подставляя решение интегрального уравнения в (23), при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} F_0(x, y, t) &= -\frac{\lambda b}{1-r} - \lambda t + (1-r) \int_0^t h(x, y, s) ds, \\ F_1(x, y, t) &= \frac{\lambda b}{1-r} + \lambda x t + (ry-1) \int_0^t h(x, y, s) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Откуда

$$F(x, y, t) = F_1(x, y, t) + F_0(x, y, t) = (x-1)\lambda t + r(y-1) \int_0^t h(x, y, s) ds.$$

Учитывая (20), (21), получаем выражение для производящей функции двумерного потока обращений в рассматриваемой СМО:

$$G(x, y, t) = \exp\{F(x, y, t)\} = \exp\left\{(x-1)\lambda t + r(y-1) \int_0^t h(x, y, s) ds\right\}.$$

Так как производящая функция $G(x, z, t)$ двумерного распределения $P(v, n, t)$ не равна произведению производящих функций одномерных распределений, то, очевидно, потоки являются зависимыми и анализ таких потоков необходимо проводить лишь только совместно.

Заключение

Таким образом, в работе построена математическая модель потоков в системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обращением. Методом предельной декомпозиции исследованы суммарный и двумерный потоки обращений в рассматриваемой системе массового обслуживания. Получены выражения для производящих функций исследуемых потоков. Показано, что результаты исследования являются обобщением ранее известных частных случаев, а именно для экспоненциального времени обслуживания [8, 9].

Полученные результаты могут быть использованы при проведении анализа потоков различных социально-экономических систем, где наблюдается эффект повторного обращения, например в страховых и торговых компаниях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 408 с.
2. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с.
3. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 236 с.
4. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
5. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
6. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции. Часть 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. С. 37 – 39.
7. Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник ТГУ. 2005. № 287. С. 46 – 51.
8. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С.173 – 175.
9. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением // Вестник ТГУ. 2006. № 16. С. 125 – 128.
10. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник ТГУ. 2006. № 293. С.49 – 52.
11. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2005. Т. 13. Вып. 5. С. 88 – 92.
12. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969. 448 с.
13. Эльцгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 3.

Моисеева Светлана Петровна

Ананина Ирина Алексеевна

Назаров Анатолий Андреевич

Томский государственный университет

E-mail: smoiseeva@mail.ru; anira@fpmk.tsu.ru; nazarov@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 16 февраля 2009 г.