МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.2

Ю.И.Параев, С.А.Цветницкая

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Рассматривается задача построения смешанного портфеля ценных бумаг, состоящего из n рисковых активов и одного безрискового. Управление портфелем состоит из двух этапов. Первый этап – нахождение рисковой структуры портфеля. Второй – распределение имеющегося капитала между рисковой частью портфеля и безрисковой.

Ключевые слова: *рисковая. структура портфеля*, *исторический горизонт*, *инвестиционный горизонт*, *портфель с минимальным риском.*

Современная теория инвестиций началась с появления статьи Г. Марковица [1] в 1952 г. Подход Марковица используется на первом этапе формирования портфеля – нахождение рисковой структуры портфеля. Д. Тобин в начале 60-х гг. XX в. предложил включить в портфель безрисковые активы. Распределение капитала между рисковыми и безрисковыми активами составляет второй этап формирования портфеля. В настоящее время существует большое количество подходов к управлению инвестиционным портфелем. Так, в [2] для улучшения процесса управления инвестициями предлагают использовать отношение Шарпа. В [3] построение портфеля происходит с применением регрессионного подхода. В [4] управление инвестиционным портфелем происходит с учетом реального поведения финансового рынка – учитываются транзакционные издержки, ограничения на объемы вложения в активы, ограничения на объемы заемных средств.

В статье рассматриваются алгоритмы построения инвестиционного портфеля на основе теоремы разделения. На первом этапе рисковая структура находится с использованием оценок ожидаемой доходности и матрицы ковариаций доходности рисковых активов. Оценки находятся методом скользящего окна. Длину окна будем называть историческим горизонтом. На втором этапе производится разделение капитала между рисковой и безрисковой структурами портфеля с использованием принципа максимума Понтрягина. В статье исследуются несколько инвестиционных стратегий, отличающихся рисковыми структурами и формой управления. Одна стратегия имеет рисковую структуру, соответствующую минимальному риску. В другой – рисковая структура была получена максимизацией отношения Шарпа. При распределении капитала между рисковой и безрисковой частью портфеля были использованы управления в программной форме и в форме обратной связи.

1. Рисковая структура портфеля

Исходными данными для выбора оптимального портфеля являются следующие данные: n рисковых активов, вектор ожидаемых доходностей

$$\mu = (\mu_1, ..., \mu_n),$$

матрица ковариаций доходностей C. Как правило, величины μ, C являются оценками рынка инвестором. Рисковая структура портфеля представляется в виде n-мерного вектора

$$x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}},$$

где x_i – доля начального капитала, инвестируемого в i-й актив. При этом должно выполняться ограничение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \quad (1)$$

Характеристиками рисковой структуры портфеля являются доходность и риск:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_{\mathrm{i}}, \; V_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j C_{ij}. \quad (2)$$

Класс допустимых портфелей определяется дополнительными ограничениями. Например, может существовать запрет коротких позиций ($x_i \le 0$). В модели Блейка [5] короткие позиции разрешены. В модели Марковица [5] рассматриваются портфели только с неотрицательными компонентами ($x_i \ge 0$). Структура рисковой части, как правило, является решением оптимизационной задачи, в которой участвуют две характеристики E_p, V_p. Очень часто одна характеристика используется в качестве оптимизационного критерия, а вторая – в качестве критериального ограничения. Иногда критерий представляет линейную комбинацию двух характеристик портфеля. Например, вводится функция полезности

$$U(x) = \tau E_p - \frac{1}{2} V_p. \quad (3)$$

Здесь $\tau -$ толерантность инвестора к риску или параметр предпочтения между риском и доходностью. Рассмотрим построение рискового портфеля, максимизирующего функцию полезности (3) при ограничении (1). Запишем функцию Лагранжа

$$L = \tau E_p - \frac{1}{2} V_p - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1) \to \max_x.$$

Введем вектор $e^{\mathrm{T}} = [11\ldots1]$ и перепишем функцию Лагранжа в векторной форме:

$$L = \tau \mu^{\mathrm{T}} x - \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} C x + \lambda(e^{\mathrm{T}} x - 1).$$

Необходимое условие максимума имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \tau\mu - Cx + \lambda e = 0. \quad (4)$$

Отсюда получаем

$$x = D(\tau\mu + \lambda e), \quad (5)$$

где $D = C^{-1}$. Чтобы найти λ, подставим x в ограничение (1):

$$e^{\mathrm{T}} x = e^{\mathrm{T}} D(\tau\mu + \lambda e) = 1.$$

Из последнего соотношения найдем λ

$$\lambda = \frac{1 - \tau e^{\mathrm{T}} D\mu}{w},$$

где $w = e^{\mathrm{T}} De$ – сумма всех элементов матрицы D. В результате получаем окончательное решение

$$x = \frac{1}{w} De + \tau \left[D\mu - \frac{e^{\mathrm{T}} D\mu}{w} e \right]. \qquad (6)$$

Структура портфеля состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое в (6) соответствует решению системы (4) при $\tau = 0$ (нулевая толерантность), что соответствует критерию $U(x) = -\frac{1}{2} V_p$. Портфель со структурой

$$x = \frac{1}{w} De \qquad (7)$$

является оптимальным портфелем с минимальной дисперсией (в дальнейшем будем его называть минимальным портфелем). Выражение в квадратных скобках в (6) представляет отклонение от минимального портфеля на единицу толерантности. Оптимальный портфель инвестора состоит из суммы двух портфелей: минимального и портфеля, соответствующего толерантности τ. Если одна из характеристик портфеля задана, то рисковая структура может быть найдена по формуле (6) при соответствующем значении толерантности τ [9].

В [2] рисковая структура находится при максимизации отношения Шарпа

$$\max_x \frac{E_p - r}{\sigma_p} = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} \mu - r}{\sqrt{x^{\mathrm{T}} C x}}. \qquad (8)$$

Выражение в числителе $E_p - r$ называется премией за риск, r – доходность безрискового актива, σ_p – среднеквадратическое отклонение. В [7] дается алгоритм нахождения структуры портфеля, соответствующей максимуму отношения Шарпа. В алгоритме используется датчик случайных чисел, равномерно распределенных на интервале [0,1]. Процедура состоит из следующих пунктов:

1. Генерируются n случайных чисел.

2. Чтобы выполнялось ограничение (1), каждое случайное число делится на сумму n случайных чисел.

3. Для каждой структуры, полученной в пункте 2, вычисляется отношение Шарпа.

Структура, соответствующая максимальному отношению Шарпа, используется в качестве рисковой структуры портфеля.

В [3] для построения рисковой части используется регрессионный подход. Введем понятие вектора эксцессов (остатков). В момент t вектор эксцессов равен $b_t = (R_{1t} - r, \ldots R_{nt} - r)$, где R_{it} – доходность i-го актива в момент t. В регрессионном подходе структура x находится из условия $\sum_{t=1}^{T} (b_t x - 1)^2 \to \min_x$. Записанное условие означает, что в каждый момент времени остаточная доходность рискового портфеля должна минимально отклоняться от 1. Введем матрицу $B=[b_1\ \ b_2\cdots b_T]^{\mathrm{T}}$. Структура рисковой части портфеля, соответствующая названному критерию, имеет вид

$$x=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}e\,,$$

где e – T-мерный вектор, состоящий из 1.

После нахождения рисковой структуры x, n рисковых активов можно заменить одним эквивалентным активом с ожидаемой доходностью $x^{\mathrm{T}}\mu$ и риском $x^{\mathrm{T}}Cx$, а затем решать задачу разделения капитала между эквивалентным рисковым активом и безрисковым.

2. Разделение капитала

Пусть в момент t капитал равен $W(t)$. В каждый момент времени капитал может быть распределен следующим образом: доля $u(t)$ вкладывается в рисковый актив, а оставшаяся доля $1-u(t)$ – в безрисковый актив. Будем считать, что

$$0\le u(t)\le 1\,. \tag{9}$$

В [8] приведены уравнения для капитала $W(t)$, для первого и второго моментов процесса $W(t)$ при условии, что цена рискового актива удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $dS(t)=aS(t)dt+\sigma S(t)d\omega(t)$, где a – среднее значение доходности рискового актива $S(t)$, σ – волатильность, $\omega(t)$ – винеровский процесс. В нашем случае $a=x^{\mathrm{T}}\mu$, $\sigma=\sqrt{x^{\mathrm{T}}Cx}$. Уравнения для капитала $W(t)$, первого момента $m(t)$ и второго момента $M(t)$ имеют вид

$$dW(t)=h(u)W(t)dt+\sigma u(t)W(t)d\omega(t),\ \ W(0)=W_0\,, \tag{10}$$

где W_0 – начальный капитал, $h(u)=(a-r)u+r$;

$$\dot m=h(u)m,\ \ m(0)=W_0\,; \tag{11}$$

$$\dot M=g(u)M,\ \ M(0)=W_0^2\,, \tag{12}$$

где $g(u)=2h(u)+\sigma^2u^2$.

Рассмотрим разделение капитала в задаче слежения. На интервале $[0,T]$ найти функцию $u(t)$, при которой минимально значение функционала

$$J=E\left\{\int_0^T(W(t)-f(t))^2\,dt\right\}=\int_0^T(M(t)-2m(t)f(t)+f^2(t))dt, \tag{13}$$

$E\{\}$ означает математическое ожидание, $f(t)$ – желаемый рост капитала. В [8] решение задачи слежения выполнено с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Функция Гамильтона с учетом функционала (13) и уравнений (11) и (12) имеет вид

$$H(m,M,p_1,p_2,u)=p_1h(u)m+p_2g(u)M-M+2mf-f^2\,, \tag{14}$$

где вспомогательные переменные $p_1(t),\ p_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{p}_1(t) = -\partial H / \partial m = -hp_1 - 2f,\ \ p_1(T) = 0; \tag{15}$$

$$\dot{p}_2(t) = -\partial H / \partial M = -gp_2 + 1,\ \ p_2(T) = 0\,. \tag{16}$$

Решения уравнений (15), (16) имеют вид

$$p_1(t) = 2\int_t^T f(\tau)\left[\exp\int_t^\tau h(u)d\xi\right]d\tau; \tag{17}$$

$$p_2(t) = -\int_t^T \left[\exp(\int_t^\tau g(u)d\xi)\right]d\tau\,. \tag{18}$$

Максимум функции Гамильтона по $u(t)$ достигается при

$$u^*(t) = -\frac{a-r}{\sigma^2}\left(\frac{p_1(t)m(t)}{2p_2(t)M(t)} + 1\right). \tag{19}$$

С учетом ограничения (9) оптимальное управление равно

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ u^*(t), \\ u^*(t), & \text{если}\ \ 0 < u^*(t) < 1, \\ 1, & \text{если}\ \ 1 < u^*(t). \end{cases} \tag{20}$$

При подстановке в (19) решений уравнений (11), (12), а также (17), (18) получим оптимальное управление в программной форме

$$u^*(t) = \frac{a-r}{\sigma^2}\left[\frac{\int_t^T f(\tau)\left[\exp(\int_0^\tau h(u)d\xi)\right]d\tau}{\int_t^T \left[\exp(\int_0^\tau g(u)d\xi)\right]d\tau} - 1\right]. \tag{21}$$

Управление в форме обратной связи можно получить, если в формуле (19) заменить значения первого и второго моментов на текущие значения $W(t)$ и $W^2(t)$. Управление в форме обратной связи имеет вид

$$u^*(t) = \frac{a-r}{\sigma^2}\left[\frac{\int_t^T f(\tau)\left[\exp(\int_t^\tau h(u)d\xi)\right]d\tau}{\int_t^T \left[\exp(\int_t^\tau g(u)d\xi)\right]d\tau} - 1\right]. \tag{22}$$

3. Результаты моделирования

Рассматривается задача слежения за эталонным портфелем с доходностью r_0=0,25, желаемый рост капитала $f(t) = W_0\exp(r_0 t)$. Инвестиционный портфель состоит из трех рисковых активов и одного безрискового с доходностью $r = 0{,}1$. В качестве рисковых активов использовали цены акций «Газпром», «Лукойл», «Газпромнефть». Рассматривали две инвестиционные стратегии. В первой стратегии рисковая структура портфеля была получена с использованием критерия максимизации отношения Шарпа, во второй стратегии рисковая структура соответствовала портфелю с минимальным риском. Ожидаемая доходность и ковариационная матрица оценивались методом скользящего среднего. Исторический горизонт (длина скользящего окна) L составлял 20 и 35 торговых дней. Инвестиционный период (горизонт) составлял один год..

Алгоритм управления портфелем состоит из следующих шагов:

1. В момент времени t на основе доходностей активов на отрезке $[t-L,t]$ находим оценку вектора ожидаемых доходностей μ и матрицы ковариаций C.

2. Используя найденные оценки, находим структуру оптимального портфеля x по формулам (7), (8).

3. Находим характеристики рисковой структуры портфеля (2).

4. Находим оптимальное управление u по формулам (21), (22).

5. Вычисляем текущее значение доходности портфеля по формуле

$$r_p = (1-u)r + ux^{\mathrm{T}} R_t \,,$$

где $R_t = (R_{1t}\ R_{2t}\ \ R_{3t}\ )^{\mathrm{T}}$ – вектор доходностей акций «Газпром», «Лукойл», «Газпромнефть» в момент t.

6. Вычисляем текущее значение капитала по формуле $W_t = W_{t-1}(1+r_p)$.

На рис. 1 – 3 показана динамика цен акций «Газпром», «Лукойл», «Газпромнефть».

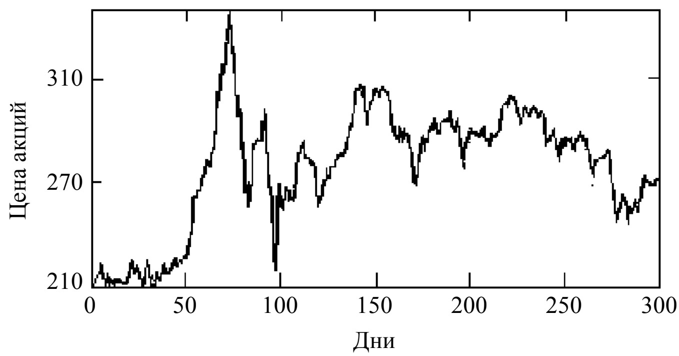

Рис. 1. Динамика цены акций «Газпром»

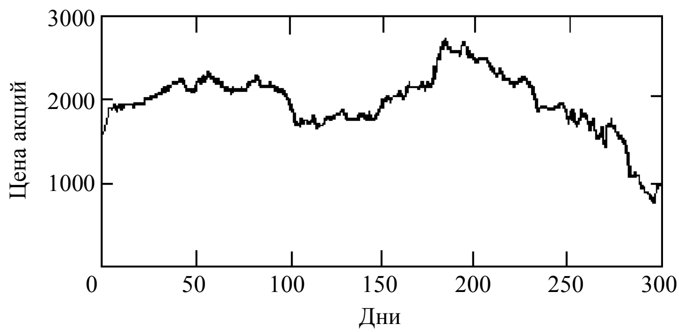

Рис. 2. Динамика цены акций «Лукойл»

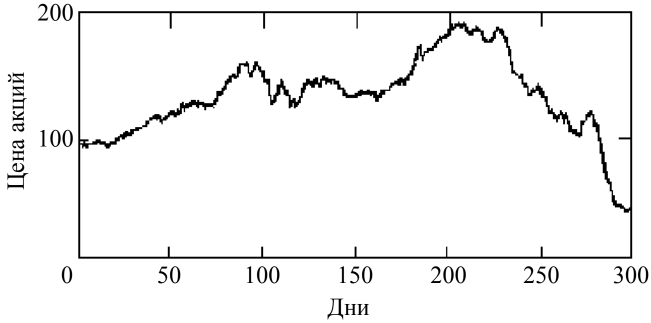

Рис. 3. Динамика цены акций «Газпромнефть»

Рисковую структуру портфеля находили из максимизации отношения Шарпа и минимизации риска портфеля. На рис. 4 приведена динамика следующих портфелей: управляемый портфель в программной форме (кр. *1*), эталонный портфель (кр. *2*), управляемый портфель в форме обратной связи (кр. *3*). Рисковая структура инвестиционных портфелей на рис. 4 была найдена минимизацией риска.

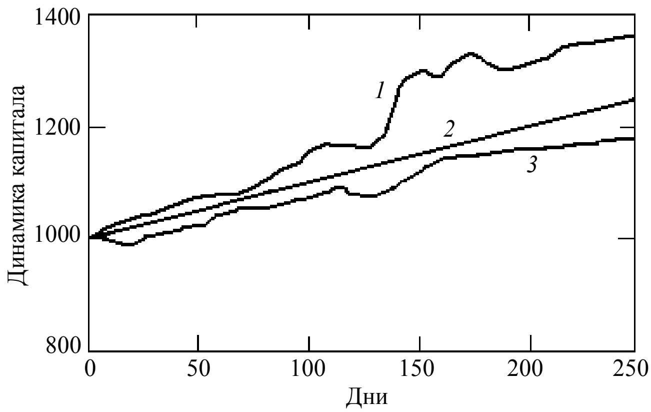

Рис. 4. Динамика инвестиционных портфелей:
1 – при управлении в программной форме, *2* – эталонный портфель,
3 – при управлении в форме обратной связи

На рис. 5 представлена динамика программного управления для разных рисковых структур. Линия *1* соответствует портфелю, рисковая структура которого найдена максимизацией отношения Шарпа, линия *2* – портфелю с минимальным риском. Видно, что при рисковой структуре, найденной при максимизации отношения Шарпа, доля вложения в рисковой актив меньше и она меньше изменяется со временем, чем доля вложения в рисковой актив, соответствующая портфелю с минимальным риском.

Исследовали зависимость качества слежения от вида управления (программная форма и форма обратной связи) и от исторического горизонта (20 и 35 торговых дней). Качество слежения оценивали по суммарному отклонению динамики управляемого портфеля от эталонного. В табл. 1 и 2 показано качество слежения от исторического горизонта и вида управления для двух стратегий.

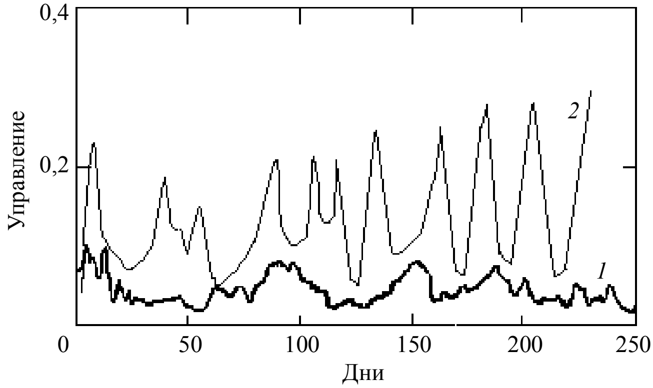

Рис. 5. Динамика программного управления портфелем:
1 – при рисковой структуре, найденной максимизацией отношения Шарпа,
2 – при рисковой структуре, найденной минимизацией риска

Таблица 1

Зависимость качества управления от длины горизонта и вида управления. Рисковая структура найдена максимизацией отношения Шарпа (первая стратегия)

Длина горизонта	Программное управление	Управление в форме обратной связи
20	–43	–40
35	–46	–31

Таблица 2

Зависимость качества управления от длины горизонта и вида управления. Рисковая структура соответствует минимальному портфелю (вторая стратегия)

Длина горизонта	Программное управление	Управление в форме обратной связи
20	74	–27
35	17,7	–37

Для первой стратегии лучший результат дает управление в форме обратной связи. Для второй стратегии лучший результат достигается при программном управлении. Из двух стратегий лучший результат показывает вторая стратегия, т.е. портфель с минимальным риском за исключением одного случая (длина горизонта 35, управление в форме обратной связи). Увеличение длины горизонта приводит к ухудшению качества слежения.

Заключение

В статье был предложен двухэтапный алгоритм управления инвестиционным портфелем. Рассмотрены два варианта рисковой структуры портфеля (первый этап) и два варианта управления (второй этап). Результаты моделирования позволяют сделать следующие выводы.

1. Для портфеля, рисковая структура которого соответствует минимальному риску, лучшее приближение к эталонному портфелю достигается при программном управлении.

2. Для портфеля, рисковая структура которого соответствует максимуму отношения Шарпа, лучшее приближение к эталонному портфелю достигается при управлении в форме обратной связи.

3. Увеличение длины скользящего окна приводит к ухудшению качества слежения.

Алгоритмическая новизна работы состоит в применении теоремы разделения и сочетания подхода Марковица на первом этапе и принципа максимума Понтрягина на втором этапе. Апробация предложенных алгоритмов была проведена на реальных данных, которые соответствуют «падающему» рынку (рис. 2 и 3). Несмотря на этот неблагоприятный факт и на запрет заемных средств, результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенного алгоритмического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77 – 91.
2. *Sharpe W.F.* The Sharpe Ratio // J. Portfolio Management. 1994.
3. *Mark Britten-Jones.* The Sampling error in estimates of mean-variance efficient portfolio weights // J. Finance. 1999. V. 54. No. 2. P. 655 – 677.
4. *Домбровский В.В.*, *Домбровский Д.В.*, *Ляшенко Е.А.* Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 1(2). С. 13 – 17.
5. *Касимов Ю.Ф.* Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг. М.: Анкил, 2005. 144 с.
6. *Sharpe W.F.* Decentralized investment management // J. Finance. 1981. V. 36. No. 2. P. 217 – 234.
7. http://www.anthony-vba.kefra.com/vba/vba8.htm
8. *Параев Ю.И.*, *Цветницкая С.А.* Управление инвестиционным портфелем // Вестник ТГУ. 2004. № 284. С. 77 – 79.
9. *Тарасевич Л.С. Гребенников П.И.*, *Леусский А.И.* Макроэкономика. М.: Высшее образование, 2005. 654 с.

Параев Юрий Иванович
Цветницкая Светлана Александровна
Томский государственный университет
E-mail:paraev@fpmk.tsu.ru; sve1@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 14 апреля 2009 г.