

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.27

С.Э. Воробейчиков, Т.В. Кабанова

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ МЕШАЮЩЕГО ПАРАМЕТРА¹

Предложена модификация последовательной процедуры оценивания параметра процесса авторегрессии первого порядка при наличии мешающего параметра. При соответствующем выборе параметров процедура гарантирует заданную точность оценивания. Полученные результаты подтверждены результатами численного моделирования.

Ключевые слова: авторегрессионные модели, последовательное оценивание, метод наименьших квадратов, мешающий параметр.

Задаче оценивания параметров авторегрессионных моделей посвящено большое количество работ. Асимптотические свойства подобных процедур являются хорошо изученными [1]. Однако на практике, при конечном объеме исследуемой выборки возникают трудности при изучении свойств полученных оценок параметров модели. В [2,3] был предложен последовательный метод идентификации параметров случайных процессов, описываемых стохастическими разностными уравнениями. Это метод позволил получать оценки неизвестных параметров с заранее заданной точностью. В [4,5] были предложены оценки для авторегрессионных процессов при любом конечном количестве неизвестных параметров. Подобные процедуры могут быть использованы и для построения оценок параметров авторегрессионных процессов при наличии постоянного слагаемого, являющегося в данном случае мешающим параметром. Однако, как показала практика, в этом случае последовательные оценки [5] для достижения необходимой точности требуют слишком большого количества наблюдений, если среднее значение процесса отлично от нуля.

В данной работе предлагается модификация оценки параметра авторегрессии, позволяющая уменьшить влияние постоянного слагаемого в модели с целью сокращения требуемого объема наблюдений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим скалярный процесс авторегрессии первого порядка, описываемый уравнением

$$y_{n+1} = A + \lambda y_n + \sigma \xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, $n \geq 0$; $\sigma > 0$ – известная величина;

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 09-08-00595а.

A, λ ($|\lambda| < 1$) – неизвестные параметры модели. Необходимо по наблюдениям процесса построить последовательную оценку неизвестного параметра авторегрессии λ .

2. Построение оценки

Если величина $\sigma \neq 1$, разделим уравнение (1) на σ и перейдем к новым наблюдениям $x_n = \frac{y_n}{\sigma}$:

$$x_{n+1} = a + \lambda x_n + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

где $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, $n \geq 0$; λ ($|\lambda| < 1$) – неизвестный параметр авторегрессии; a – мешающий параметр.

Процесс (2) является устойчивым и в стационарном режиме может быть записан в виде

$$x_{n+1} - M = \lambda(x_n - M) + \xi_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

где M – среднее значение наблюдаемого процесса $\{x_n\}_{n \geq 0}$,

$$M = \frac{a}{(1-\lambda)}. \quad (4)$$

С целью исключения влияния параметра a на оценку λ на каждом шаге будем вычитать из текущего наблюдения оценку среднего. Для этого просуммируем обе части уравнения (2) по i от 1 до n и разделим на количество слагаемых:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i+1} = a + \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i+1}. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$m1_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad m2_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i+1}, \quad \eta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{i+1} \quad (6)$$

и с учетом обозначений (6) вычтем (5) из (2). Получим

$$x_{n+1} - m2_n = \lambda(x_n - m1_n) + \xi_{n+1} - \eta_n, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

В отличие от (2), в уравнении (7) не участвует в явном виде мешающий параметр a , однако по сравнению с (2) появился дополнительный «шум» η_n . Величины $m1_n$ и $m2_n$, определенные в (6), являются оценками среднего M и при малых n могут значительно отличаться от истинного значения. Для того чтобы уменьшить влияние погрешности оценивания среднего, первые μ наблюдений будем использовать только для оценивания M , а оценку МНК параметра λ определим следующим образом:

$$\hat{\lambda}(N) = \frac{\sum_{n=\mu+1}^N c_n (x_{n+1} - m2_n)(x_n - m1_n)}{\sum_{n=\mu+1}^N c_n (x_n - m1_n)^2}. \quad (8)$$

Здесь числовая последовательность $\{c_n\}_{n \geq \mu+1}$ определяется как

$$c_n = \frac{1}{n^\beta}, \quad n \geq \mu + 1, \quad (9)$$

где β – некоторое положительное фиксированное число, $\mu \geq 1$.

Введение последовательности (9) необходимо для анализа свойств полученной оценки, что будет показано ниже.

При фиксированном объеме наблюдений N свойства оценки (8) не поддаются теоретическому исследованию. Переход к последовательной схеме оценивания [2] позволяет существенно упростить исследование свойств процедуры и полученной оценки. Для этого определим момент остановки следующим образом. Пусть задано значение $H > 0$. Определим момент прекращения наблюдений

$$\tau = \tau(H) = \inf \left\{ N > \mu : \sum_{n=\mu+1}^N c_n (x_n - m1_n)^2 \geq H \right\} \quad (10)$$

и оценку неизвестного параметра

$$\hat{\lambda}(\tau) = \frac{1}{H} \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_{n+1} - m2_n)(x_n - m1_n). \quad (11)$$

Все элементы последовательности $\{\alpha_n\}$ при $\mu + 1 \leq n < \tau$ равны 1, а последний α_τ выбирается из условия

$$\sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n)^2 = H. \quad (12)$$

Таким образом, имеем последовательную оценку параметра λ в виде (11) с учетом (9) и моментом остановки, определенном в (10).

3. Свойства построенной оценки

Рассмотрим свойства полученной оценки. Для этого сначала с учетом (7) и (10) перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\tau) &= \frac{1}{H} \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_{n+1} - m2_n)(x_n - m1_n) = \\ &= \lambda + \frac{1}{H} \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n)(\xi_{n+1} - \eta_n). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим среднеквадратическое уклонение оценки $\hat{\lambda}$ от истинного значения параметра λ .

$$\begin{aligned} M \left\{ (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right\} &= M \left\{ \left(\frac{1}{H} \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n)(\xi_{n+1} - \eta_n) \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{H^2} M \left\{ \left[\sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n) \xi_{n+1} - \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n) \eta_n \right]^2 \right\} = \\ &\leq \frac{2}{H^2} M \left\{ \left[\sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n) \xi_{n+1} \right]^2 + \left[\sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n) \eta_n \right]^2 \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{2}{H^2} \left[M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n^2 \alpha_n^2 (x_n - m1_n)^2 \xi_{n+1}^2 \right\} + M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n)^2 \right\} \cdot M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n \eta_n^2 \right\} \right].$$

С учетом (6), (9), (12), а также того факта, что последовательность $\{c_n\}_{n \geq \mu+1}$ невозрастающая и, следовательно, справедливо неравенство $c_n^2 \leq c_{\mu+1} c_n$, получаем

$$M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n^2 \alpha_n^2 (x_n - m1_n)^2 \xi_{n+1}^2 \right\} \leq M \left\{ c_{\mu+1} \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n (x_n - m1_n)^2 \xi_{n+1}^2 \right\} = c_{\mu+1} H,$$

$$M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\tau} c_n \alpha_n \eta_n^2 \right\} \leq M \left\{ \sum_{n=\mu+1}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right]^2 \right\} = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} c_n \frac{1}{n} = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} \leq \frac{1}{\beta \mu^{\beta}}.$$

Заметим, что использование числовой последовательности $\{c_n\}$ обеспечивает сходимость числового ряда в правой части последнего неравенства.

Окончательно получаем

$$M \left\{ (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right\} \leq \frac{2}{H^2} \left(c_{\mu+1} H + \frac{H}{\beta \mu^{\beta}} \right) = \frac{2}{H} \left(c_{\mu+1} + \frac{1}{\beta \mu^{\beta}} \right). \quad (14)$$

Таким образом, имеет место следующий результат:

Теорема. Пусть $\{c_n\}_{n \geq \mu+1}$ – последовательность, определенная в (8). Тогда для любого положительного порога H среднеквадратическое уклонение оценки $\hat{\lambda}(\tau)$, определенной в (11) с моментом остановки (10) и условием (12) равномерно ограничено

$$M \left\{ (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right\} \leq \frac{2}{H} \left(c_{\mu+1} + \frac{1}{\beta \mu^{\beta}} \right).$$

Из полученного неравенства следует, что за счет соответствующего выбора порога H можно обеспечить заданную точность оценивания неизвестного параметра.

4. Результаты численного моделирования

Было проведено численное моделирование процесса (2) при различных значениях параметров a и λ .

Сравнивались оценки неизвестного параметра, предложенные в [5] и в данной работе. Шум ξ_n выбирался стандартным нормальным. Пороги процедур выбирались так, чтобы обе сравниваемые процедуры гарантировали одинаковую точность C получаемых оценок. При расчете точности для модифицированной процедуры бралась величина, определенная в (14), а для первоначальной процедуры – величина $1/H'$, где H' – порог первоначальной процедуры.

На основании результатов моделирования проведено исследование предложенной модифицированной процедуры и ее сравнение с процедурой [5].

Очевидно, что при одном и том же значении порога H увеличение параметра β уменьшает значение границы в (14), то есть увеличивает точность оценки, но при этом увеличивается количество наблюдений τ , необходимых для достижения требуемой точности.

В табл. 1 проиллюстрирована зависимость параметров предложенной процедуры β , H от задаваемой точности C и показано их влияние на количество наблюдений τ . Моделирование проводилось для параметра авторегрессии $\lambda = 0,5$ при $a = 0$, $\mu = 20$.

Таблица 1

Объем наблюдений при различных значениях параметров процедуры

C	β	H	τ	$\hat{\lambda}$
0,1	0,1	163	220	0,482
	0,15	98	191	0,510
	0,2	66	136	0,496
	0,25	48	98	0,513
	0,3	36	91	0,527
0,05	0,1	326	450	0,498
	0,15	196	322	0,495
	0,2	132	211	0,527
	0,25	95	206	0,526
	0,3	71	188	0,544
0,03	0,1	544	689	0,498
	0,15	326	539	0,524
	0,2	220	489	0,495
	0,25	158	379	0,494
	0,3	118	377	0,498

В табл. 2 показано влияние модификации на количество наблюдений, необходимых для достижения требуемой точности и проведено сравнение с оценками из [5]. Количество наблюдений μ , используемых для оценивания среднего, выбиралось равным 20.

Таблица 2

Сравнение двух процедур оценивания

a	λ	C	Модифицированная процедура				Первоначальная процедура		
			H	β	$\hat{\lambda}$	τ	H'	$\hat{\lambda}$	τ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,2	0,1	163	0,1	0,171	165	10	0,242	18
	0,7	0,1	163	0,1	0,693	131	10	0,745	27
	0,2	0,05	248	0,125	0,195	488	20	0,215	45
	0,7	0,05	248	0,125	0,696	231	20	0,716	38
	0,2	0,03	220	0,2	0,209	597	33	0,196	80
	0,7	0,03	220	0,2	0,709	285	33	0,677	48
	0,2	0,02	176	0,3	0,216	924	50	0,230	108
	0,7	0,02	176	0,3	0,724	409	50	0,709	51
3	0,2	0,1	163	0,1	0,218	252	10	0,276	135
	0,7	0,1	163	0,1	0,719	121	10	0,688	60
	0,2	0,05	248	0,125	0,209	472	20	0,192	216
	0,7	0,05	248	0,125	0,710	240	20	0,719	81
	0,2	0,03	220	0,2	0,205	676	33	0,216	431
	0,7	0,03	220	0,2	0,724	312	33	0,693	182
	0,2	0,02	176	0,3	0,196	998	50	0,209	609
	0,7	0,02	176	0,3	0,697	471	50	0,692	283

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-7	0,2	0,1	163	0,1	0,221	241	10	0,283	1213
	0,7	0,1	163	0,1	0,711	132	10	0,724	201
	0,2	0,05	248	0,125	0,223	482	20	0,232	8046
	0,7	0,05	248	0,125	0,686	213	20	0,734	1029
	0,2	0,03	220	0,2	0,194	649	33	0,237	15899
	0,7	0,03	220	0,2	0,728	272	33	0,704	2805
	0,2	0,02	176	0,3	0,191	978	50	0,214	23888
10	0,7	0,02	176	0,3	0,695	419	50	0,719	5255
	0,2	0,1	163	0,1	0,199	232	10	0,542	90
	0,7	0,1	163	0,1	0,686	113	10	0,749	65
	0,2	0,05	248	0,125	0,191	473	20	0,331	29447
	0,7	0,05	248	0,125	0,722	222	20	0,729	4317
	0,2	0,03	220	0,2	0,207	613	33	0,293	16192
	0,7	0,03	220	0,2	0,702	302	33	0,726	14680
	0,2	0,02	176	0,3	0,217	955	50	0,254	113139
	0,7	0,02	176	0,3	0,696	445	50	0,718	23951

Заключение

Как видно из результатов моделирования (см. таблицы), предложенная модификация при малых по модулю значениях мешающего параметра a требует большего количества наблюдений для достижения заданной точности оценивания, чем процедура, предложенная ранее в [5]. При отклонении мешающего параметра от нуля для первоначальной процедуры количество необходимых для оценивания наблюдений существенно возрастает, в то время как модифицированная процедура остается нечувствительной к изменениям данного параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 756с.
2. *Борисов В.З., Конев В.В.* О последовательном оценивании параметров дискретных процессов // Автоматика и телемеханика, 1977. № 10. С. 58-64.
3. *Воробейчиков С.Э., Конев В.В.* О построении последовательных оценок процессов рекуррентного типа // Математическая статистика и ее приложения. Томск: Изд-во ТГУ, 1980. Вып. 6. С. 72-81.
4. *Конев В.В., Пергаменников С.М.* Последовательные планы идентификации параметров динамических систем // Автоматика и телемеханика, 1981, № 7, с. 84-92.
5. *Воробейчиков С.Э.* О последовательной идентификации параметров случайных процессов рекуррентного типа // Математическая статистика и ее приложения. Томск: Изд-во ТГУ, 1983. Вып. 9. С. 42-47.

Воробейчиков Сергей Эрикович

Кабанова Татьяна Валерьевна

Томский государственный университет

E-mail: sev@mail.tsu.ru; E-mail: tvk@bk.ru

Поступила в редакцию 7 сентября 2009 г.