УДК 519.865

Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин

ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНА ПРОДАЖИ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ В СЛУЧАЕ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ ПО РИСКОВОМУ АКТИВУ

Рассматривается задача нахождения цены опциона, портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала, обеспечивающих платежное обязательство с заданной вероятностью, для Европейского опциона продажи в случае выплаты дивидендов по рисковому активу при использовании диффузионной модели рынка.

Ключевые слова: *финансовый рынок*, *цена опциона*, *хеджирующая стратегия*, *Европейский опцион продажи*, *дивиденды.*

Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей [1]. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов требуют применения математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность приобрела финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [2 – 4]. Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право купли или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по определенной цене, а продавец опциона за премию, являющуюся ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли, а во втором – продажи. Стандартная платежная функция опциона продажи, определяющая величину выплаты при предъявлении опциона к исполнению, имеет вид $f_T = (K - S_T)^+$, где S_T – цена базисного актива в момент исполнения T, K – цена исполнения контракта, $a^+ = \max(a;0)$ Опцион, соответствующий такой платежной функции, получил название стандартного опциона продажи европейского типа для фиксированного T. В случае стандартных опционов с платежными функциями данного вида выплата по опциону может быть достаточно высокой, что представляет существенный риск для эмитента и порождает требование ограничения этого риска. В предлагаемой работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе квантильного хеджирования с заданной вероятностью выполнения платежного обязательства [4, 5].

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, представленного безрисковым (банковский счет) B и рисковым (акция) S активами с ценами соответственно B_t и S_t в момент времени $t \in [0,T]$. При этом активы B и S называют основными активами или основными ценными бумагами, образующими (B ,S) – рынок с непрерывным временем. Предполагается, что величина банковского счета B задается детерминированной функцией $B = (B_t)_{t>0}$, отвечающей уравнению

$$dB_t = rB_t dt\,, \tag{1}$$

решение которого имеет вид

$$B_t = B_0 e^{rt}, B_0 > 0, r > 0\,, \tag{2}$$

где r – процентная ставка, или банковский процент. Изменение стоимости акции $S = (S_t)_{t\geq 0}$ происходит на стандартном вероятностном пространстве $\left(\Omega, F, \mathbf{F} = (F_t)_{t>0}, \boldsymbol{P}\right)$. Ввиду того, что реально наблюдаемые флуктуации цен акций имеют случайный характер, для описания эволюции S используется модель «геометрического», или «экономического», броуновского движения [2, 3]. Такой процесс описывается уравнением

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right), \tag{3}$$

с решением

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \tag{4}$$

где $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс, $S_0 > 0, \mu \in R, \sigma > 0$.

Рассмотрим некоторого инвестора, значение капитала X в момент времени t которого определяется как

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t\,, \tag{5}$$

где F_t – измеримые процессы β_t и γ_t – части безрискового и рискового активов соответственно – составляют портфель ценных бумаг $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$. За обладание акцией осуществляются выплаты дивидендов в размере D со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, $0 \leq \delta < r$ пропорциональной рисковой составляющей капитала, а именно:

$$dD_t = \delta\gamma_t S_t dt\,. \tag{6}$$

Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами подчиняется уравнению

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t\,. \tag{7}$$

Из (5), (7) следует, что

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t\,. \tag{8}$$

Согласно (7), (8), получаем балансовое соотношение $B_t d\beta_t + S_t d\gamma = dD_t$, заменяющее условие самофинансируемости в стандартной задаче [2 – 4]. Учитывая соотношения (3), (5) – (7), запишем уравнение, определяющее X_t в виде

$$dX_t = rX_t dt + \gamma_t S_t \sigma dW_t^{\mu - r + \delta},$$

$$W_t^{\mu - r + \delta} = W_t + \frac{(\mu - r + \delta)}{\sigma}t\,. \tag{9}$$

Задача. Требуется определить капитал X_t^*, соответствующий ему портфель $\pi_t^* = \left(\beta_t^*, \gamma_t^*\right)$ и начальное значение капитала $X_0 = P_T$ как стоимости вторичной ценной бумаги – опциона, при которых обеспечивается выполнение платежного обязательства

$$X_T = f_T(S_T)\,, \tag{10}$$

где $f_T(S_T)$ – платежная функция с вероятностью $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$ [4, 5].

Базовая теория рассматривает хеджирование с единичной вероятностью, когда $\varepsilon = 0$ [1] и платежное обязательство выполняется на каждой траектории S_t. Подобная идеализация приводит к тому, что решение не зависит от параметра роста μ, который является существенным и определяет тенденцию изменения цены рискового актива. Хеджирование с вероятностью меньше единицы (квантильное хеджирование) является более реалистичным. В рамках проведенного исследования рассматривается задача хеджирования с заданной вероятностью стандартного опциона продажи в случае выплаты дивидендов, когда находится не только формула для справедливой цены опциона P_T, но и формулы, определяющие эволюцию во времени портфеля (хеждирующей стратегии) и капитала, обеспечивающих платежное обязательство с заданной вероятностью.

2. Цена опциона

Рассмотрим задачу квантильного хеджирования стандартного опциона продажи (*put* – опциона) с функцией выплат $f_T = (K - S_T)^+ = \max(0, K - S_T)$ [2, 3]. По теореме 6.1 из [4] имеем, что оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем (с вероятностью единица) платежного обязательства $f_T^{\varepsilon} = f_T I_A$, где I_A – индикатор множества A, имеющего вид

$$A = \left\{ \omega : \frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{P}^*} > \text{const} \cdot f_T \right\}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{P}^*$ – рискнейтральная (мартингальная) мера, т. е. мера, относительно которой процесс $\tilde{S}_t = S_t / B_t$ является мартингалом и существование которой обеспечивает разрешимость задачи на неарбитражных стратегиях хеджирования, т.е. стратегиях, не допускающих получения прибыли без риска. Используя тот факт из [2 – 4], что процесс плотности мартингальной меры $\boldsymbol{P}^*$ относительно $\boldsymbol{P}$

$$\frac{d\boldsymbol{P}_t^*}{d\boldsymbol{P}_t} = Z_t^{\mu - r + \delta} = \exp\left\{ -\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_t^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 t \right\}, \tag{12}$$

где $W_t^* = W_t^{\mu - r + \delta}$ вида (9) есть винеровский процесс относительно меры $\boldsymbol{P}^*$. С учетом (4) и вида платежной функции для опциона продажи область успешного хеджирования A примет вид

$$A = \left\{ \exp\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} W_t^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T \right) > \text{const} \cdot (K - S_T)^+ \right\} =$$

$$= \left\{ S_T^{\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} \left(\ln S_0 + \frac{\mu + r + \delta - \sigma^2}{2} \right) T \right) > \text{const} \cdot (K - S_T)^+ \right\}. \tag{13}$$

Необходимо рассмотреть два случая: $\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} \le 1$; $\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} > 1$.

На рис. 1 и 2 $\varphi_1(S_T) = \text{const}(K - S_T)^+$, $\varphi_2(S_T) = S_T^{(\mu - r + \delta)/\sigma^2}$. Заштрихованные области являются областями решения неравенства (13) в зависимости от значения выражения $(\mu - r + \delta)/\sigma^2$. Отсюда становится видно, что в отличие от опциона купли в случае квантильного хеджирования [4] для опциона продажи структуры

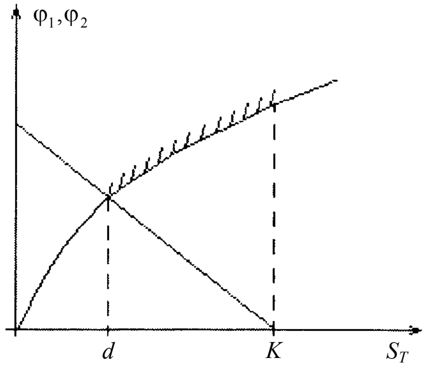

Рис. 1. Структура множества хеджирования при $\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} \le 1$

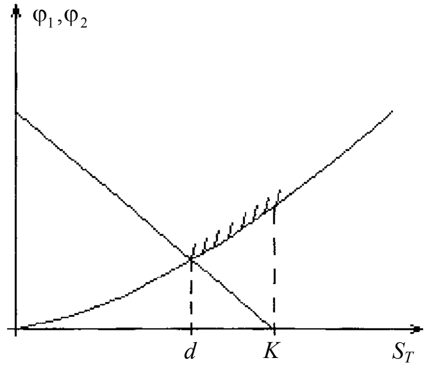

Рис. 2. Структура множества хеджирования при $\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2} > 1$

множеств хеджирования идентичны. Поэтому множество A для опциона продажи в обоих случаях может быть представлено следующим образом:

$$A = \{S_T > d\} = \left\{W_T^* > b\right\} = \left\{S_T > S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + b\sigma\right)\right\}. \qquad (14)$$

Тогда
$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\left\{S_T > S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + b\sigma\right)\right\}. \qquad (15)$$

Из (4) следует

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right). \qquad (16)$$

Ввиду монотонного возрастания экспоненциальной функции (15) примет вид

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\left\{S_0 \exp\left(\left(\mu + \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) > S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + b\sigma\right)\right\} =$$

$$= \boldsymbol{P}\left\{\exp\left(\left(\mu + \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right) > \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + b\sigma\right)\right\} =$$

$$= \boldsymbol{P}\left\{\left(\mu + \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T > \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + b\sigma\right\} =$$

$$= \boldsymbol{P}\{\sigma W_T > b\sigma - (\mu + \delta - r)T\} = \boldsymbol{P}\left\{W_T > b - \left(\frac{\mu + \delta - r}{\sigma}\right)T\right\}. \qquad (17)$$

Замечание. Далее всюду $\Phi^{-1}(y)$ означает функцию, обратную функции Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Так как винеровский процесс W_t имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t, то из (17) получаем

$$\boldsymbol{P}(A) = 1 - \Phi\left(\frac{b - \frac{\mu+\delta-r}{\sigma}T}{\sqrt{T}}\right), \qquad (18)$$

где $\boldsymbol{P}(A) = 1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1$, есть вероятность успешного хеджирования. Следовательно, для нахождения константы $b = b_p^T$ имеем соотношение

$$b_p^T = \sqrt{T}\Phi^{-1}(\varepsilon) + \frac{\mu+\delta-r}{\sigma}T\,. \qquad (19)$$

Теорема 1. Пусть $y_0(T, S_0)$ определяется по формуле

$$y_0(T,S_0) = \frac{\ln\frac{K}{S_0} - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,. \qquad (20)$$

Тогда справедливая (рациональная) цена опциона продажи в случае выплаты дивидендов определяется формулой

$$P_T = Ke^{-rT}\left[\Phi(y_0(T,S_0)) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}}\right)\right] -$$

$$-S_0e^{-\delta T}\left[\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T}) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right]. \qquad (21)$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$P_T = \mathrm{E}^*\{f_T I_A\}\,, \qquad (22)$$

где E^* – усреднение по мартингальной мере $\boldsymbol{P}^*$. Выполнив замену $x = z - a$, где $a = \left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)\sqrt{T}$, и используя (12) и (16), находим согласно (22)

$$P_T = \mathrm{E}^*\left\{e^{-rT}f_T\right\} = \mathrm{E}^*\left\{e^{-rT}(K-S_T)^+\right\} =$$

$$= e^{-rT}\mathrm{E}\left\{Z_T^{\mu-r+\delta}\left(K - S_0\exp\left\{\left(\mu+\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}\right)^+\right\} =$$

$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T} - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(K - S_0\exp\left\{\left(\mu+\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}\right)^+ \cdot\varphi(x)dx =$$

$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T} - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(K - S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\left(x + \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)\sqrt{T}\right)\right\}\right)^+ \cdot\varphi(x)dx =$$

$$= e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-za + a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{z^2}{2} + za - \frac{a^2}{2}\right\}\cdot\left(K - S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z\right\}\right)^+ dz\,.$$

Так как подынтегральное выражение больше нуля при

$$K - S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z\right\} > 0,$$

то
$$K > S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}y\right\}.$$

Тогда

$$y_0(T, S_0) > \frac{\ln\frac{K}{S_0} - (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}},$$

где $y_0(T, S_0)$ определяется по формуле (20).

Окончательно с учетом (19) получаем

$$P_T = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{b_p^T/\sqrt{T}}^{y_0(T,S_0)}\left(K - S_0\exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z\right\}\right)\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right] =$$

$$= Ke^{-rT}\left[\Phi(y_0(T, S_0)) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}}\right)\right] - S_0 e^{-\delta T}\left[\Phi(y_0(T, S_0) - \sigma\sqrt{T}) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right],$$

т.е. пришли к (21). Теорема доказана.

3. Капитал и портфель

Обозначим через $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ – минимальный хедж, где β^* – часть безрискового актива (сумма, находящаяся на банковском счете), а γ^* – часть рискового актива (сумма, вложенная в акции).

Теорема 2. В случае квантильного хеджирования портфель $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$ и текущий капитал X_t^* определяются формулами

$$\gamma_t^* = -e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}\right)\right]; \tag{23}$$

$$\beta_t^* = e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\Phi(y_0(T-t, S_t)) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right); \tag{24}$$

$$X_t^* = Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t, S_t)) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right] -$$

$$-S_t e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}\right)\right], \tag{25}$$

где b_p^{T-t} и $y_0(T-t, S_t)$ определяются по формулам (19) и (20) с заменами $T \to (T-t)$ и $S_0 \to S_t$, т.е.

$$b_p^{T-t}=\sqrt{T-t}\,\Phi^{-1}(\varepsilon)+\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}(T-t)\,,$$

$$y_0(T-t,S_t)=\frac{\ln\dfrac{K}{S_t}-\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,.$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$X_t^*=\mathrm{E}\left\{e^{-r(T-t)}f_T\,|S_t\right\};\tag{26}$$

$$\gamma_t^*=\frac{\partial X_t^*(s)}{\partial s}\Big|_{s=S_t}\,;\tag{27}$$

$$\beta_t^*=\frac{X_t^*-\gamma_t^*S_t}{B_t}\,.\tag{28}$$

Из (26) следует, что $X_T^*=e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^*\{f_T I_A|S_t\}$. Тогда, проводя вычисления, которые использовали при выводе формулы (21), получаем

$$P_{T-t}=e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{b_p^{T-t}/\sqrt{T-t}}^{y_0(T-t,S_t)}\left(K-S_t\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}z\right\}\right)\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right]=$$

$$=Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t))-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right]-$$

$$-S_te^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right],$$

т.е. пришли к (25). Согласно (25), (27),

$$\gamma_t^*=e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right]+$$

$$+Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_0(T-t,S_t))-S_t\frac{\partial}{\partial S_t}e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right).\tag{29}$$

Учитывая вид функции $y_0(T-t,S_t)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_0(T-t,S_t))=\frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{y_0(T-t,S_t)}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right]\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}\frac{\partial}{\partial S_t}y_0(T-t,S_t)=$$

$$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right)=-\frac{1}{\sigma S_t\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}\right\}.$$

Подставляя полученное выражение в (29), получаем

$$S_t \frac{\partial}{\partial S_t}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right)-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_0(T-t,S_t))-$$

$$-e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T}-t}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}\left[\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t}-\exp\left\{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+y_0\sigma\sqrt{T-t}\right\}\right]-$$

$$-e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T}-t}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right]. \tag{30}$$

Так как $\dfrac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t}-\exp\left\{-\dfrac{\sigma^2(T-t)}{2}+y_0\sigma\sqrt{T-t}\right\}=0$, то

$$\gamma_t^*=-e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T}-t}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right],$$

т.е. пришли к (23). Используя (23) и (25) в (28), получаем

$$\beta_t^*=\frac{X_t^*-\gamma_t^*S_t}{B_t}=\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t))-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right]-$$

$$-\frac{S_te^{-\delta(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right]+$$

$$+\frac{S_te^{-\delta(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)\right]=$$

$$=\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t))-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right]=\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t))-\Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right],$$

т.е. пришли к (24). Теорема доказана.

4. Свойства решения

Утверждение. Для стандартного опциона продажи в случае выплаты дивидендов решение задачи определяется формулами

$$\tilde{P}_T=Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_0)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-S_0e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_0)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right); \tag{31}$$

$$\tilde{\gamma}_t=-e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \tag{32}$$

$$\tilde{\beta}_t=e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \tag{33}$$

$$\tilde{X}_t = Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$
$$-S_0 e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad (34)$$

Данные формулы следуют в результате обобщения соответствующих формул из [2, 3] на случай выплаты дивидендов.

Следствие. В случае $\varepsilon = 0$ формулы (21), (23) – (25) переходят в формулы (31) – (34). Это соответствует тому, что несовершенное хеджирование переходит в совершенное.

Доказательство. В случае, когда $\varepsilon = 0$, вероятность успешного хеджирования $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon = 1$, т. е. переходим к совершенному виду хеджирования. Рассмотрим формулы (21), (23) – (25) при $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon = 0$ константа b_p^T принимает вид

$$b_p^T = \sqrt{T}\Phi^{-1}(0) + \frac{\mu+\delta-r}{\sigma}T = -\infty . \quad (35)$$

Тогда $\Phi\left(\dfrac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) = 0$, $\Phi\left(\dfrac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}\right) = 0$.

Согласно (23) – (25),

$$X_t^* = Ke^{-r(T-t)}\Phi(y_0(T-t,S_t)) - S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}) =$$
$$= Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$
$$-S_0 e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$\gamma_t^* = -e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t}\right)\right] =$$
$$= -e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$\beta_t^* = e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\left[\Phi(y_0(T-t,S_t)) - \Phi\left(\frac{b_p^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)\right] =$$
$$= e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln(K/S_t)-\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Таким образом, пришли к (32) – (34). Так как $\tilde{P}_T = \tilde{X}_t$, то из (35) получаем (31). Следствие доказано.

Представляют интерес зависимости стоимости опциона от параметров S_0 и K, определяющих начальную цену рискового актива и оговариваемую цену исполнения опциона. Эти зависимости характеризуются величинами

$$P_T^{S_0} = \frac{dP_T}{dS_0}, \quad P_T^K = \frac{dP_T}{dK}. \tag{36}$$

Теорема 3. Коэффициенты чувствительности $P_T^{S_0}$, P_T^K определяются формулами

$$P_T^{S_0} = \frac{e^{-\delta T}}{\sigma\sqrt{T}}\varphi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T}) - \frac{K}{S_0\sigma\sqrt{T}}e^{-rT}\varphi(y_0(T,S_0)) -$$
$$- e^{-\delta T}\left[\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T}) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right]; \tag{37}$$

$$P_T^K = e^{-rT}\left[\Phi(y_0(T,S_0)) - \Phi\left(\frac{b_p^T}{\sqrt{T}}\right)\right] + \frac{e^{-rT}}{\sigma\sqrt{T}}\varphi(y_0(T,S_0)) -$$
$$- \frac{S_0}{K\sigma\sqrt{T}}e^{-\delta T}\varphi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T}). \tag{38}$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения $P_T^{S_0}$ и P_T^K с учетом (21).

Исследования $P_T^{S_0}$ и P_T^K с привлечением численных расчетов показали, что $P_T^{S_0} < 0$, $P_T^K > 0$, т.е. рациональная стоимость опциона продажи с выплатой дивидендов является убывающей функцией от начальной цены акции S_0 и возрастающей функцией от цены исполнения опциона K. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Увеличение начальной цены S_0 приводит в среднем к увеличению S_T. Это повышает вероятность того, что S_T превзойдет K, т.е. вероятность непредъявления опциона к исполнению. В этом случае риск покупателя опциона возрастает, а за возрастающий риск следует меньше платить. Увеличение K приводит к повышению вероятности того, что S_T не превзойдет K. Таким образом, риск для покупателя опциона уменьшается, а за уменьшающийся риск следует больше платить.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Найдена формула для справедливой цены опциона продажи.

2. Найдены формулы, определяющие оптимальный портфель ценных бумаг и отвечающий этому портфелю капитал.

3. Исследованы некоторые свойства цены опциона, касающиеся характера ее зависимости от начальной цены акции и цены исполнения опциона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
2. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типа: Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применение.1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80 – 129.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. 1017 с.

4. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
5. *Новиков А.А.* Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. Вып. 1. С. 152 – 161.

Данилюк Елена Юрьевна
Демин Николай Серапионович
Томский государственный университет
E-mail: Daniluc_Elena@sibmail.com; dyomin@fpmk.tsu.ru Поступила в редакцию 25 сентября 2009 г.