ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(9)

УДК 519.872

И.Л. Лапатин, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СИСТЕМЫ GI | GI | ∞ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА[1]

Для исследования выходящего потока систем с неограниченным числом приборов и произвольным распределением времени обслуживания предложен метод просеянного потока. Показано, что в условии растущего времени обслуживания выходящий поток системы GI | GI | ∞ является асимптотически простейшим.

Ключевые слова: *система массового обслуживания*, *выходящий поток*, *метод просеянного потока*, *метод асимптотического анализа.*

Системы массового обслуживания [1 – 3] с неограниченным числом приборов являются моделями реальных систем в различных сферах повседневной жизни: банковское дело, страхование, транспорт, торговля и т.д.

Большинство работ по исследованию систем с неограниченным числом приборов [4 – 7] посвящено исследованию числа занятых приборов, а описанию и изучению свойств выходящих потоков уделялось недостаточно внимания, хотя на практике часто необходимо знание характеристик таких потоков. С одной стороны, если рассматривать системы с неограниченным числом приборов как модель, например, экономической системы (страховой, банковской), то информация о выходящем потоке даст возможность прогнозировать число обслуженных клиентов. С другой стороны, обслуженные одной системой заявки, могут образовывать входящий поток для другой, что происходит в сетях массового обслуживания (СеМО). Поэтому исследование выходящих потоков актуально и для развития теории СеМО, анализу которых посвящены, например, работы [8 – 11].

Попытки исследования выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны во второй половине XX в. такими учеными, как П.Дж. Берк и Дж.У. Коэн. В работе Л.К. Горского и Н.М. Акулиничева [12] было показано, что распределение вероятностей числа обслуженных заявок некоторых систем с ограничениями является асимптотически нормальным. Анализу выходящих потоков в системах с циклическим обслуживанием посвящены работы исследователей из школы Нижегородского государственного университета (М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова) [13 – 15].

Для систем с неограниченным числом приборов, на вход которых поступает простейший поток, было показано [16], что выходящий поток также является простейшим.

В данной работе приводится исследование выходящего потока системы с неограниченным числом приборов и произвольным распределением времени обслуживания, на вход которой поступает рекуррентный поток событий. В случае экспоненциального времени обслуживания задача исследования немарковского

[1] Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» Федерального агентства по образованию (проект № 4761).

процесса (при непуассоновком входящем потоке), определяющего число обслуженных заявок, решается введением дополнительных переменных таким образом, чтобы случайный процесс в расширенном фазовом пространстве становился марковским, что в некоторых работах [17] называют «внешним» марковизированием. Результаты по такой системе представлены в работе [18]. А при произвольной функции распределения времени обслуживания метод дополнительной переменной не дает результатов. Предлагаемый в настоящей работе метод просеянного потока позволяет исследовать выходящие потоки систем с неограниченным числом приборов, произвольным распределением времени обслуживания и непуассоновским входящим потоком.

1. Математическая модель

В данной статье рассматривается система массового обслуживания, на вход которой поступает рекуррентный поток событий, определяемый функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления его событий. Количество обслуживающих приборов не ограничено, а заявка, пришедшая в систему, занимает любой из свободных приборов. Время обслуживания поступающих заявок будем считать случайным с функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Если использовать символику, предложенную Д. Кендаллом, то рассматриваемая система обозначается $\mathrm{GI}\,|\,\mathrm{GI}\,|\,\infty$.

В работе выполнено исследование выходящего потока, то есть числа заявок, обслуженных за время T, в условии растущего времени обслуживания, то есть при условии, что $b=\int\limits_0^\infty (1-B(x))dx$ – среднее значение времени обслуживания – стремится к бесконечности.

2. Метод просеянного потока

Для произвольного входящего потока рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Времена обслуживания поступающих заявок случайные, стохастически независимые и определяются функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Пусть $T_1 > 0$, $T > 0$ – некоторые заданные величины, а $b=\int\limits_0^\infty (1-B(x))dx$ – среднее значение времени обслуживания заявки, тогда обозначим

$$S(t)=\begin{cases} B(bT_1-t+T)-B(bT_1+T), & 0<t\le bT_1, \\ B(bT_1-t+T), & bT_1<t\le bT_1+T. \end{cases}$$

Здесь $S(t)$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t\in[0,bT_1+T]$, завершит свое обслуживание в момент времени, принадлежащий интервалу $[bT_1,bT_1+T]$.

Будем полагать, что если событие входящего потока наступает в момент t, то с динамической (зависящей от момента времени t) вероятностью $S(t)$ эта заявка просеивается, то есть отправляется в просеянный поток, а с вероятностью $1-S(t)$ не рассматривается.

Очевидно, что в просеянном потоке рассматриваются те заявки, которые формируют на интервале $[bT_1, bT_1+T]$ события выходящего потока.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t, то есть на интервале $[0,t]$.

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, то число событий просеянного потока к моменту времени bT_1+T равно числу заявок, закончивших обслуживание на интервале $[bT_1, bT_1+T]$, то есть выполняется равенство

$$n(bT_1+T) = m(T, bT_1), \tag{1}$$

где $m(T,bT_1)$ – число событий выходящего потока рассматриваемой системы, наступивших на интервале $[bT_1, bT_1+T]$.

При условии, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, рассматривается переходной режим функционирования системы и нестационарный выходящий поток.

Для исследования стационарного выходящего потока будем полагать, что $T_1 \to \infty$, тогда функционирование системы массового обслуживания определяется финальным распределением и стационарным режимом.

Если предлагаемый просеянный поток является марковизируемым, то можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для многомерного распределения вероятностей и, найдя его решение, получить одномерное маргинальное распределение вероятностей для числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t. А затем, применив равенство (1), найти распределение вероятностей числа событий выходящего потока, наступивших в интервале $[bT_1, bT_1+T]$ как в переходном режиме функционирования СМО при конечных T_1, так и в стационарном режиме, полагая $T_1 \to \infty$.

3. Исследование выходящего потока системы GI | GI | ∞

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок, определяемый функцией распределения $A(x)$ длин интервалов между моментами наступления его событий. Время обслуживания поступающих заявок будем считать случайным, с функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Обозначим $z(t)$ – длину интервала от момента t до момента наступления следующего события в рекуррентном потоке, $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших к моменту времени t.

Будем исследовать двумерный марковский процесс $\{z(t), n(t)\}$.

Для распределения

$$P(z,n,t) = P\{z(t) < z, n(t) = n\}$$

можно записать следующие равенства:

$$P(z-\Delta t, n, t+\Delta t) = P(z,n,t) - P(\Delta t, n, t) +$$
$$+(1-S(t))P(\Delta t, n, t)A(z) + S(t)P(\Delta t, n-1, t)A(z) + \mathrm{o}(\Delta t).$$

Откуда получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,n,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(0,n-1,t)}{\partial z} S(t)A(z) + \frac{\partial P(0,n,t)}{\partial z}(1-S(t))A(z). \tag{2}$$

Обозначив

$$H(z,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(z,n,t)\,, \tag{3}$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, из системы (2) получим уравнение для функций $H(z,u,t)$

$$\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(z,u,t)}{\partial z}-\{1-A(z)[(e^{ju}-1)S(t)+1]\}\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial z}\,. \tag{4}$$

3. Асимптотика растущего времени обслуживания для исследования выходящего потока системы GI│GI│∞

Будем полагать, что $B(x)=B_1(x/b)$, где $B_1(x)$ – заданная функция распределения случайной величины с единичным математическим ожиданием.

Обозначим $\varepsilon=1/b$, в уравнении (4) выполним замены

$$\tau=\varepsilon t\,,\quad H(z,u,t)=F(z,u,\tau,\varepsilon)\,,\quad S(t)=S_1(\tau,\varepsilon)\,, \tag{5}$$

где
$$S_1(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}B_1(T_1-\tau+\varepsilon T)-B_1(T_1-\tau), & 0<\tau\le T_1,\\ B_1(T_1-\tau+\varepsilon T), & T_1<\tau\le T_1+\varepsilon T.\end{cases}$$

Полагая, что функция $B_1(x)$ дважды дифференцируема, вероятность $S_1(\tau,\varepsilon)$ можно записать в виде

$$S_1(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon TB'_1(T_1-\tau)+O(\varepsilon^2), & 0<\tau\le T_1,\\ O(\varepsilon^2), & T_1<\tau\le T_1+\varepsilon T.\end{cases} \tag{6}$$

Тогда для $F(z,u,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon\frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=\frac{\partial F(z,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z}-\{1-A(z)[(e^{ju}-1)S_1(\tau,\varepsilon)+1]\}\frac{\partial F(0,u,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\,. \tag{7}$$

Теорема 1. Предельное, при $\varepsilon\to 0$, значение $F(z,u,\tau)$ решения $F(z,u,\tau,\varepsilon)$ уравнения (7) имеет вид

$$F(z,u,\tau)=\frac{1}{a}\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B_1(T_1)-B_1(T_1-\tau)]\right\}\int_0^z(1-A(y))dy\,, \tag{8}$$

где величина a определена равенством

$$a=\int_0^{\infty}(1-A(y))dy\,. \tag{9}$$

Доказательство. В уравнении (7) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$, обозначив $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(z,u,\tau,\varepsilon)=F(z,u,\tau)$, получим, что $F(z,u,\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial F(z,u,\tau)}{\partial z}=\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}(1-A(z))\,, \tag{10}$$

поэтому его решение имеет вид

$$F(z,u,\tau)=\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}\int_0^z(1-A(y))dy\,. \qquad (11)$$

Заметим, что

$$F(\infty,u,\tau)=\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}a\,, \qquad (12)$$

где a – среднее значение длины интервала между моментами наступления событий в рекуррентном потоке.

Для нахождения функции $\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}$ в уравнении (7) устремим $z\to\infty$, а затем, учитывая равенство (6), поделим левую и правую части этого равенства на ε и, полагая $\varepsilon\to 0$, получим

$$\frac{\partial F(\infty,u,\tau)}{\partial\tau}=TB'(T_1-\tau)(e^{ju}-1)\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}\,.$$

Подставляя (11) в это равенство, получим обыкновенное дифференциальное уравнение по τ относительно $\partial F(0,u,\tau)/\partial z$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}\right\}a=TB'(T_1-\tau)(e^{ju}-1)\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}\,, \qquad (13)$$

откуда найдем общее решение $\partial F(0,u,\tau)/\partial z$ в виде

$$\frac{\partial F(0,u,\tau)}{\partial z}=C\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)\int_0^\tau B'(T_1-x)dx\right\}. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в решение (11), найдем решение $F(z,u,\tau)$ уравнения (10), удовлетворяющее условию нормировки $F(\infty,0,\tau)=1$:

$$F(z,u,\tau)=\frac{1}{a}\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)B(\tau)\right\}\int_0^z(1-A(y))dy\,. \qquad (15)$$

Полученное равенство (15) совпадает с равенством (8).

Теорема доказана.

В равенстве (15) выполним предельный переход при $z\to\infty$, учитывая $F(z,u,\tau)\xrightarrow[z\to\infty]{}F(u,\tau)$, и получим функцию $F(u,\tau)$:

$$F(u,\tau)=\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B_1(T_1)-B_1(T_1-\tau)]\right\}. \qquad (16)$$

В силу замен (5) и равенства (16), можно записать асимптотическое, при $\varepsilon\to 0$, приближенное равенство

$$H(u,t)=H(\infty,u,t)=F(u,\tau,\varepsilon)\approx F(u,\tau)=$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B_1(T_1)-B_1(T_1-\tau)]\right\}=\exp\left\{\frac{1}{a}T(e^{ju}-1)[B(bT_1)-B(bT_1-t)]\right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)}=H(u,t)\approx\exp\left\{(e^{ju}-1)\frac{1}{a}TB(t)\right\}. \qquad (17)$$

При $t = bT_1$ получим

$$Me^{jun(bT_1)} = Me^{jum(bT_1,T)} \approx \exp\left\{(e^{ju}-1)\frac{1}{a}TB(bT_1)\right\},$$

устремляя в котором $T_1 \to \infty$ для характеристической функции величины $m(T)$ получим

$$Me^{jum(T)} = H(u,bT_1) \approx \exp\left\{(e^{ju}-1)\frac{1}{a}T\right\}. \qquad (18)$$

Таким образом, мы получили, что в условиях растущего времени обслуживания число обслуженных заявок в системе GI | GI | ∞ за время T имеет распределение Пуассона с параметром T/a , где a – среднее значение длины интервала между моментами наступления событий в рекуррентном потоке. Следовательно, выходящий поток этой системы в условиях растущего времени обслуживания является простейшим, интенсивность которого в стационарном режиме функционирования системы массового обслуживания естественно совпадает с интенсивностью $1/a$ входящего потока.

Заключение

В данной работе был предложен метод, позволяющий исследовать выходящие потоки немарковских систем с неограниченным числом приборов. Применив его для исследования системы с рекуррентным входящим потоком получили, что в условиях растущего времени обслуживания выходящий поток является простейшим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивченко Г.И.*, *Каштанов В.А.*, *Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.
2. *Саати Т.Л.* Элементы теория массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971. 520 с.
3. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
4. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания: учеб. пособие. Томск, 2004. 225 с.
5. *Freyer B.* Ein Bedienungssystem (M | G | ∞) mit zeitabhangiger eingangsintensitat und bedienungszeitverteilung // Math. Operationsforsch. Statist. 1974. No. 5. P. 701 – 708.
6. *Назаров А.А.*, *Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 109 с.
7. *Назаров А.А.*, *Куликова О.А.* Исследование бесконечнолинейных систем массового обслуживания методом просеянного потока // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: материалы Междунар. науч. конф. «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей». Минск: БГУ, 2005. С. 98 – 102.
8. *Жожикашвили В.А.*, *Вишневский В.М.* Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988. 192 с.
9. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004. 225 с.
10. *Башарин Г.П.*, *Толмачев А.Л.* Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Матем. статистика. Теорет. кибернетика. Т. 21. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 3 – 119.
11. *Бочаров П.П.*, *Вишневский В.М.* G-сети: развитие теории мультипликативных сетей // АиТ. 2003. № 5. С. 46 – 74.

12. *Акулиничев Н.М.*, *Горский Л.К.* Об асимптотических распределениях выходящих потоков некоторых систем массового обслуживания // Кибернетика. 1973. № 1. С. 71 – 78.
13. *Пройдакова Е.В.*, *Федоткин М.А.* Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Вестник Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Математика. 2006. Вып. 1 (4). С. 92 – 102.
14. *Пройдакова Е.В.*, *Федоткин М.А.* Определение достаточного условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Вестник Нижегородского гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2006. Вып. 3 (32). С. 57 – 68.
15. *Пройдакова Е.В.*, *Федоткин М.А.* Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // АиТ. 2008. № 6. С. 96 – 106.
16. *Mirasol N.M.* The output of an $M|G|\infty$ queueing system is Poisson // Operations Research. 1963. No. 11. P. 282 – 284.
17. *Кениг Д.*, *Штойян Д.* Методы теории массового обслуживания: пер. с нем. / под ред. Г.П. Климова. М.: Радио и связь, 1981. 128 с.
18. *Лапатин И.Л.* Исследование выходящего потока системы $SM|M|\infty$ в условиях растущего времени обслуживания // Научное творчество молодежи: материалы XII Всерос. науч.-практич. конф. (18 – 19 апреля 2008 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2008. Ч. 1. С. 29 – 31.

Назаров Анатолий Андреевич
Лапатин Иван Леонидович
Томский государственный университет
E-mail: nazarov@fpmk.tsu.ru; lapatin@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 17 февраля 2009 г.