ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(9)

УДК 519.21:330.4

О.Л. Крицкий

ИНФОРМАЦИОННАЯ МАТРИЦА ФИШЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ DCC-MGARCH(1,1)

Найдена аналитическая форма записи информационной матрицы Фишера для эконометрического алгоритма DCC-MGARCH(1,1). Выдвинута статистическая гипотеза о постоянстве матриц корреляций во времени, и проводится ее статистическая проверка. Информационная матрица применяется для эконометрического исследования фондового рынка России. Обнаружен эффект кластеризации обобщенной волатильности, подтвержденный в одномерном случае другими исследователями.

Ключевые слова: *информационная матрица, многомерная динамическая условная корреляция DCC-MGARCH.*

В настоящее время математическое описание и статистическая обработка данных, получаемых как результат деятельности стохастических систем, проводится на основе одномерных, зачастую хорошо изученных вероятностных законов. Вследствие значительного роста числа этих систем и усложнения их внутренней структуры одномерные распределения уже не могут быть применены адекватно, т.е. они неспособны найти решение с заданной точностью за ограниченное время. Как следствие, огромный интерес представляет задача описания поведения систем в целом без редукции на одномерные подзадачи. Это не только облегчает понимание происходящих внутри систем процессов, но и позволяет избавиться от неустранимой погрешности, неизбежно возникающей при факторизации. Именно благодаря многомерным алгоритмам исследователи надеются построить более точный и адекватный прогноз вероятного поведения и будущего развития сложных систем.

Построению многомерных эконометрических моделей и исследованию структуры и свойств многомерных эмпирических данных посвящена обширная литература. Выделим особо только некоторые из них – в первую очередь, упомянем работы [1 – 5], которые послужили отправной точкой последующих исследований, а также работы [6, 7], обобщающие двадцатилетний опыт применения методов. Однако вместе со всё более и более увеличивающимся количеством предлагаемых многомерных алгоритмов все чаще необходимо проводить проверку качества найденных каким-либо способом оценок коэффициентов этих моделей и доказывать их несмещенность, эффективность и состоятельность. Кроме того, требуется строить доверительные интервалы для таких оценок или даже для функций от них. Последнее становится особенно актуальным в свете рассмотрения и учитывания исследователями в своих разработках всё более сложных параметров, например мер риска VaR, CVaR, ES, рыночной цены риска, коэффициентов асимметрии (для обнаружения левередж-эффекта), эксцесса и др.

Несмотря на то, что теория информационных матриц развивается более восьмидесяти лет, начиная с фундаментальных работ Фишера 1922 г., их применение к исследованию свойств многомерных эконометрических алгоритмов существенно ограничено. Цикл современных работ на эту тему открывает работа [8]: в ней для моделирования поведения финансовых рынков США, Японии, Германии, Великобритании, Франции, Италии вычислена информационная матрица коэффициентов двумерного метода GARCH(1,1) с использованием постоянной матрицы корреляций и построен так называемый тест информационной матрицы (IM-test) для проверки гипотезы о стационарности корреляционных матриц на финансовом рынке. Далее, в [9] для описания вероятных в будущем значений восьми высоколиквидных акций США проведены вычисления матрицы Фишера. Предполагалось, что исходная модель удовлетворяла многомерному методу MGARCH(1,1) с диагональной изменяющейся во времени ковариационной матрицей. Наконец, в [10] для DCC-MVGARCH(1,1) с эллиптическим вероятностным законом распределения стандартизированных остатков и с переменной матрицей корреляций вычислены математические ожидания информантов.

В настоящей работе проводится построение информационной матрицы Фишера для одного из наиболее общих на текущий момент многомерных эконометрических методов – алгоритма DCC-MGARCH(1,1) [6,7,11]. Потребность в нахождении такой матрицы обусловлена, в первую очередь, необходимостью вычисления оценок неизвестных параметров для алгоритмов семейства многомерных GARCH в режиме реального времени, например, с помощью скорингового процесса [17], а не классическим методом максимального правдоподобия. Во-вторых, эта матрица может быть использована для доказательства эффективности найденных оценок, так как выполнено следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\hat{\Theta}-\Theta\right)=\overline{Y}\sim N\left(0,J_{\Theta}^{-1}(\Theta)\right),$$

где $J_{\Theta}(\Theta)$ – информационная матрица, $\hat{\Theta}$ – оценка для вектора параметров Θ, n – количество выборочных данных. Наконец, ее использование позволяет уменьшить число оцениваемых в DCC-MGARCH(1,1) коэффициентов: предположение о слабо меняющихся с ходом времени корреляционных матрицах позволяет упростить DCC-MGARCH(1,1) до CCC-MGARCH(1,1).

Далее в работе выдвигается гипотеза (см. далее (6)) и строится критическая статистика (см. далее (10)). В заключение, информационная матрица используется при исследовании фондового рынка России, для чего формируются пять портфелей из четырех активов, каждый с фиксированными и равными долями внутри портфеля. Акции выбраны произвольно, но с условием, что торги по ним проходили на ММВБ в течение фиксированного промежутка времени. Первый портфель составлен из обыкновенных акций компаний ЛукОйл, Сургутнефтегаз, Ростелеком, РАО ЕЭС, взяты цены закрытия за период с 02 января 2000 по 27 октября 2006 года (всего 1701 значение). Второй портфель сформирован из обыкновенных акций компаний ГМК Норильский Никель, Аэрофлот, АвтоВаз, Моэнерго, взяты цены закрытия за период с 31 октября 2001 по 23 марта 2007 года (всего 1361 значение). Третий портфель состоял из обыкновенных акций компаний Балтика, Роснефть, Росбанк, Полюс Золото, взяты цены закрытия за период с 23 августа 2006 по 24 марта 2007 года (всего 144 значение). Четвертый портфель сформирован из обыкновенных акций компаний РАО ЕЭС, Аэрофлот, Сбербанк, Транснефть, взяты цены закрытия за период с февраля 2003 по март 2007 года (всего 1025 значений). Наконец, пятый портфель составлен из обыкновенных акций компаний РИТЭК, МТС, СибирьТелеком, Татнефть, взяты цены закрытия за период с февраля 2004 по март 2007 года (всего 730 значений). Все данные предоставлены компанией РБК, http://export.rbc.ru, и ФИНАМ, http://www.finam.ru.

1. Общие положения

Построим информационную матрицу Фишера для метода DCC-MGARCH(1,1) со стандартизированными остатками, удовлетворяющими многомерному нормальному распределению. Пусть $\{u_t\}$ – многомерный ряд логарифмических доходностей $u_t = \left(u_{1t}, u_{2t}, ..., u_{Kt}\right)^T$, рассчитанных для некоторой совокупности цен активов $y_t = \left(y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{Kt}\right)^T$:

$$u_{it} = \ln(y_{it}) - \ln\left(y_{i,t-1}\right),\ t = 1,...,T,\ i = 1,...,K,$$

где K – общее число ценных бумаг портфеля.

Предполагая условную гетероскедастичность многомерного временного ряда $\{u_t\}$, $t = 1,...,T$, допустим, что его условные математические ожидания равны нулю

$$E\left(u_{it} \middle| F_{t-1}\right) = 0,\ i = 1,...,K,$$

а условные дисперсии в фиксированный момент времени t определяются как

$$D\left(u_t \middle| F_{t-1}\right) = H_t,$$

где $H_t = \left(-h_{ijt}-\right)$ – симметричная положительно определенная ковариационная матрица $K\times K$, состоящая из дисперсий $h_{iit} = \sigma_{it}^2$, $i = 1,...,K$, и ковариаций $h_{ijt} = \sigma_{ijt}$, $1 \le i < j \le K$; $\overline{F} = (F_n)_{n\ge 0}$ – фильтрация, определенная σ-подалгебрами F_n, такими, что $\Theta = (\theta_1,...,\theta_N)$, если $m \le n$. Кроме того, предположим, что u_t являются условно-гауссово распределенными многомерными случайными величинами:

$$u_t = H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t,$$

где σ_{it} – разложение Холесского для H_t, вектор-столбец $\overline{\varepsilon}_t \sim N(0, I_K)$, D_t – единичная матрица порядка K.

Пусть дисперсии σ_{it}^2, Γ_t, удовлетворяют авторегрессионной зависимости, описывающей одномерный GARCH(1,1)-процесс [12] при каждом фиксированном i:

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \alpha_i\sigma_{i,t-1}^2 + \beta_i u_{i,t-1}^2, \tag{1}$$

где $\sigma_{i,0}^2 = \text{const}$, $H_t = D_t\,\Gamma_t\,D_t$, $\omega_i \ge 0$, $\alpha_i \ge 0$, $\beta_i \ge 0$ – некоторые параметры, $\alpha_i + \beta_i < 1$, ρ_{ijt}.

После нахождения волатильностей σ_{it}^2 внедиагональные элементы σ_{ijt} матрицы ковариаций H_t могут быть определены из равенств вида

$$\sigma_{ijt} = \rho_{ijt}\sigma_{it}\sigma_{jt},\ 1 \le i < j \le K, \tag{2}$$

где ρ_{ijt} – коэффициенты положительно определенной матрицы корреляций Γ_t, участвующей в разложении $H_t = D_t\,\Gamma_t\,D_t$, D_t – диагональная матрица с элементами σ_{it} на главной диагонали.

Подлежащие детерминации неизвестные параметры в выражениях (1), (2) объединим в общий вектор $\Theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$ размерности $N = 3K + TK(K-1)/2$:

$$\Theta = \left(\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K, \rho_{12t}, \rho_{13t}, ..., \rho_{1Kt}, \rho_{23t}, ..., \rho_{K-1,Kt}\right).$$

В силу предположения о выполнении нормального закона распределения для логарифмических доходностей u_t оценивание θ_i, $i = \overline{1, N}$, проведем методом максимального правдоподобия с функциями условных плотностей нормального закона распределения $f_t = (2\pi)^{-K/2} \det^{-1/2}(H_t) \exp\left(-\frac{1}{2} u_t^T H_t^{-1} u_t\right)$, вычисленных в T векторах наблюдений $u_1, u_2, ..., u_T$, и составим логарифмическую функцию правдоподобия

$$l \equiv l(\Theta) = \sum_{t=1}^{T} l_t = \sum_{t=1}^{T} \ln f_t, \tag{3}$$

где $l_t = -\frac{K}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(\det H_t) - \frac{1}{2} u_t^T H_t^{-1} u_t$.

Отбрасывая постоянный член $\left(-\frac{K}{2} \ln 2\pi\right)$ и учитывая, что $H_t = D_t \Gamma_t D_t$, в выражении (3) окончательно имеем

$$l_t = -\frac{1}{2} \ln |D_t \Gamma_t D_t| - \frac{1}{2} u_t^T D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} u_t =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |\Gamma_t| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} \ln \sigma_{jt}^2 - \frac{1}{2} u_t^T D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} u_t, \quad t = 1, ..., T. \tag{4}$$

В общем случае, когда u_t удовлетворяет произвольному вероятностному закону, для получения устойчивых оценок вектора параметров $\hat{\Theta}$ использование метода максимального правдоподобия с функцией l_t, взятой в виде (4), корректно (см., например, [13,14]) вследствие выполнения асимптотического соотношения

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left(\hat{\Theta}_n - \Theta\right) = \overline{Y} \sim N\left(0, J_\Theta^{-1}(\Theta)\right), \tag{5}$$

где $J_\Theta(\Theta)$ – информационная матрица Фишера, состоящая из элементов $J_{ij}(\Theta) = E\left(\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \theta_j}\right)$, $i, j = \overline{1, N}$.

Отметим, что даже при малом количестве значений многомерного временного ряда u_t, $1 \le t \le T$, число оцениваемых коэффициентов θ_i, $i, = \overline{1, N}$, в DCC-GARCH(1,1) будет велико. Кроме того, найденные методом максимального правдоподобия оценки корреляционных $\hat{\Gamma}_t$, а значит, и ковариационных $\hat{H}_t = \hat{D}_t \hat{\Gamma}_t \hat{D}_t$, $t = 1, ..., T$, матриц не обязательно будут положительно определенными [1, 3]. Поэтому модифицируем DCC-MGARCH(1,1) и предположим, что для изменяющихся во времени элементов корреляционной матрицы ρ_{ijt} справедливо следующее соотношение:

$$\rho_{ijt} = \rho_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1}, \quad 1 \le i < j \le K, \ 1 \le t \le T, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{i,t} = u_{i,t}\sigma_{it}^{-1}$ – стандартизированные остатки (шумы), $\varepsilon_t = D_t^{-1}H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t$, ρ_{ij} – элементы некоторой фиксированной матрицы корреляции $\Gamma = \Gamma_s$ в момент времени $t = s$.

Согласно (6), матрицы Γ_t, $1 \le t \le T$, слабо меняются с течением t и могут быть заменены на сумму постоянной корреляционной матрицы Γ с некоторым белым шумом. Как следствие, размерность вектора Θ существенно снижается и составляет $N = K^2 + 2K$:

$$\Theta = \left(\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K, \rho_{12}, \rho_{13}, ..., \rho_{1K}, \rho_{23}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, \delta_{13}, ..., \delta_{K-1,K}\right). \tag{7}$$

Получим условия, при которых возмущенная ковариационная матрица $\overline{H}_t = D_t\overline{\Gamma}_t D_t$, где $\overline{\Gamma}_t$ – матрица с элементами $\rho_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1}$, будет положительно определенной. Сформулируем и докажем теорему 1.

Теорема 1. Пусть $\Delta = \left(-\delta_{ij}-\right)$, $\delta_{ii} = 0$, $i, j = 1,..,K$, – полуопределенная матрица коэффициентов с нулевой главной диагональю, $\varepsilon = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_{1,t-1}, ..., \varepsilon_{K,t-1}\right)$ – диагональная матрица возмущений с элементами одного знака. Тогда $\overline{H}_t$ положительно определена.

Доказательство. Очевидно, что

$$\overline{H}_t = D_t\overline{\Gamma}_t D_t = D_t\left(\Gamma + \varepsilon\Delta\varepsilon\right)D_t = D_t\Gamma D_t + D_t\varepsilon\Delta\varepsilon D_t = H_t + A_t,$$

где H_t – исходная невозмущенная положительно определенная матрица ковариаций, $A_t = D_t\varepsilon\Delta\varepsilon D_t = \left(\varepsilon D_t\right)^T \Delta\left(D_t\varepsilon\right)^T = \varepsilon D_t\Delta D_t\varepsilon$ – шум. Рассмотрим подробнее матрицу A_t.

1) Пусть $\varepsilon = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_{1,t-1}, ..., \varepsilon_{K,t-1}\right)$ составлена из положительных стандартизированных остатков. Тогда εD_t положительно определена, т.е. A_t как произведение положительно определенных и полуопределенной матриц будет положительно полуопределенной.

2) Пусть $\varepsilon = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_{1,t-1}, ..., \varepsilon_{K,t-1}\right)$ составлена из отрицательных стандартизированных остатков. Тогда εD_t отрицательно определена, а $\left(-\varepsilon D_t\right)$ будет положительно определенной. Следовательно, $A_t = -\left(-\varepsilon D_t\right)\Delta\left(-\left(-\varepsilon D_t\right)\right) = \left(-\varepsilon D_t\right)\Delta\left(-\varepsilon D_t\right)$ тоже будет положительно определенной по доказанному выше первому случаю.

Таким образом, в условиях теоремы A_t всегда положительно полуопределена. Докажем, что $\overline{H}_t = H_t + A_t$ положительно определена. Действительно, по определению, для любого вектора $V \in R^K$, $V \ne 0$, имеем

$$V^T\overline{H}_t V = V^T\left(H_t + A_t\right)V = V^T H_t V + V^T A_t V.$$

Так как $V^T H_t V > 0$, $V^T A_t V \ge 0$, то $V^T\overline{H}_t V > 0$, что доказывает теорему 1.

Замечание. Если матрица ε составлена из остатков разных знаков, то A_t будет неопределенной матрицей и доказать положительную определенность $\overline{H}_t$ не удается.

Отметим, что в выражении (6) при $\delta_{ij}=0$, $1\le i<j\le K$, алгоритм DCC-MGARCH(1,1) превращается в известный метод CCC-MGARCH(1,1) [2]. Неоспоримыми преимуществом последнего алгоритма является использование единственной, постоянной по времени корреляционной матрицы Γ при моделировании значений H_t:

$$H_t = D_t\,\Gamma\,D_t\,,$$

что не только приводит к сокращению числа оцениваемых параметров в векторе Θ, но и существенно облегчает процедуру расчетов. Действительно, в случае условной нормальности случайных величин $u_t \sim N(0, H_t | F_{t-1})$ оценка максимального правдоподобия $\hat{\Gamma}$ для Γ всегда вычисляется как выборочное среднее стандартизированных остатков:

$$\hat{\Gamma} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} D_t^{-1} u_t\, u_t^T D_t^{-1}\ , \tag{8}$$

причем $\hat{\Gamma}$ почти наверное положительно определена. Далее, (8) позволяет упростить выражения (3), (4) и записать (3) в виде (при условии, что постоянные члены отброшены)

$$l = -\sum_{t=1}^{T}\ln|D_t| - \frac{T}{2}\ln\left(\sum_{t=1}^{T} D_t^{-1} u_t\, u_t^T D_t^{-1}\right).$$

Поэтому число оцениваемых методом максимального правдоподобия коэффициентов сокращается до $N=3K$:

$$\Theta = (\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K)\,.$$

Для проверки справедливости равенств $\delta_{ij}=0$, $1\le i<j\le K$, выдвинем статистическую гипотезу $\bar{H}_0 : \delta_{ij}=0$, $1\le i<j\le K$, о постоянстве матриц корреляций в разложении $H_t = D_t\,\Gamma_t\,D_t$, имеющую $Q=0{,}5\left(K^2-K\right)$ независимых ограничений. Пусть имеет место альтернативная гипотеза $\bar{H}_1 : \delta_{ij}\ne 0$, $1\le i<j\le K$.

Построим критическую статистику γ, для чего используем аналог асимптотического соотношения (5):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(l(\Theta)-l\left(\hat{\Theta}\right)\right) = \bar{Y} \sim N\left(0, \nabla_\Theta l(\Theta)\cdot J_\Theta^{-1}(\Theta)\cdot\nabla_\Theta^T l(\Theta)\right), \tag{9}$$

где $\nabla_\Theta l(\Theta) = \left(\dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial\theta_1}, \dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial\theta_2}, ..., \dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial\theta_N}\right)$, $\hat{\Theta}$ – оценка для вектора Θ из (7), найденная методом максимального правдоподобия. Соотношение (9) выполнено вследствие справедливости леммы Слуцкого о предельном переходе под знаком непрерывной функции $l(\Theta)$. Далее, так как $\nabla_\Theta l(\Theta)\cdot J_\Theta(\Theta)\cdot\nabla_\Theta^T l(\Theta)$ – сумма квадратов нормально распределенных случайных величин, то она имеет χ^2-распределение с Q степенями свободы. Поэтому γ можно выбрать в следующем виде:

$$\gamma = \hat{S}\cdot J_\Theta^{-1}\left(\hat{\Theta}\right)\cdot\hat{S}^T\,, \tag{10}$$

где $\hat{S} = \nabla_\Theta l\left(\hat{\Theta}\right)$.

Гипотеза $\overline{H}_0$ принимается с уровнем доверия $(1-\alpha)$, если $\gamma < \chi^2_{\alpha/2}(Q)$ и отвергается в противном случае.

Отметим, что информационная матрица $J_\Theta(\Theta)$ полезна не только для вычисления критической статистики (10) и проверки нулевой гипотезы о постоянстве матриц корреляций в методе DCC-MGARCH(1,1). Ее можно применять и при построении доверительных интервалов оценок предельных величин риска VaR (более подробно о вычислении VaR можно узнать, например, в [7,15], так как справедливы следующие неравенства (под знаком «$\leq$» понимается некоторое отношение полного порядка на множестве действительных векторов R^K):

$$\hat{V}AR_\alpha - Z_{r/2}n^{-1/2}I^{1/2}_{VAR}\left(\hat{\Theta}\right) \leq VAR_\alpha \leq \hat{V}AR_\alpha + Z_{r/2}n^{-1/2}I^{1/2}_{VAR}\left(\hat{\Theta}\right),$$

где α – уровень значимости, $I_{VAR}(\Theta) = \text{grad}_\Theta(g_\alpha(\Theta))J^{-1}_\Theta(\Theta)\text{grad}^t_\Theta(g_\alpha(\Theta))$, $g_\alpha(\Theta)$ – квантильная функция для вероятностного закона $F(x,\Theta)$, задающего распределение многомерной случайной величины ξ с реализациями $\{u_t\}$, $1 \leq t \leq T$, $Z_{r/2}$ – вектор-квантиль уровня $r/2$ стандартного многомерного нормального распределения, $(1-r)$ – вероятность, с которой полученный доверительный параллелепипед накрывает теоретическое значение VAR_α.

Другие возможные применения матрицы Фишера, а также ее основные свойства подробно рассмотрены в монографии [16].

Построим информационную матрицу $J_\Theta(\Theta)$, для чего найдем вектор-градиент $\nabla_\Theta l(\Theta)$ и вычислим соответствующие математические ожидания.

Дифференцируя дисперсии σ^2_{it}, определенные согласно (1), по $\omega_i, \alpha_i, \beta_i$, нетрудно доказать справедливость следующих рекуррентных соотношений:

$$\frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\omega_i} = 1 + \alpha_i\frac{\partial\sigma^2_{i,t-1}}{\partial\omega_i};\ \frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\alpha_i} = \sigma^2_{i,t-1} + \alpha_i\frac{\partial\sigma^2_{i,t-1}}{\partial\alpha_i};\ \frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\beta_i} = u^2_{i,t-1} + \alpha_i\frac{\partial\sigma^2_{i,t-1}}{\partial\beta_i}, \quad (11)$$

где $\dfrac{\partial\sigma^2_{i,0}}{\partial\omega_i} = 0;\ \dfrac{\partial\sigma^2_{i,0}}{\partial\alpha_i} = 0;\ \dfrac{\partial\sigma^2_{i,0}}{\partial\beta_i} = 0$, $t = 1,...,T$, $i = 1,...,K$.

Так как $\dfrac{\partial\Gamma^{-1}_t}{\partial\theta_s} = -\Gamma^{-1}_t\dfrac{\partial\Gamma_t}{\partial\theta_s}\Gamma^{-1}_t$, то координаты вектора-градиента $\nabla_\Theta l(\Theta)$ с входящей в него функцией l_t, записанной в виде (4), выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial\omega_i} = \sum_{t=1}^{T}\frac{(d_{it}\varepsilon_{it}-1)}{2\sigma^2_{it}}\cdot\frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\omega_i},\ 1 \leq i \leq K;$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial\alpha_i} = \sum_{t=1}^{T}\frac{(d_{it}\varepsilon_{it}-1)}{2\sigma^2_{it}}\cdot\frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\alpha_i},\ 1 \leq i \leq K;$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial\beta_i} = \sum_{t=1}^{T}\frac{(d_{it}\varepsilon_{it}-1)}{2\sigma^2_{it}}\cdot\frac{\partial\sigma^2_{it}}{\partial\beta_i},\ 1 \leq i \leq K;$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \rho_{ij}} = \sum_{t=1}^{T}\left(d_{it}\, d_{jt} - \rho_t^{ij}\right), \;\; 1 \le i < j \le K \; ;$$

$$\frac{\partial l(\Theta)}{\partial \delta_{ij}} = \sum_{t=1}^{T}\left(d_{it}\, d_{jt} - \rho_t^{ij}\right) \varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1} \;, \;\; 1 \le i < j \le K \;, \tag{12}$$

где $d_t = (d_{1t}, d_{2t}, ..., d_{Kt})^T = \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} u_t$, d_{it} – i-я компонента вектора d_t , ρ_t^{ij} – элементы обратной матрицы Γ_t^{-1} , $\varepsilon_t = D_t^{-1} u_t$, $\varepsilon_0 = 0$.

Отметим, что из независимости дисперсий σ_{1t}^2 , σ_{2t}^2 ,..., σ_{Kt}^2 в выражении (1) следует, что производные $\frac{\partial l}{\partial \omega_s}$ и $\frac{\partial l}{\partial \omega_k}$; $\frac{\partial l}{\partial \alpha_s}$ и $\frac{\partial l}{\partial \alpha_k}$; $\frac{\partial l}{\partial \beta_s}$ и $\frac{\partial l}{\partial \beta_k}$; ...; $\frac{\partial l}{\partial \omega_s}$ и $\frac{\partial l}{\partial \beta_k}$, $s \ne k$, в (12) также являются независимыми, а соответствующие им коэффициенты информационной матрицы

$$J_{ij}(\Theta) = E\left(\partial l / \partial \theta_i \cdot \partial l / \partial \theta_j\right) = \; E\left(\partial l / \partial \theta_i\right) \cdot E\left(\partial l / \partial \theta_j\right) = 0 \;,$$

так как математические ожидания информантов равны нулю. В то же время, $\partial l / \partial \rho_{ij}$ и $\partial l / \partial \delta_{ij}$ зависимы друг относительно друга и не могут быть выражены через производные от остальных параметров модели. Все это позволяет сделать вывод, что матрица $J_\Theta(\Theta)$ является блочной и состоит из подматриц A_s, $s = \overline{1,(K+1)}$, расположенных на ее главной диагонали. Подматрицы A_s определяются как математические ожидания произведений частных производных по всевозможным комбинациям параметров, входящим во множества $\{\omega_1, \alpha_1, \beta_1\}, ..., \{\omega_K, \alpha_K, \beta_K\}$, $\left\{\rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K}\right\}$:

$$A_s = E\left(\partial l / \partial \theta_i^{(s)} \cdot \partial l / \partial \theta_j^{(s)}\right), \; \theta_i^{(s)}, \theta_j^{(s)} \in \left\{\omega_s, \alpha_s, \beta_s\right\}, \;\; i, j = \overline{1,3} \;, \; s = \overline{1,K} \;;$$

$$A_{K+1} = E\left(\partial l / \partial \theta_i^{(K+1)} \cdot \partial l / \partial \theta_j^{(K+1)}\right), \quad i, j = \overline{1, K(K-1)} \;, \tag{13}$$

где $\theta_i^{(K+1)}, \theta_j^{(K+1)} \in \left\{ \rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K} \right\}$.

Матрицы $A_1, ..., A_K$ были вычислены в работе [9]:

$$a_{ij}^{(s)} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{q=1}^{K} \frac{1}{2\sigma_{qt}^4} \frac{\partial \sigma_{qt}^2}{\partial \theta_i^{(s)}} \frac{\partial \sigma_{qt}^2}{\partial \theta_j^{(s)}} \;, \tag{14}$$

где $a_{ij}^{(s)}$ – элементы A_s , $i, j = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,K}$.

Определение функционального вида зависимостей для элементов подматрицы A_{K+1} сделано впервые. Приведем здесь только конечный результат, отмечая, что при вычислении A_{K+1} были использованы формулы (12), введены вспомогательные матрицы $C_t = \left(-c_{ij}-\right) = \Gamma_t^{-1} D_t^{-1}$, $B_t = \left(-b_{ij}-\right) = H_t^{1/2}$; под знаком K-мерного интеграла, определяющего математическое ожидание, была сделана замена переменного $u = B_t y$, где y – новая некоррелированная случайная величина, и вычислены возможные моменты четвертого порядка многомерного нормального распределения. Например, были получены следующие равенства:

$$\int_{R^K} u_i^4 f(u)\,du = 3\sum_{s_1=1}^{K} b_{i,s_1}^4 + 6\sum_{s_1\neq s_2} b_{i,s_1} b_{i,s_2}\ ,\ \ i=\overline{1,K}\ ;$$

$$\int_{R^K} u_i^2 u_j u_q f(u)\,du = \sum_{s_1=1}^{K}\sum_{s_2=1}^{K} b_{i,s_1}^2 b_{j,s_2} b_{q,s_2}\ ,\ \ i,j=\overline{1,K}\ ,$$

где $f(u)=(2\pi)^{-K/2}\det^{-1/2}(H_t)\exp\left(-\frac{1}{2}u^T H_t^{-1} u\right)$, $u=(u_1,u_2,...,u_K)^T$.

Заметим также, что A_{K+1} также является блочной с подматрицами размерности $K(K-1)/2 \times K(K-1)/2$:

$$A_{K+1}=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix},$$

причем блок $M_1=\left(-m_{\lambda,\eta}^{(1)}-\right)$ построен из математических ожиданий $E\left(\partial l/\partial\theta_\lambda\cdot\partial l/\partial\theta_\eta\right)$ по параметрам $\theta_\lambda,\theta_\eta\in\left\{\rho_{12},...,\rho_{K-1,K}\right\}$, $M_2=\left(-m_{\lambda,\eta}^{(2)}-\right)$ – из $E\left(\partial l/\partial\theta_\lambda\cdot\partial l/\partial\theta_\eta\right)$ по $\theta_\lambda\in\left\{\rho_{12},...,\rho_{K-1,K}\right\}$, $\theta_\eta\in\left\{\delta_{12},...,\delta_{K-1,K}\right\}$, $M_3=\left(-m_{\lambda,\eta}^{(3)}-\right)$ – из $E\left(\partial l/\partial\theta_\lambda\cdot\partial l/\partial\theta_\eta\right)$ по $\theta_\lambda,\theta_\eta\in\left\{\delta_{12},...,\delta_{K-1,K}\right\}$. Тогда

$$m_{\lambda,\eta}^{(1)}=E\left(\partial l/\partial\rho_{ij}\cdot\partial l/\partial\rho_{ms}\right)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{p=1}^{4}F_p-\rho^{m,s}F_6-\rho^{i,j}F_7+\rho^{i,j}\rho^{m,s},$$

$$\lambda,\eta=\overline{1,K(K-1)/2}, \tag{15}$$

где

$$F_1=\sum_{s_1\neq s_2} c_{is_1}c_{js_1}c_{ms_2}c_{ss_2}\left[3\cdot\sum_{s_3} b_{s_1s_3}^2 b_{s_2s_3}^2+3\cdot\sum_{s_3\neq s_4} b_{s_1s_3}b_{s_2s_3}b_{s_1s_4}b_{s_2s_4}+\sum_{s_3\neq s_4} b_{s_1s_3}^2 b_{s_2s_4}^2\right];$$

$$F_2=3\cdot\sum_{s_1} c_{is_1}c_{js_1}c_{ms_1}c_{ss_1}\left[\sum_{s_2} b_{s_1s_2}^4+2\cdot\sum_{s_2\neq s_3} b_{s_1s_2}b_{s_1s_3}\right];$$

$$F_3=2\cdot\sum_{s_1}\sum_{s_2\neq s_3} c_{is_1}c_{js_1}c_{ms_2}c_{ss_3}\left[\sum_{s_4}\sum_{s_5} b_{s_1s_4}^2 b_{s_2s_5}b_{s_3s_5}\right];$$

$$F_4=\sum_{s_1\neq s_2}\sum_{s_3\neq s_4} c_{is_1}c_{js_2}c_{ms_3}c_{ss_4}\left[3\cdot\sum_{s_5} b_{s_1s_5}b_{s_2s_5}b_{s_3s_5}b_{s_4s_5}+F_5\right];$$

$$F_5=\sum_{s_5\neq s_6}\left(b_{s_1s_5}b_{s_2s_6}+b_{s_1s_5}b_{s_3s_6}+b_{s_1s_5}b_{s_4s_6}+b_{s_2s_5}b_{s_3s_6}+b_{s_2s_5}b_{s_4s_6}+b_{s_3s_5}b_{s_4s_6}\right);$$

$$F_6=\sum_{s_1}\sum_{s_2} c_{is_1}c_{js_1}b_{s_1s_2}^2+\sum_{s_1\neq s_2}\sum_{s_3} c_{is_1}c_{js_2}b_{s_1s_3}b_{s_2s_3}\ ;$$

$$F_7=\sum_{s_1}\sum_{s_2} c_{ms_1}c_{ss_1}b_{s_1s_2}^2+\sum_{s_1\neq s_2}\sum_{s_3} c_{ms_1}c_{ss_2}b_{s_1s_3}b_{s_2s_3}\ .$$

Аналогично,

$$m_{\lambda,\eta}^{(2)} = E\left(\partial l / \partial \rho_{ij} \cdot \partial l / \partial \delta_{ms}\right) = E\left(\partial l / \partial \rho_{ij} \cdot \partial l / \partial \rho_{ms}\right) \varepsilon_{m,t-1}\varepsilon_{s,t-1},$$

$$\lambda, \eta = \overline{1, K(K-1)/2}, \qquad (16)$$

так как значения шумов $\varepsilon_{m,t-1}$, $\varepsilon_{s,t-1}$, вычисленные в предыдущий момент времени, считаются известными. Окончательно,

$$m_{\lambda,\eta}^{(3)} = E\left(\partial l / \partial \delta_{ij} \cdot \partial l / \partial \delta_{ms}\right) = E\left(\partial l / \partial \rho_{ij} \cdot \partial l / \partial \rho_{ms}\right) \varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1}\, \varepsilon_{m,t-1}\varepsilon_{s,t-1},$$

$$\lambda, \eta = \overline{1, K(K-1)/2}\,. \ (17)$$

2. Эконометрический анализ цен акций

Информационные матрицы $J_{\Theta}(\Theta)$ с блоками (13) – (17) используем для проверки статистической гипотезы $\overline{H}_0$ о постоянстве матриц корреляций рисковых активов на российском фондовом рынке. Гипотеза выдвинута с целью уменьшения числа оцениваемых параметров в методе DCC-MGARCH(1,1) и для упрощения его расчетной структуры. Рассмотрим пять портфелей по четыре актива в каждом. Первый портфель (П1) составим из обыкновенных акций компаний ЛукОйл, Сургутнефтегаз, Ростелеком, РАО ЕЭС, зафиксируем цены закрытия за период с 02 января 2000 по 27 октября 2006 года (всего 1701 значение). Второй портфель (П2) сформируем из обыкновенных акций компаний ГМК Норильский Никель, Аэрофлот, АвтоВаз, Моэнерго, учтем цены закрытия за период с 31 октября 2001 по 23 марта 2007 года (всего 1361 значение). Третий портфель (П3) составим из обыкновенных акций компаний Балтика, Роснефть, Росбанк, Полюс Золото, при этом учтем цены закрытия за период с 23 августа 2006 по 24 марта 2007 года (всего 144 значение). Четвертый портфель (П4) составим из обыкновенных акций компаний РАО ЕЭС, Аэрофлот, Сбербанк, Транснефть, возьмем цены закрытия за период с февраля 2003 по март 2007 года (всего 1025 значений). Наконец, пятый портфель (П5) составим из обыкновенных акций компаний РИТЭК, МТС, СибирьТелеком, Татнефть, зафиксируем цены закрытия за период с февраля 2004 по март 2007 года (всего 730 значений).

Отметим, что количество акций $K = 4$ в (П1) – (П5) выбрано для простоты представления результатов, получаемых при вычислениях.

Нормированные на собственную максимальную величину цены акций портфелей (П1) – (П5) приведены на рис. 1, *а* – *е*.

Перед конструированием информационной матрицы $J_{\Theta}(\Theta)$ была проверена статистическая гипотеза об условной гетероскедастичности исходных цен активов, формирующих (П1) – (П5). Как известно [17], такое исследование осуществляется с помощью ARCH-теста (или теста Энгла), примененного для остатков временных рядов с выдвинутой нулевой гипотезой $\boldsymbol{H_0}$ об их условной гомоскедастичности. Так как одномерный GARCH(p,q)-процесс является локальным ARCH(p+q)-процессом, то критическая статистика теста подчинялась χ^2-распределению с (p+1) степенью свободы.

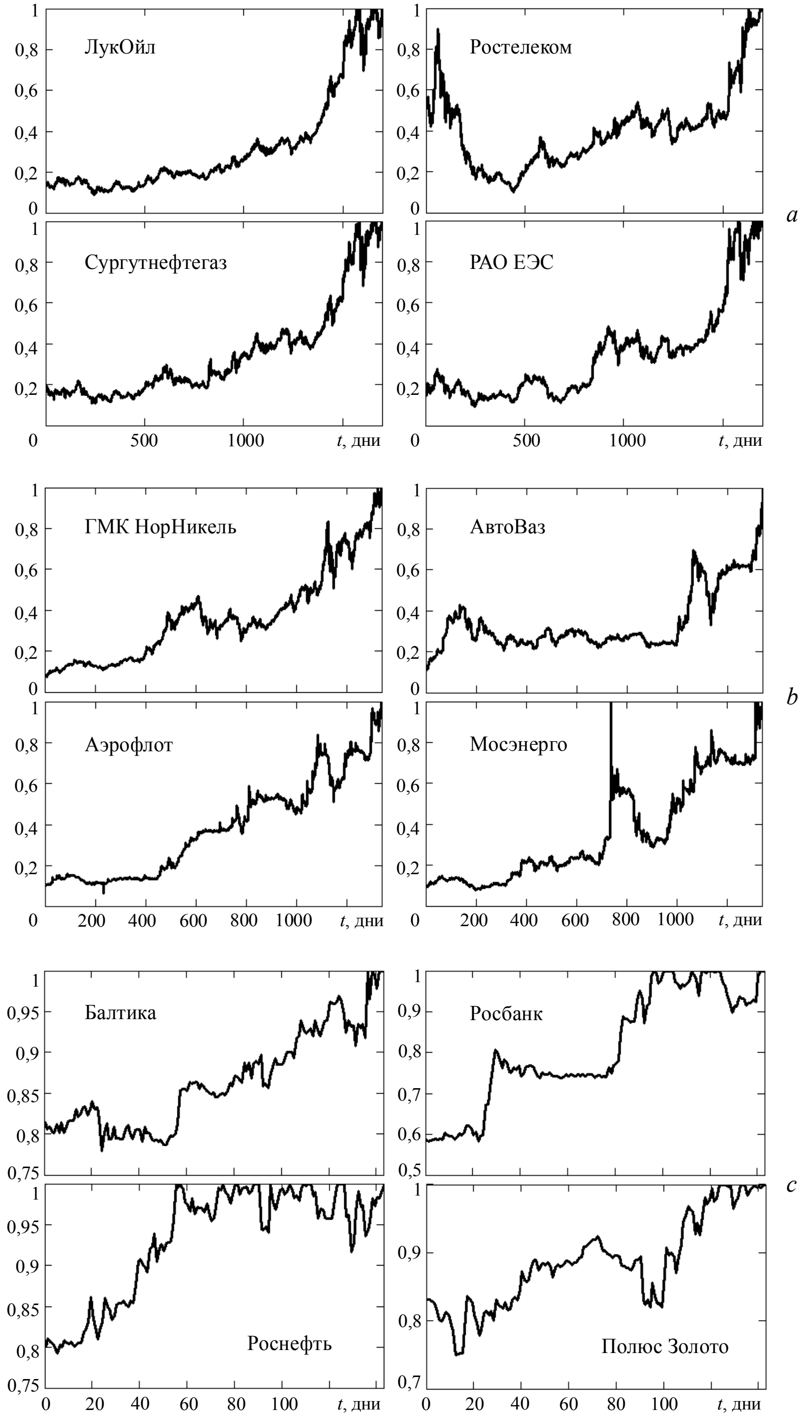

Рис. 1. Нормированные котировки активов портфелей (П1) – (П5):
a – (П1); *b* – (П2); *c* – (П3)

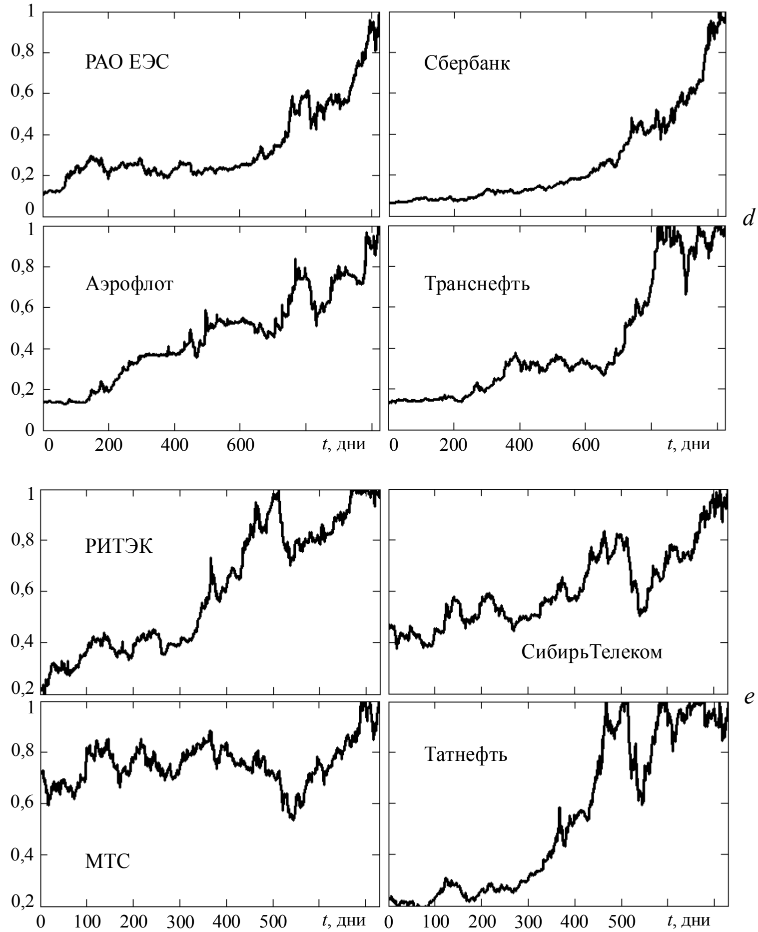

Рис. 1 (продолжение). Нормированные котировки активов портфелей (П1) – (П5): *d* – (П4); *e* – (П5)

Проведенные для (П1) – (П5) вычисления показали наличие гетероскедастичности (отсутствие гомоскедастичности) во всех временных рядах портфелей. В связи с большим объемом полученной информации представим результаты только для (П1) и сведем их в табл. 1 при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таким образом, исходное предположение об условной гетероскедастичности многомерных временных рядов в портфелях выполнено, что позволяет находить дисперсии σ_{it}^2 в соответствии с равенством (1). Так как $\sigma_{1t}^2,\dots,\sigma_{Kt}^2$ независимы друг от друга, то для их отыскания был использован классический одномерный метод GARCH(1,1) [12,18] с лагом $k = 20$. Далее, в соответствии с (8) в каждый фиксированный момент времени t, $t = 1,\dots,T$, вычислялись оценки максимального правдоподобия $\hat{\Gamma}_t$ для условных корреляционных матриц Γ_t:

$$\hat{\Gamma}_t = t^{-1}\sum_{s=1}^{t} D_s^{-1} u_s u_s^T D_s^{-1} \ ,$$

которые по построению будут симметричными и положительно определенными. Тогда $\hat{H}_t = D_t \hat{\Gamma}_t D_t$ будут положительно определенными ковариационными матрицами и для них существуют как разложения Холесского $\hat{H}_t = B_t B_t^T$, так и обратные матрицы $C_t = \hat{\Gamma}_t^{-1} D_t^{-1}$. Используя B_t, C_t в (15) – (17), волатильности σ_{it}^2 и рекуррентные соотношения (11) в выражении (14), формируя блоки (13), получаем оценки информационных матриц $J_\Theta\left(\hat{\Theta}\right)$ в каждый момент t, t=1,…,T. Далее, находим градиенты $\nabla_\Theta l\left(\hat{\Theta}\right)$ с учетом соотношений (12) и обращаем $J_\Theta\left(\hat{\Theta}\right)$, если это возможно, методом Гаусса с выбором главного элемента. Наконец, вычисляем критическую статистику (10) и сравниваем ее с $\chi^2_{0.975}(6) = 14{,}4494$, принимая или отклоняя гипотезу $\overline{H}_0$.

Таблица 1

Результаты ARCH-теста остатков временных рядов в (П1)

Лаг, p	ЛукОйл			Сургутнефтегаз		
	H_0	Критическая статистика	$\chi^2_\alpha(p+1)$	H_0	Критическая статистика	$\chi^2_\alpha(p+1)$
10	отклонена	214,4705	19,6751	отклонена	263,4729	19,6751
15	отклонена	230,1417	26,2962	отклонена	266,2571	26,2962
20	отклонена	244,1521	32,6705	отклонена	271,4537	32,6705
Лаг, p	Ростелеком			РАО ЕЭС		
	H_0	Критическая статистика	$\chi^2_\alpha(p+1)$	H_0	Критическая статистика	$\chi^2_\alpha(p+1)$
10	отклонена	103,3072	19,6751	отклонена	189,1452	19,6751
15	отклонена	107,4401	26,2962	отклонена	253,1871	26,2962
20	отклонена	108,2795	32,6705	отклонена	259,3961	32,6705

Проведенные расчеты статистик γ для акций портфелей (П1) – (П5) позволили выявить на российском рынке торговые дни трех основных типов (классов). К первому типу (T1) относятся дни, для которых выполнена гипотеза о постоянстве матрицы корреляций и применим упрощенный эконометрический метод CCC-MGARCH(1,1). Далее, ко второму типу (T2) относятся дни, для которых отклоняется $\overline{H}_0$ и соответственно обязательно используется более сложный алгоритм DCC-MGARCH(1,1). Наконец, к третьему типу (T3) относятся дни, в которых определитель $\det\left(J_\Theta\left(\hat{\Theta}\right)\right)$ равен нулю, обратная матрица $J_\Theta^{-1}\left(\hat{\Theta}\right)$ не существует, а статистика γ не определена. Моменты времени, входящие в T3, наиболее интересны для анализа, так как для них имеет место линейная зависимость строк в блочной матрице A_{K+1} и, как следствие, обнаруживается функциональная связь между корреляциями котировок различных акций в каком-либо портфеле. Значит, некоторые предприятия-эмитенты изначально более тесно связаны друг с другом (даже если они и не принадлежат одной отрасли экономики), а движение их котировок происходит из-за наступления одних и тех же фундаментальных событий, например, из-за движения капитала (притока или оттока) на финансовом рынке или благодаря поступлению новостей и т.п. Кроме того, можно говорить и об использовании инсайдерской информации, так как наблюдаются согласованные покупки и продажи всех активов портфелей (иначе говоря, существуют торговые дни, которые относятся к классу $T3$ для всех П1 – П5 одновременно).

Количество торговых дней каждого типа $T1$ – $T3$, найденное для портфелей П1 – П5, приведено в табл. 2.

Таблица 2

Распределение торговых дней различных типов по портфелям акций

Торговые дни	Тип портфеля				
	П1	П2	П3	П4	П5
$T1$	827	614	45	439	219
$T2$	813	611	67	500	454
$T3$	41	116	12	66	57

Как следует из результатов вычислений, представленных в табл. 2, гипотеза о постоянстве матрицы ковариаций в разложении $H_t = D_t \Gamma_t D_t$ отвергается. Следовательно, использование алгоритма CCC-MGARCH(1,1) на всем временном промежутке не обосновано, и для получения более точных результатов нужно применять более сложный метод DCC-MGARCH(1,1). При этом число оцениваемых параметров в DCC-MGARCH(1,1) можно существенно уменьшить, если принять допущение (6) о характере зависимости элементов матрицы Γ_t.

При вычислении критической статистики (10) для портфелей (П1) – (П5) был обнаружен любопытный эффект: торговые дни $T1$ ($T2$), в которые выполнена (отклонена) гипотеза $\bar{H}_0$, стремятся следовать друг за другом (рис. 2, для наглядности дни $T3$ исключены).

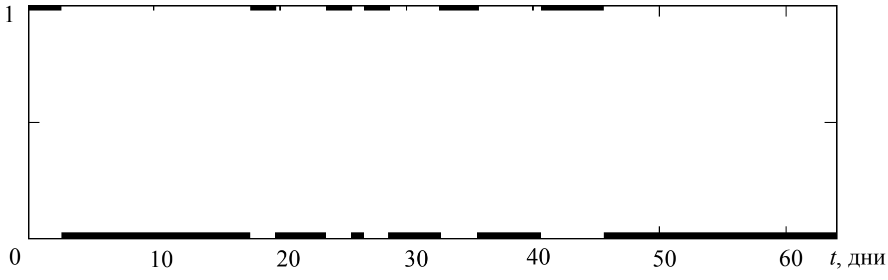

Рис. 2. Последние 64 торговых дня типов $T1$ – $T2$ для портфеля П3. Единицей обозначены элементы $T1$, нулем – $T2$.

По аналогии с хорошо изученным и описанным в литературе эффектом кластеризации волатильности [7], справедливым для одномерных временных рядов, назовем наблюдаемое поведение портфелей кластеризацией обобщенной волатильности или кластеризацией матриц ковариаций.

Далее, замечено, что изменение типизации с $T1$ до $T2$ и с $T2$ до $T1$ происходит через моменты времени $T3$. При этом для дней $T1$ характерно умеренное изменение суточной волатильности в пределах от 0 до 2 % по каждому из активов, в то время как для дней $T2$ ее поведение более стохастично: суточная одномерная волатильность превосходит 2 %.

Доказанная несостоятельность гипотезы о применении алгоритма CCC-MGARCH(1,1) на российском фондовом рынке способствовала дальнейшему эконометрическому анализу поведения портфелей (П1) – (П5) с использованием DCC-MGARCH(1,1). Так как этот анализ выходит за рамки исследований данной работы, позволим себе привести только некоторые конечные результаты: построен вероятный сценарий будущей стоимости портфелей (П1) – (П5) с использованием нормального, α-устойчивого [15] и STS-распределений [15, 18], причем для последнего из этих распределений достигнута наибольшая точность вычислений. Например, для портфеля (П1) относительная погрешность между моделируемыми и известными значениями четырех временных рядов не превосходила 4,1 %, для (П2) – 4,8 %, для (П3) – 6,7 %, для (П4) – 6,4 %.

Заключение

Найдена аналитическая форма записи информационной матрицы Фишера для алгоритма DCC-MGARCH(1,1). Она применена при исследовании фондового рынка России. Проведенные вычисления выявили на российском фондовом рынке торговые дни трех основных типов $T1$ – $T3$, причем изменение типизации с $T1$ до $T2$ и с $T2$ до $T1$ происходит через моменты времени $T3$. Кроме того, обнаружен эффект кластеризации многомерной волатильности (матриц ковариаций).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bolerslev T.*, *Engle R.*, *Wooldridge J.* A capital asset pricing model with time varying covariances // J. Political Economy. 1988. V. 96. P. 116 – 131.
2. *Bollerslev T.* Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH model // The Review of Economics and Statistics. 1990. V. 72. No. 3. P. 498 – 505.
3. *Kraft D.F.*, *Engle R.F.* Autoregressive conditional heteroskedasticity in multiple time series models // Discussion Paper 82-23, USA, University of California, San Diego, CA. 1982.
4. *Engle R.F.*, *Granger C.W.J.*, *Kraft D.F.* Combining competing forecasts of inflation using a bivariate ARCH model // J. Economic Dynamics and Control. 1984. V. 8. P. 151–165.
5. *Diebold F.X.*, *Nerlove M.* The dynamics of exchange rate volatility: a multivariate latent factor ARCH model // J. Applied Econometrics. 1989. V. 4. P. 1 – 21.
6. *Engle R.F.* Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models // J. Business and Economic Statistic. 2002. V. 20. P. 339 – 350.
7. *McNeil A.J.*, *Frey R.*, *Embrechts P.* Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
8. *Bera A.K.*, *Kim S.* Testing constancy of correlation and other specifications of the BGARCH model with an application to international equity returns // J. Empirical Finance. 2002. V. 9. P. 171 – 195.
9. *Vrontos I.D.*, *Dellaportas P.*, *Politis D.N.* A full-factor multivariate GARCH model // J. Econometrics. 2003. V. 6. P. 312 – 334.
10. *Pelagatti M.*, *Rondena S.* Dynamic Conditional Correlation with Elliptical Distributions // Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Statistica, Working Papers 20060508, 2004.
11. *Бельснер О.А.*, *Крицкий О.Л.*. Имитационное моделирование значений временных рядов методом динамических условных корреляций на основе несимметричного распределения Лапласа // Известия ТПУ. 2006. Т. 309. № 5. С. 12 – 16.
12. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307 – 327.
13. *Bollerslev T.*, *Woolridge J.M.* Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances // Econometric Reviews. 1992. V. 11. P. 143 – 172.

14. *Jeantheau T.* Strong Consistency of estimators for multivariate ARCH models // Econometric Theory. 1998. V. 14. P. 70 – 86.
15. *Rachev S.T.*, *Menn C.*, *Fabozzi F.J.* Fat-tailed and Skewed Asset Return Distribution. Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing, John Wiley & Sons, Hoboken, USA, 2005.
16. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984. 472 с.
17. *Engle R.* Autoregressive Conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica. 1982. V. 50. P. 987 – 1007.
18. *Бельснер О.А.*, *Крицкий О.Л.* Применение одномерного STS-распределения для моделирования значений фондовых индексов // Известия ТПУ. 2007. Т. 310. № 1. С. 45 – 50.

Крицкий Олег Леонидович
Томский политехнический университет
E-mail: olegkol@tpu.ru

Поступила в редакцию 28 июня 2009 г.