ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(9)

УДК 519.2

Ю.В. Малинковский, Ю.С. Боярович

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ЗАЯВОК

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с групповым поступлением и групповым обслуживанием заявок. По результатам исследования находится вид, а также необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения и предлагается эффективный алгоритм его поиска.

Ключевые слова: *марковский процесс*, *эргодичность*, *метод обращения времени*, *квазиобратимость*, *стационарное распределение*.

Исследование сетей массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок становится в настоящее время все более актуальным. В самом деле, большинство видов транспорта, занимающихся перевозкой пассажиров, обслуживают клиентов группами случайного размера. Однако при исследовании таких сетей возникает ряд значительных технических трудностей. Как правило, рассмотрение таких моделей сопряжено с достаточно громоздкими выкладками и вычислениями. Более того, во многих моделях приходится идти на некоторые уступки и делать ряд допущений и предположений, дабы упростить исследование сети. Так еще в работе [1] возникла необходимость вводить дополнительный пуассоновский поток требований в тот момент, когда обслуживающая система была пуста.

В настоящей работе предполагается, что на обслуживание равновероятно выбирается группа любого размера, не превышающего количество заявок в узле. В самом деле, на практике зачастую приходится сталкиваться с таким выбором группы на обслуживание, в особенности, когда размеры поступающих групп невелики. Подобный прием позволяет избежать ситуации, когда на обслуживание может потребоваться группа, размер которой превышает количество заявок в узле. Также в настоящей модели интенсивность обслуживания зависит от количества заявок на приборе, что, в принципе, вполне естественно и также зачастую встречается на практике. Благодаря такому описанию модели, по сравнению с [2] и [3] удалось существенно упростить ее процесс исследования как сети с групповыми переходами заявок, избежать существенных технических сложностей, а также построить эффективный алгоритм поиска стационарного распределения. Применив метод обращения времени, нами был установлен вид стационарного распределения, а также необходимые и достаточные условия его существования.

1. Модель однолинейного узла

Пусть в однолинейную систему массового обслуживания поступает пуассоновский поток групп заявок с интенсивностью λ (назовем его основным). В момент, когда система пуста, в нее поступает простейший дополнительный поток групп заявок с интенсивностью λ^*. Обслуживание групп – экспоненциальное, с интенсивностью $n\mu$, где n – количество заявок в очереди. Пусть A, A^* – функции распределения размеров поступающих основных и дополнительных групп, a и a^* – функции вероятностных масс и $\tilde{A}$, $\tilde{A}^*$ – соответствующие производящие функции. Обслуживание начинается, когда в системе есть хотя бы одна заявка. На обслуживание равновероятно выбирается группа заявок любого размера, не превышающего количества заявок на узле. Таким образом, мы исключаем возможность случая, когда на обслуживание требуется группа, размер которой превышает количество заявок в узле.

Обозначим через $X(t)$ количество заявок в системе в момент времени t. Семейство случайных величин $\{X(t)\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Рассмотрим интенсивности перехода для такой цепи:

$$q(n,n+k)=\lambda a(k)+\lambda^* a^*(k)I_{\{0\}}(n),\quad k\geq 1,\ n\geq 0;$$

$$q(n,n-k)=\frac{1}{n}n\mu=\mu,\quad 1\leq k\leq n.$$

Здесь I_A – индикаторная функция множества A.

Отметим, что описанная модель однолинейного узла является в определенном смысле аналогом модели с бесконечным числом приборов. На практике такое не встречается, однако, когда приборов достаточно много, такая модель может служить очень хорошей аппроксимацией. Причем процесс ее исследования не отличается особой сложностью.

Процесс $X(t)$ является эргодическим, поскольку если на обслуживание выбирать по одной заявке и обслуживать ее с указанной интенсивностью, то мы получим классическую модель с неограниченным числом приборов, для которой эргодичность установлена. В нашем же случае на обслуживание может выбираться группа произвольного размера.

Применим для исследования данной системы метод обращения времени. Воспользуемся теперь тем фактом, что вероятностное распределение π на Z_+ является стационарным распределением $X(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей q^R, удовлетворяющая соотношениям

$$\pi(n)q(n,n')=\pi(n')q^R(n',n),\quad n,n'\in Z_+$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}q(n,k)=\sum_{k=0}^{\infty}q^R(n,k),\quad n\in Z_+.$$

Функция q^R является функцией интенсивностей перехода обращенного по времени процесса, $X(-t)$, который также имеет стационарное распределение π.

Допустим, стационарное распределение π цепи $X(t)$ существует и является геометрическим, т.е. $\pi(n)=(1-c)c^n$ для некоторого $c\in(0;1)$. Тогда получим следующие соотношения для интенсивностей обращенного процесса:

$$q^R(n,n-k)=\lambda a(k)c^{-k}+\lambda^* a^*(k)c^{-k}I_{\{n\}}(k),\quad n\geq k\geq 1;$$

$$q^R(n,n+k)=\mu c^k,\quad k\geq 1, n\geq 1.$$

А теперь приравняем интенсивности прямого и обращенного процессов:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda a(k)c^{-k}+\lambda^* a^*(n)c^{-n}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu c^k=\lambda+\lambda^* I_{n=0}+n\mu,\quad n\geq 0.$$

Поскольку приведенное равенство должно выполняться для любого n, то положим $n = 0$. Получим

$$c = \frac{\lambda + \lambda^*}{\lambda + \lambda^* + \mu} \in (0;1)\,. \tag{1}$$

Умножим теперь полученное соотношение на $(cz)^n$ и проведем суммирование по $n \geq 1$. Получим равенство для исследования производящих функций:

$$\lambda^* \tilde{A}^*(z) = \mu \frac{cz}{(1-cz)^2} - \lambda^* \frac{cz}{1-cz} - \lambda \frac{\tilde{A}(z)}{1-cz}\,, \tag{2}$$

которое превращается в (1) при z=1. Из последнего равенства можно найти значения вероятностей для описания дополнительного потока групп заявок:

$$\lambda^* a^*(k) = k\mu c^k - \lambda^* c^k - \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s,\ \ k \geq 1\,. \tag{3}$$

Причем эта формула определяет распределение вероятностей только в том случае, если выполняется следующее неравенство:

$$k\mu c^k - \lambda^* c^k - \lambda \sum_{s=0}^{k-1} a(k-s)c^s \geq 0, \quad k \geq 1\,. \tag{4}$$

Легко видеть, что сумма всех этих вероятностей равна 1.

Приведенные рассуждения показывают, что имеет место следующая

Теорема 1. Для того чтобы $\{\pi(n) = (1-c)c^n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, необходимо и достаточно выполнения неравенств (4). Причем c находится по формуле (1), а параметры дополнительного потока могут быть найдены из (2) или (3).

Утверждение. С интенсивностями перехода, определенными выше, рассмотренный однолинейный узел является квазиобратимым.

Доказательство. Действительно, можно рассмотреть каждый переход в результате поступления группы размера m, не являющейся дополнительной как «переход поступления типа m», переход в результате обслуживания группы размера m как «переход ухода типа m». Переходы же, соответствующие поступлению дополнительных групп, будем рассматривать как внутренние.

Полная интенсивность «переходов поступления типа m», когда система находится в состоянии n:

$$\alpha(m;n) = \sum_{n'\in X} \alpha(m;n,n') = \sum_{n'\in X} q(n,n')I\{(n,n')\,,$$

является переходом поступления типа $m\}=\lambda a(m)$;

полная интенсивность «переходов ухода типа m», когда система находится в состоянии n:

$$\tilde{\alpha}(m;n) = \sum_{n'\in X} \beta(m;n,n') = \sum_{n'\in X} q(n,n')I\{(n,n')\,,$$

является переходом ухода типа $m\}=\mu c^m$.

Полученные суммарные интенсивности не зависят от состояния. Таким образом, стационарный процесс $X(t)$ является квазиобратимым.

Утверждение доказано.

2. Модель сети

В открытую сеть массового обслуживания с множеством узлов $J=\{1,\ldots,N\}$ поступают независимые пуассоновские потоки групп основных и дополнительных (поступающих, когда система пуста) заявок с параметрами λ_i и λ_i^* соответственно для узла $i\in J$. Обслуживание групп в узлах экспоненциальное, с параметром μ_i для узла $i\in J$. Размеры поступающих групп – независимые положительные целочисленные случайные величины с функциями распределения A_i и A_i^*, функциями вероятностных масс a_i, a_i^*, а также производящими функциями $\tilde{A}_i$, $\tilde{A}_i^*$ соответственно для узла $i\in J$. Обслуженная в узле $i\in J$ группа переходит в узел j с вероятностью $p_{i,j}$, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть. Состояние сети описывается цепью Маркова $X(t)=\{X_1(t),\ldots,X_N(t)\}$, где $X_i(t)$ – число заявок в узле $i\in J$ в момент t.

Для простоты предполагаем, что $p_{i,i}=0$ для всех $i\in J$ и что матрица маршрутизации неприводима.

Введем в рассмотрение общие интенсивности поступления основных групп заявок размера m в узел j. Обозначим ее через $\gamma_j(m)$:

$$\gamma_j(m)=\lambda_j a_j(m)+\sum_{i\in J}\sum_{k=m}^{\infty}\mu_i(1-c_i)c_i^k p_{i,j}=\lambda_j a_j(m)+\sum_{i\in J}c_i^m\mu_i p_{i,j},\ j\in J,\ m\geq 1, \quad (5)$$

а также рассмотрим производящие функции $\tilde{\Gamma}_i(z_i)=\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_i(m)z_i^m$. При этом $\tilde{\Gamma}_i(1)=\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_i(m)$ являются интенсивностями потока основных групп заявок на узел i соответственно.

Рассмотрим интенсивности перехода для рассмотренной сети:

$$q(n,n+ke_i)=\lambda_i a_i(k)+\lambda_i^* a_i^*(k)I_{\{0\}}(n_i),\ k\geq 1, n_i\geq 0,$$

$$q(n,n-ke_i+ke_j)=\mu_i p_{i,j},\ 1\leq k\leq n_i,$$

$$q(n,n-ke_i)=\mu_i p_{i,0},\ 1\leq k\leq n_i.$$

Здесь $i\in J$ и e_i – единичный вектор, i-я координата которого равна 1. Пусть $J_0=\{i\in J:\ n_i=0\}$ и $J_+=J\setminus J_0$. Определим теперь полную функцию интенсивности выхода α посредством $\alpha(n)=\sum_{n'\in Z_+^N}q(n,n')$. Тогда получаем

$$\alpha(n)=\sum_{j\in J_+(n)}n_j\mu_j+\sum_{j\in J}\lambda_j+\sum_{j\in J_0(n)}\lambda_j^*. \quad (6)$$

Вероятностное распределение π на Z_+^N является стационарным распределением $X(t)$ тогда и только тогда, когда существует функция интенсивностей перехода q^R, удовлетворяющая соотношениям

$$\pi(n)q(n,n')=\pi(n')q^R(n',n),\ n,n'\in Z_+^N,\ n\neq n' \quad (7)$$

и

$$\alpha(n)=\alpha^R(n),\ n\in Z_+^N,$$

где $\alpha^R(n)=\sum_{n'\in Z_+^N}q^R(n,n')$.

Предположим теперь, что π имеет геометрическую форму произведения:

$$\pi(n)=\prod_{i=1}^{N}(1-c_i)c_i^{n_i},\quad n\in Z_+^N,$$

где $0 < c_i < 1$, $i \in J$. Подставляя это в (7), получим интенсивности для обращенного во времени процесса:

$$q^R(n,\, n+ke_i)=c_i^k\mu_i\, p_{i,0}\,,\ k\geq 1;$$

$$q^R(n,\, n+ke_i-ke_j)=c_i^k\, c_j^{-k}\ \mu_i\, p_{i,j},\ \ n_j\geq k\geq 1;$$

$$q^R(n,\, n-ke_i)=c_i^{-k}\,(\lambda_i a_i(k)+\lambda_i{}^* a_i{}^*(k)\, I_{\{n_i\}}(k)\,),\ n_i\geq k\geq 1.$$

Здесь $i, j \in J$.

При нашем предположении о π стационарным распределением системы является такое, как если бы каждый узел функционировал независимо от других узлов.

Вычислим теперь $\alpha^R(n)$:

$$\alpha^R(n)=\sum_{i\in J}\sum_{k=1}^{\infty}c_i^k\mu_i p_{i,0}+\sum_{i\in J}\ \sum_{j\in J_+(n)}c_i^k c_j^{-k}\mu_i p_{i,j}+$$

$$+\sum_{j\in J_+(n)}(\lambda_j\sum_{k=1}^{n_j}a_j(k)c_j^{-k}+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}).\tag{8}$$

Теперь, используя определение $\gamma_j(m)$ и тождество $p_{i,0}=1-\sum_{j\in J}p_{i,j}$, преобразуем (8) следующим образом:

$$\alpha^{\mathrm{R}}(\mathrm{n})=\sum_{i\in J}\sum_{k=1}^{\infty}c_i^k\mu_i(1-\sum_{j\in J}p_{i,j})+\sum_{j\in J_+(n)}\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}(\,\gamma_j(k)-\lambda_j a_j(k)\,)+$$

$$+\sum_{j\in J_+(n)}(\lambda_j\sum_{k=1}^{n_j}a_j(k)c_j^{-k}+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j})=$$

$$=\sum_{j\in J}(\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j)+\sum_{j\in J_+(n)}\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_j(k)+\sum_{j\in J_+(n)}\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}=$$

$$=\sum_{j\in J_+(n)}\left(\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j+\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_j(k)+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}\right)+$$

$$+\sum_{j\in J_0}\left(\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j\right).$$

Используя (6), составим следующую разность:

$$\alpha^R(n)-\alpha(n)=\sum_{j\in J_+(n)}\left(\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-n_j\mu_j-\tilde{\Gamma}_j(1)+\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_{\mathrm{j}}(k)+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}\right)+$$

$$+\sum_{j\in J_0}\left(\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)-\lambda_j{}^*\right).\tag{9}$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$f_j(n_j,c_j)=\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-n_j\mu_j-\tilde{\Gamma}_j(1)+\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_j(k)+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j},\ n_j\geq 1,\ j\in J;$$

$$g_j(c_j)=\mu_j\frac{c_j}{1-c_j}-\tilde{\Gamma}_j(1)-\lambda_j{}^*,\ \ j\in J.$$

Отметим, что

$$f_j(n_j,c_j)-g_j(c_j)=\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_\mathrm{j}(\mathrm{k})+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}+\lambda_j{}^*-n_j\mu_j,\ j\in J. \qquad (10)$$

Тогда равенство (9) запишется следующим образом:

$$\alpha^R(n)-\alpha(n)=\sum_{j\in J_+(n)}f_j(n_j,c_j)+\sum_{j\in J_0}g_j(c_j).$$

Очевидно, что $\alpha^R(n)=\alpha(n)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j\in J_+(n)}f_j(n_j,c_j)+\sum_{j\in J_0}g_j(c_j)=0. \qquad (11)$$

Докажем, что для того, чтобы для всех $n\in Z_+^N$ выполнялось $\alpha^\mathrm{R}(n)=\alpha(n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_j(n_j,c_j)=0\ \text{ для всех } j\in J,\ n_j\geq 1$$

и

$$g_j(c_j)=0 \text{ для всех } j\in J.$$

Доказательство достаточности очевидно. Для доказательства необходимости положим в (11) $n=n_je_j$. Тогда для любого $n_j\geq 1$

$$f_j(n_j,c_j)+\sum_{i\in J\setminus\{j\}}g_i(c_i)=0. \qquad (12)$$

Положим теперь в (11) $n=0$, тогда получаем

$$\sum_{j\in J}g_j(c_j)=0. \qquad (13)$$

Теперь из равенств (12) и (13) следует, что

$$f_j(n_j,c_j)-g_j(c_j)=0 \text{ для всех } j\in J,\ n_j\geq 1. \qquad (14)$$

Подставляя (10) в (14), получим для любого $j\in J$

$$\sum_{k=1}^{n_j}c_j^{-k}\ \gamma_j(k)+\lambda_j{}^*a_j{}^*(n_j)c_j^{-n_j}+\lambda_j{}^*-n_j\mu_j=0. \qquad (15)$$

Умножим теперь (15) на $c_j^{n_j}$ и суммируем по $n_j\geq 1$, получим

$$\frac{\tilde{\Gamma}_j(1)}{1-c_j}+\lambda_j{}^*+\lambda_j{}^*\frac{c_j}{1-c_j}-\mu_j\frac{c_j}{(1-c_j)^2}=0$$

или

$$c_j=\frac{\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j{}^*}{\tilde{\Gamma}_j(1)+\lambda_j{}^*+\mu_j},\ j\in J.$$

Из определения функции g_j это означает, что $g_j(c_j) = 0$ для любого $j \in J$. Тогда в силу (14) будет выполняться также, что $f_j(n_j, c_j) = 0$ для всех $j \in J$, $n_j \geq 1$. Необходимость доказана.

Умножим теперь (15) на $(c_j z_j)^{n_j}$ и сложим по всем $n_j \geq 1$. Получим соотношения, характеризующие дополнительный поток:

$$\lambda_j * \tilde{A}(z_j) = \mu_j \frac{c_j z_j}{(1 - c_j z_j)^2} - \tilde{\Gamma}_j(1) \frac{\tilde{\Gamma}_j(z_j)}{1 - c_j z_j} - \lambda_j * \frac{c_j z_j}{1 - c_j z_j}, j \in J.$$

Таким образом, получаем следующие результаты:

Теорема 2. Для того чтобы $\{ \pi(n) = \prod_{j \in J} (1 - c_j) c_j^n,\ n \in Z_+^N \}$ являлось стационарным распределением $X(t)$, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$k\mu_j c_j^k - \lambda_j * c_j^k - \tilde{\Gamma}_j(1) \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_j(k-s) c_j^s \geq 0,\ k \geq 1, j \in J, \tag{16}$$

где

$$c_j = \frac{\gamma_j + \lambda_j *}{\gamma_j + \lambda_j * + \mu_j},\ j \in J, \tag{17}$$

а γ_j – решение системы линейных уравнений трафика:

$$\gamma_j = \lambda_j + \sum_{i \in J} \gamma_i p_{i,j},\ j \in J, \tag{18}$$

которая имеет единственное нетривиальное решение. Причем параметры дополнительного потока могут быть найдены из одного из следующих соотношений:

$$\lambda_j * \tilde{A}_j * (z_j) = \mu_j \frac{c_j z_j}{(1 - c_j z_j)^2} - \lambda_j * \frac{c_j z_j}{1 - c_j z_j} - \tilde{\Gamma}_j(1) \frac{\tilde{\Gamma}_j(z_j)}{1 - c_j z_j}, j \in J \tag{19}$$

или

$$\lambda_j * a_j * (k) = k\mu_j c_j^k - \lambda_j * c_j^k - \tilde{\Gamma}_j(1) \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_j(k-s) c_j^s, k \geq 1, j \in J. \tag{20}$$

Так как в условиях теоремы 2 сеть квазиобратима по отношению к соответствующему набору интенсивностей, то справедливо

Следствие. При выполнении условий теоремы 2 выходящие из сети потоки групп являются независимыми пуассоновскими потоками, а текущее состояние сети не зависит от предыстории этих потоков.

3. Алгоритм поиска стационарного распределения

Таким образом, нами установлены следующие этапы поиска стационарного распределения.

1. Находим корни $\gamma_j, j \in J$, системы уравнений трафика (18).

2. Проверяем выполнение условий (16). Если они нарушены, то делаем вывод о том, что не существует стационарного распределения в геометрической форме произведения. Если же условия выполнены, то переходим к следующему пункту алгоритма.

3. Находим $c_j, j \in J$, по формулам (17).

4. Подсчитываем $\gamma_j(m)$, $j \in J$, используя формулы (5).

5. Находим значения вероятностей, характеризующих процесс поступления дополнительных групп заявок: $a_j{}^*(k)$, $j \in J$, $k \geq 1$, по формулам (19) или (20).

6. Записываем искомое решение для стационарного распределения

$$\{\,\pi(n) = \prod_{j \in J} (1 - c_j) c_j^n,\ n \in \ Z_+^N\}.$$

Заключение

В настоящей работе исследована работа открытой сети массового обслуживания с групповыми перемещениями заявок. Интенсивность обслуживания зависела от количества заявок в узле. Благодаря описанию модели сети удалось избежать ситуации, когда на обслуживание выбирается группа, размер которой превышает количество заявок в узле. Приводится алгоритм для поиска стационарного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miyazawa M.*, *Taylor P.G.* A geometric product-form distribution for a queueing network with non-standard batch arrivals and batch transfers // Adv. Appl. Prob. 1997. V. 29. No. 2. P. 523 – 534.
2. *Malinkovsky Y., Bojarovich J.* Geometric product form stationary distribution for queueing networks with batch movements of positive and negative customers // Queues: flows, systems, networks: proceedings of the Int. Conf. «Mathematical Methods for Increasing Efficiency of Information Telecommunication Networks». Grodno, 2007. No. 19. P. 128 – 133.
3. *Малинковский Ю.В.*, *Боярович Ю.С.* Характеризация стационарного распределения сетей с групповыми перемещениями положительных и отрицательных заявок в форме произведения геометрических распределений // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. 2007. № 3(57). С. 39 – 43.

Малинковский Юрий Владимирович
Боярович Юлия Сигизмундовна
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (Беларусь)
E-mail: Malinkovsky@gsu.by; juls1982@list.ru Поступила в редакцию 30 апреля 2009 г.