

УДК 519.872

Е.В. Колузаева, М.А. Матальцкий**ИССЛЕДОВАНИЕ НМ-СЕТЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДОХОДАМИ
ОТ ПЕРЕХОДОВ МЕЖДУ ИХ СОСТОЯНИЯМИ**

Предлагается методика нахождения ожидаемых доходов в системах НМ-сети произвольной топологии, когда доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами с заданными средними значениями. Для ожидаемых доходов получены линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых могут быть найдены с помощью системы компьютерной математики Maple 8.

Ключевые слова: марковская НМ-сеть, случайные доходы.

Марковские сети массового обслуживания (МО) с доходами впервые были введены в рассмотрение в работах [1 – 3]. Они описываются с помощью цепей Маркова с непрерывным временем и доходами, введенными Р. Ховардом [4] и поэтому в последнее время называются НМ-сетями [5, 6] подобно тому, как марковские сети с отрицательными и положительными заявками, впервые введенные Е. Gelenbe, названы G-сетями. Ранее было проведено исследование замкнутых сетей с большим числом состояний и открытых сетей со счетным числом состояний; при этом были рассмотрены случаи, когда: а) доходы от переходов между состояниями сети зависят от состояний и от времени либо б) являются случайными величинами (СВ) с известными конечными моментами первых двух порядков.

Для ожидаемых доходов систем сети в случае а) можно получить системы разностно-дифференциальных уравнений, которые сводятся к системам линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), для решения которых были предложены различные методы – метод многомерных z -преобразований, а также известные методы: метод преобразований Лапласа, матричный метод, численные методы.

В [5, 7] были получены приближенные соотношения для ожидаемых доходов и дисперсий доходов в системах экспоненциальных НМ-сетей в случае б). Методика получения этих соотношений основана на разбиении интервала функционирования сети на большое число m малых интервалов величиной Δt , оценке доходов на каждом интервале и суммировании этих доходов путем предельного перехода при $m \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. При этом среднее число заявок в системах сети в нестационарном режиме находилось с помощью разработанного рекуррентного по моментам времени метода. В данной работе предлагается метод нахождения ожидаемых доходов систем сети в случае б), основанный на решении полученных для них и для среднего числа заявок линейных неоднородных ОДУ.

1. Нахождение ожидаемых доходов в системах

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с однотипными заявками произвольной топологии, состоящую из n систем массового обслуживания (СМО) $S_1, S_2, \dots, S_n$ с m_i линиями обслуживания в системе S_i , $i = \overline{1, n}$. Обозначим через

$k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$ – вектор состояний сети, где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i (в очереди и на обслуживании) в момент времени t . В сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Условная интенсивность обслуживания заявок в момент времени t $\mu_i(k_i(t))$ в системе S_i зависит от числа заявок в этой системе, $i = \overline{1, n}$. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый случайный доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту случайную величину.

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы S_i сети. Обозначим через $V_i(t)$ ее доход в момент времени t . Пусть в начальный момент времени доход системы равен $V_i(0) = v_{i0}$. Доход этой СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (1)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода системы S_i на интервале времени $[t, t + \Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt , и изменения доходов системы S_i , связанные с этими событиями.

1. С вероятностью $\lambda p_{0i} \Delta t + o(\Delta t)$ в систему S_i из внешней среды поступит заявка, которая принесет ей доход в размере r_{0i} , где r_{0i} – СВ с математическим ожиданием (МО) $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$, p_{0i} – вероятность поступления заявки из внешней среды в систему S_i , $i = \overline{1, n}$.

2. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$ заявка из системы S_i перейдет во внешнюю среду, при этом доход системы S_i уменьшится на величину R_{i0} , где R_{i0} – СВ с МО $M\{R_{i0}\} = b_{i0}$, p_{i0} – вероятность ухода заявки из системы S_i во внешнюю среду, $i = \overline{1, n}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ – функция Хевисайда.

3. С вероятностью $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji} \Delta t + o(\Delta t)$ заявка перейдет из системы S_j в систему S_i , при этом доход системы S_i возрастет на величину r_{ji} , а доход системы S_j уменьшится на эту величину, где r_{ji} – СВ с МО $M\{r_{ji}\} = a_{ji}$, p_{ji} – вероятность перехода заявки из системы S_j в систему S_i , $j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

4. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ заявка из системы S_i перейдет в систему S_j , при этом доход СМО S_i уменьшится на величину R_{ij} , а доход системы S_j возрастет на эту величину, где R_{ij} – СВ с МО $M\{R_{ij}\} = b_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

5. С вероятностью $1 - \left(\lambda p_{0i} + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji} \right) \Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t, t + \Delta t)$ изменение состояния системы S_i не произойдет, $i = \overline{1, n}$.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt система S_i увеличивает свой доход на величину $r_i \Delta t$, где r_i – СВ с МО $M\{r_i\} = c_i$, $i = \overline{1, n}$. Будем также считать, что СВ r_{ji} , R_{ij} , r_{0i} , R_{i0} являются независимыми по отношению к СВ r_i , $i, j = \overline{1, n}$.

Очевидно, что $r_{ji} = R_{ji}$ с вероятностью 1, т.е.

$$a_{ji} = b_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Тогда из вышеуказанного следует

$$\Delta V_i(t, \Delta t) = \begin{cases} r_{0i} + r_i \Delta t & \text{с вероятностью} \quad \lambda p_{0i} \Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{i0} + r_i \Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0} \Delta t + o(\Delta t), \\ r_{ji} + r_i \Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji} \Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{ij} + r_i \Delta t & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \\ r_i \Delta t & \text{с вероятностью} \quad 1 - \left(\lambda p_{0i} + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji} \right) \Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \quad (3)$$

При фиксированной реализации процесса $k(t)$, учитывая (3), можно записать

$$M\{\Delta V_i(t, \Delta t) / k(t)\} = \left[\lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji} a_{ji} \right] \Delta t + o(\Delta t).$$

Усредняя по $k(t)$ с учетом условия нормировки $\sum_k P(k(t) = k) = 1$, для изменения ожидаемого дохода системы S_i получаем

$$\begin{aligned} M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\} &= \sum_k P(k(t) = k) M\{\Delta V_i(t, \Delta t) / k(t)\} = \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))) M\{\Delta V_i(t, \Delta t) / k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))\} = \\ &= \left[\lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) \sum_k P(k(t) = k) \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ji} a_{ji} \sum_k P(k(t) = k) \mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) \right] \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Пусть система S_i содержит m_i идентичных линий обслуживания, в каждой из которых время обслуживания заявок распределено по показательному закону с параметром μ_i , $i = \overline{1, n}$. В этом случае

$$\mu_i(k_i(t)) = \begin{cases} \mu_i k_i(t), & k_i(t) \leq m_i, \\ \mu_i m_i, & k_i(t) > m_i, \end{cases} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) = \mu_i \min(k_i(t), m_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

В качестве аппроксимации среднего значения выражения $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))$ возьмем $\mu_i \min(N_i(t), m_i)$, т.е. воспользуемся приближенным равенством

$$M \min(k_i(t), m_i) \approx \min(N_i(t), m_i), \quad (4)$$

где $N_i(t)$ – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в системе S_i в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. С учетом этого равенства получаем следующее приближенное соотношение:

$$M \{ \Delta V_i(t, \Delta t) \} = \left[\lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i \min(N_i(t), m_i) \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji} a_{ji} \right] \Delta t + o(\Delta t). \quad (5)$$

Поскольку в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ , т.е. вероятность поступления l заявок в систему S_i за время Δt имеет вид

$$P_l(\Delta t) = \frac{(\lambda p_{0i} \Delta t)^l}{l!} e^{-\lambda p_{0i} \Delta t}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \text{ то среднее число заявок, поступивших извне в систему } S_i \text{ за время } \Delta t, \text{ равно } \lambda p_{0i} \Delta t.$$

Обозначим через $\rho_i(t)$ – среднее число занятых линий обслуживания в системе S_i в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. Тогда $\mu_i \rho_i(t) \Delta t$ – среднее число заявок, покинувших систему S_i за время Δt , а $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \rho_j(t) p_{ji} \Delta t$ – среднее число заявок, поступивших в S_i из других СМО за время Δt . Поэтому

$$N_i(t + \Delta t) - N_i(t) = \lambda p_{0i} \Delta t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \rho_j(t) p_{ji} \Delta t - \mu_i \rho_i(t) \Delta t, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ вытекает система ОДУ для $N_i(t)$:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \rho_j(t) p_{ji} - \mu_i \rho_i(t) + \lambda p_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Величину $\rho_i(t)$ найти точно невозможно и поэтому, как мы делали раньше, аппроксимируем ее выражением

$$\rho_i(t) = \begin{cases} N_i(t), & N_i(t) \leq m_i, \\ m_i, & N_i(t) > m_i, \end{cases} = \min(N_i(t), m_i).$$

Тогда система уравнений (6) примет вид

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji} \min(N_j(t), m_j) - \mu_i \min(N_i(t), m_i) + \lambda p_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Это система линейных ОДУ с разрывными правыми частями. Решать ее нужно путем разбиения фазового пространства на ряд областей и нахождения решения в каждой из них. Систему (7) можно решить, например, используя средства системы компьютерной математики Maple 8.

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$. Из (1), (5) получаем

$$\begin{aligned} v_i(t + \Delta t) &= v_i(t) + M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\} = \\ &= v_i(t) + \left[\lambda p_{0i} a_{0i} + c_i - \mu_i \min(N_i(t), m_i) \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji} a_{ji} \right] \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Далее, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим неоднородные линейные ОДУ первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(t)}{dt} &= -\mu_i \min(N_i(t), m_i) \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{j=1}^n p_{ij} b_{ij} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji} a_{ji} + \lambda p_{0i} a_{0i} + c_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Задав начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1, n}$, можно найти ожидаемые доходы систем сети.

Если сеть функционирует так, что $\min(N_i(t), m_i) = N_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, (например, это равенство выполняется для СМО с бесконечным числом линий обслуживания или когда m_i больше или равно числу заявок в замкнутой сети), то системы (7), (8) будут иметь вид

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji} N_j(t) - \mu_i N_i(t) + \lambda p_{0i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_i(t)}{dt} = -\mu_i \left(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_{ij} b_{ij} \right) N_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j p_{ji} a_{ji} N_j(t) + \lambda p_{0i} a_{0i} + c_i, \\ v_i(0) = v_{i0}, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (10)$$

Систему (9) можно переписать в матричной форме:

$$\frac{dN(t)}{dt} = QN(t) + f, \quad (11)$$

где $N^T(t) = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t))$, Q – квадратная матрица, состоящая из элемен-

тов $q_{ij} = \mu_j p_{ji}$, если положить $p_{ii} = -1$, $i, j = \overline{1, n}$, f – вектор-столбец, элементами которого являются значения λp_{0i} , $i = \overline{1, n}$. Решение системы (11) имеет вид

$$N(t) = N(0)e^{Qt} + f \int_0^t e^{Q(t-\tau)} d\tau,$$

где $N(0)$ – некоторые заданные начальные условия, однако нахождение элементов матрицы e^{Qt} является сложной задачей даже для относительно небольших значений n .

Рассмотрим замкнутую сеть с центральной СМО, состоящую из n систем (рис. 1). Пусть в периферийных СМО сети число линий обслуживания бесконечно, в этом случае $\min(N_i(t), m_i) = N_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, а центральная СМО функционирует в условиях высокой нагрузки, т.е. $\min(N_n(t), m_n) = m_n$. Система (7) в этом случае переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dN_i(t)}{dt} = -\mu_i N_i(t) + \mu_n m_n p_{ni}, & i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dN_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i N_i(t) - \mu_n m_n. \end{cases} \quad (12)$$

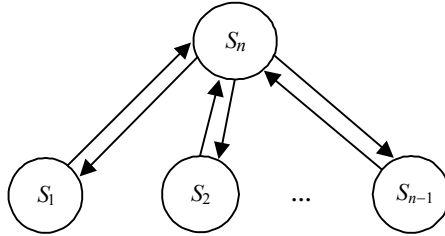


Рис. 1. Структура сети с центральной СМО

Общее решение системы (12) при начальных условиях $N_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, равно

$$N_i(t) = \alpha_i e^{-\mu_i t} + \frac{m_n \mu_n p_{ni}}{\mu_i}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$N_n(t) = K - \sum_{i=1}^{n-1} N_i(t),$$

где $K = \sum_{i=1}^n N_i(t)$ – число заявок в сети, $\alpha_i = N_i(0) - \frac{m_n \mu_n p_{ni}}{\mu_i}$, $i = \overline{1, n-1}$. Для таких $N_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, система (10) для ожидаемых доходов систем сети принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(t)}{dt} = & \mu_i b_{in} \left[\alpha_i e^{-\mu_i t} - \frac{m_n \mu_n p_{ni}}{\mu_i} \right] + \\ & + \mu_n p_{ni} a_{ni} \left[K - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\alpha_j e^{-\mu_j t} + \frac{m_n \mu_n p_{nj}}{\mu_j} \right) \right] + c_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_n(t)}{dt} = & \mu_n \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} b_{nj} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_i e^{-\mu_i t} + \frac{m_n \mu_n p_{ni}}{\mu_i} \right) - K \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j a_{jn} \left(\alpha_j e^{-\mu_j t} + \frac{m_n \mu_n p_{nj}}{\mu_j} \right) + c_n. \end{aligned}$$

Интегрируя данные ОДУ при начальных условиях $v_i(0) = v_{i0}, i = \overline{1, n}$, получим

$$\begin{aligned} v_i(t) = & \mu_n p_{ni} a_{ni} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\mu_j} e^{-\mu_j t} + \alpha_i b_{in} e^{-\mu_i t} + \\ & + \left[\mu_n p_{ni} \left(K a_{ni} - \mu_n m_n a_{ni} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{nj}}{\mu_j} - m_n b_{in} \right) + c_i \right] t + \\ & - \mu_n p_{ni} a_{ni} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\mu_j} - \alpha_i b_{in} + v_{i0}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ v_n(t) = & -\mu_n \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} b_{nj} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\mu_i} e^{-\mu_i t} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_{jn} e^{-\mu_j t} + \\ & + \left[\mu_n \left(m_n \mu_n \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} b_{nj} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_{ni}}{\mu_i} - K \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} b_{nj} + m_n \sum_{j=1}^{n-1} p_{nj} a_{jn} \right) + c_n \right] t + \\ & + \mu_n \sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} b_{ni} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\mu_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i a_{jn} + v_{n0}. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Пример

Рассмотрим сеть, описанную в предыдущем пункте при $n = 20$, $K = 110$, где K – число заявок в сети. Число линий обслуживания в центральной СМО – $m_{20} = 10$. Интенсивности обслуживания заявок в линиях систем сети равны $\mu_1 = \mu_{13} = \mu_{19} = 4$, $\mu_6 = 6$, $\mu_3 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{16} = 5$, $\mu_2 = \mu_5 = \mu_7 = \mu_{11} = \mu_{15} = \mu_{17} = \mu_{18} = 3$, $\mu_4 = \mu_8 = \mu_{12} = \mu_{14} = 2$, $\mu_{20} = 3$, а вероятности переходов заявок между СМО сети – $p_{20i} = 1/19$, $p_{i20} = 1$, $i = \overline{1, 19}$, определим также $p_{ii} = -1$, $i = \overline{1, 20}$, остальные $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1, 20}$. Пусть также $N_i(0) = 5$, $i = \overline{1, 19}$, $N_{20}(0) = 15$.

Зададим значения МО доходов от переходов между состояниями сети:

$$c_i = 100 \sin \frac{\pi}{4(i+1)}, \quad i = \overline{1, 20},$$

$$a_{20i} = 0,5, \quad i = \overline{1, 8}, \quad a_{20i} = 1, \quad i = \overline{9, 18}, \quad a_{2019} = 1,5,$$

$$a_{i20} = (14, 3, 27, 15, 18, 20, 7, 6, 29, 14, 8, 15, 11, 9, 22, 17, 14, 13, 14), \quad i = \overline{1, 19}.$$

Тогда, используя соотношения (13), (14) при начальных условиях $v_i(0) = 50$, $i = \overline{1, 19}$, $v_{20}(0) = 1000$, были получены выражения для ожидаемых доходов систем сети. Например, выражение для ожидаемого дохода центральной системы имеет вид

$$v_{20}(t) = -95,1e^{-4t} - 124,8e^{-3t} - 315,8e^{-5t} + 16,6e^{-2t} - 75,4e^{-6t} - 2018,8t + 2908,7.$$

Графики ожидаемых доходов систем сети приведены на рис. 2 – 4.

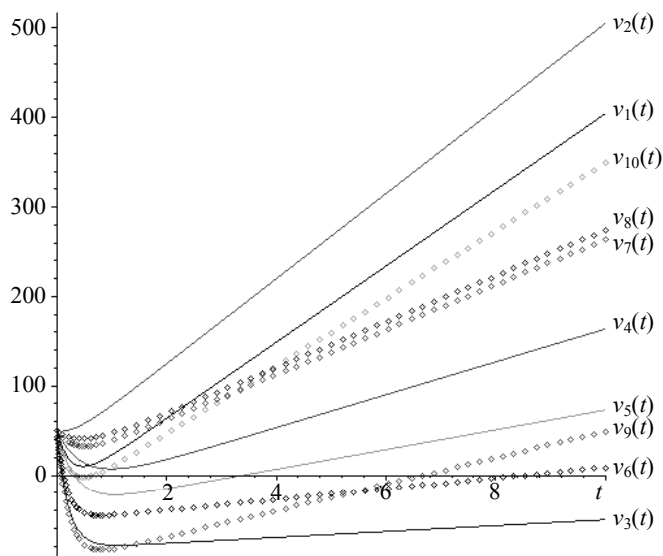


Рис. 2. Ожидаемые доходы систем S_i , $i = \overline{1, 10}$, сети

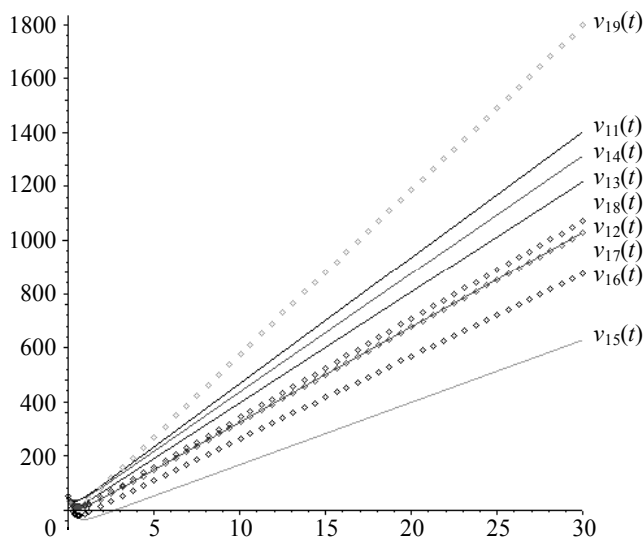


Рис. 3. Ожидаемые доходы систем S_i , $i = \overline{11, 19}$, сети

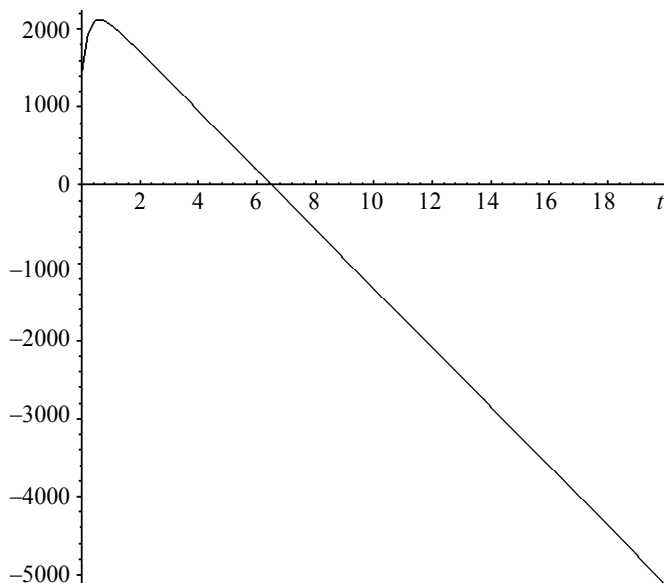


Рис. 4. Ожидаемый доход центральной СМО

Заключение

В работе предложена методика нахождения ожидаемых доходов в системах НМ-сетей в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются СВ с известными математическими ожиданиями.

В настоящее время дальнейшие исследования по НМ-сетям проводятся по следующим направлениям:

- исследование марковских НМ-сетей с различными особенностями;
- исследование условий, при которых справедлива формула (4);
- исследование произвольных (немарковских) НМ-сетей;
- решение задач оптимизации и управления для НМ-сетей с использованием рекуррентного по моментам времени метода анализа средних значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Matalytski M.A., Pankov A.V.* Application of operation calculus for the investigation of banking models // Proc. of 17 Int. Conf. "Modern Mathematical Methods of Analysis and Optimization of Telecommunication Networks"/ BSU. Minsk, 2003. P. 172 – 177.
2. *Matalytski M., Pankov A.* Incomes probabilistic model of the banking network // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science of Czestochowa University of Technology. 2003. V. 1. No. 2. P. 99 – 104.
3. *Матальцкий М.А., Паньков А.В.* Вероятностный анализ доходов в банковских сетях // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика. 2004. № 2. С. 86 – 91.
4. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964. 189 с.
5. *Matalytski M., Koluzaeva E.* Analysis and optimization of Markov HM-networks with stochastic incomes from transition between their states // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science of Czestochowa University of Technology. 2008. V. 1. No. 7. P. 51 – 62.

6. Матальцкий М.А., Колузаева Е.В. О методах анализа и применении НМ-сетей массового обслуживания // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 3. С. 564 – 566.
7. Колузаева Е.В., Матальцкий М.А. Анализ доходов в открытых НМ-сетях произвольной архитектуры // Вестник Гродненского университета. Сер. 2. 2008. № 1. С. 22 – 29.

Колузаева Екатерина Владимировна

Матальцкий Михаил Алексеевич

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Беларусь).

E-mail: koluzaeva@gmail.com; m.matalytski@gmail.com

Поступила в редакцию 2 июля 2009 г.