МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.865

Н.С. Демин, В.В. Толстобоков

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ОПЦИОНЫ КУПЛИ НА ДИФФУЗИОННОМ (*B*,*P*)-РЫНКЕ ОБЛИГАЦИЙ В СЛУЧАЕ МОДЕЛИ ХАЛЛА – УАЙТА

На основе опосредованного подхода осуществлен вывод формул для стоимости опциона, портфеля и капитала Европейского опциона купли с гарантированным доходом для обладателя опциона и с ограничением выплат для инвестора на диффузионном (B, P)-рынке облигаций. Исследованы свойства решения.

Ключевые слова: *опцион*, *облигация*, *хеджирование*, *капитал*, *портфель.*

Опцион на финансовых рынках является одной из наиболее распространенных вторичных (производных) ценных бумаг, поскольку дает право, а не обязанность, предъявить его к исполнению [1 – 5]. Покупатель опциона приобретает право покупки или продажи оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец опциона (эмитент, инвестор) за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование владельца опциона при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли (call option), а во втором – опцион продажи (put option). Если платежное обязательство характеризуется только ценой базисного актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения, то такие опционы являются стандартными.

Развитие финансовых рынков потребовало использования более сложных платежных обязательств, учитывающих, с одной стороны, желание обладателя опциона иметь гарантированный доход, а с другой – желание инвестора ограничить выплаты по опционам, что породило класс экзотических опционов [6, 7]. Эта проблематика достаточно исследована, когда в качестве базисного актива используется акция ((B, S)-рынок), и является малоисследованной, когда в качестве базисного актива используется облигация ((B, P)-рынок). В данной работе представляется исследование трех видов экзотических опционов купли Европейского типа на диффузионном (B, P)-рынке облигаций на основе опосредованного подхода: двух опционов с гарантированным доходом, которые дают преимущество владельцу опциона; опциона с ограничением выплат, который дает преимущество продавцу опциона.

Используемые обозначения: $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\boldsymbol{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{b;D\}$ – нормальная (гауссовская) плотность с параметрами b и D;

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz=\int_{-\infty}^{x}\phi(z)dz;\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}. \tag{1}$$

1. Постановка задачи

В теории облигаций используются два основных подхода к заданию стоимости облигации – опосредованный и прямой [2]. В случае опосредованного подхода стоимость облигации определяется через краткосрочную процентную ставку, а в случае прямого, известного как модель Хиса-Джерроу-Мортона (HJM-модель) [8], через форвардную процентную ставку. В данной работе используется опосредованный подход.

Рассмотрение задачи ведется на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P})$ [2, 3]. Следуя [2, 3, 9], введем следующие характеристики (B, P)-рынка облигаций. Стоимость $B(t)$ в момент времени t банковского счета такова, что

$$B(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)\,ds\right\}, \tag{2}$$

где $r(t)$ – некоторый стохастический процесс процентной ставки. Основное предположение относительно процесса $r(t)$ состоит в том, что это есть диффузионный гауссовско-марковский процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = \left(a(t) - b(t)r(t)\right)dt + d(t)dW_t,\, r(0) = r_0\,, \tag{3}$$

где W_t – винеровский процесс, функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – детерминированные функции, причем

$$\int_0^T \left(|a(t)| + |b(t)| + d^2(t)\right)dt < \infty\,. \tag{4}$$

Замечание 1. Модель процентной ставки, описываемая уравнением (3), есть не что иное как модель Халла – Уайта [10, 11], частными случаями которой являются модели Мертона, Васичека, Хо – Ли [2].

Стоимость $P_t(T^1)$ в момент времени t бескупонной облигации со сроком погашения T^1 согласно теореме 1, п. 5 из [2] определяется формулой

$$P_t\left(T^1\right) = E\left\{\exp\left\{-\int_t^{T^1} r(s)\,ds\right\}\Bigg| F_t\right\},\ \ 0 < P_t(T^1) \leq 1. \tag{5}$$

Утверждение 1 [2]. Если краткосрочная процентная ставка $r(t)$ подчиняется уравнению (3) и выполнено условие (4), то уравнение (3) имеет, и при этом единственное, решение

$$r(t) = g(t)\left\{r(0) + \int_0^t \frac{a(s)}{g(s)} + \int_0^t \frac{d(s)}{g(s)}dW_s\right\}, \tag{6}$$

где
$$g(t) = \exp\left\{-\int_0^t \beta(s)ds\right\} \tag{7}$$

– фундаментальное решение уравнения

$$g(t) = 1 - \int_0^t \beta(s)g(s)ds\,. \tag{8}$$

Утверждение 2 [2]. Процесс $P_t(T^1)$ имеет эквивалентное (5) представление в виде уравнения

$$P_t(T^1) = \exp\left\{A_t(T^1) - r(t)B_t(T^1)\right\}, \tag{9}$$

где
$$A_t(T^1) = \frac{1}{2}\int_t^{T^1}\left[\int_s^{T^1}\frac{g(u)}{g(s)}d(s)du\right]^2 ds - \int_t^{T^1}\left[\int_t^{u}\frac{g(u)}{g(s)}d(s)ds\right]du, \tag{10}$$

$$B_t(T^1) = \int_t^{T^1}\frac{g(u)}{g(t)}du, \tag{11}$$

Замечание 2. Модели цен облигаций, которые представляются в виде (9), называются однофакторными аффинными моделями согласно терминологии п. 4с, гл. III из [2].

Что же касается динамики процесса цен $P_t(T^1)$ облигации, то будем предполагать, что относительно исходной меры на (Ω, F, $(F_t)_{t\geq 0}$, $\boldsymbol{P}$) процесс $\overline{P_t}\left(T^1\right) = P_t\left(T^1\right)/B(t)$, являющийся дисконтированной относительно банковского счета ценой облигации, является мартингалом [2, 3], а в силу теоремы 1, п. 5а, гл. VII из [2] рассматриваемый рынок является безарбитражным [1 – 3].

Инвестор в момент времени t формирует капитал

$$X_t = \beta_t B(t) + \gamma_t P_t(T^1),\ t \in [0,T],\ T < T^1, \tag{12}$$

состоящий из банковского счета B и бескупонной облигации $P(T^1)$ со сроком погашения T^1. Задача инвестирования на таком (B, P)-рынке заключается в следующем: сформировать портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$ таким образом, чтобы эволюция капитала X_t^* в соответствии с (12) обеспечила в момент $T < T^1$ выполнение платежного обязательства

$$X_T^* = f_T, \tag{13}$$

где $f_T \geq 0$ – платежная функция, T – фиксированный момент исполнения опциона, то есть рассматриваются опционы Европейского типа [1 – 3].

В данной работе исследуется проблема хеджирования для опционов купли с платежными функциями соответственно вида ($a^+ = \max\{a;0\}$)

$$f_T^{\max 1} = \max\left\{P_T(T^1) - K_1, K_2\right\}; \tag{14}$$

$$f_T^{\max 2} = \max\left\{P_T(T^1) - K_1, K_2\right\} I\left[P_T(T^1) > K_1\right]; \tag{15}$$

$$f_T^{\min} = \min\left\{\left(P_T(T^1) - K_1\right)^+, K_2\right\}, \tag{16}$$

где $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, I[A] – индикатор события A, т. е. I[A]=1, если событие A происходит и I[A]=0, если событие А не происходит.

Согласно платежному обязательству (14), владелец опциона может всегда предъявить его к исполнению, получая гарантированную выплату K_2, если $P_T(T^1) \leq K_1+K_2$, и выплату в размере $P_T(T^1) - K_1$, если $P_T(T^1) > K_1+K_2$. Согласно платежному обязательству (15), владелец опциона предъявляет его к исполнению только при выполнении условия $P_T(T^1)>K_1$. В результате владелец опциона получает гарантированную выплату K_2, если $P_T(T^1)\le K_1+K_2$, и выплату в размере $P_T(T^1)-K_1$, если $P_T(T^1)>K_1+K_2$. Согласно платежному обязательству (16), если $P_T(T^1)>K_1$, то покупатель опциона предъявляет его к исполнению и получает выплату в размере $P_T(T^1)$ K_1, если $P_T(T^1)<K_1+K_2$, и в размере K_2, если $P_T(T^1)\ge K_1+K_2$.

Замечание 3. Платежные функции (14), (15) дают преимущество владельцу опциона, т. к. гарантируют ему выплату, равную K_2, в случае (14) всегда и в случае (15) при выполнении условия $P_T(T^1)>K_1$. Платежная функция (16) дает преимущество инвестору, т. к. ограничивает его выплаты по опциону величиной K_2.

Структура статьи следующая. В п. 2 вынесены основные результаты для опционов купли, для которых получены формулы, определяющие цены опционов, а также хеджирующие стратегии (портфели) и соответствующие им капиталы, обеспечивающие выполнение платежных обязательств. В п. 3 исследуются свойства решения.

2. Основные результаты

Обозначим

$$d_1(t)=\frac{\ln\left[\dfrac{K_1B(t)}{P_t(T^1)}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_T^2(T^1)B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1)B_T(T^1)},$$

$$d_2(t)=\frac{\ln\left[\dfrac{(K_1+K_2)B(t)}{P_t(T^1)}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_T^2(T^1)B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1)B_T(T^1)};\tag{17}$$

$$y_1(t)=\frac{\ln\left[\dfrac{K_1B(t)}{P_t(T^1)}\right]-\dfrac{1}{2}\sigma_T^2(T^1)B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1)B_T(T^1)},$$

$$y_2(t)=\frac{\ln\left[\dfrac{(K_1+K_2)B(t)P_t(T^1)}{P_t(T^1)}\right]-\dfrac{1}{2}\sigma_T^2(T^1)B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1)B_T(T^1)},\tag{18}$$

где

$$B_T(T^1)=\int_T^{T^1}\frac{g(u)}{g(T)}du,\tag{19}$$

$$\sigma_T(T^1)=\left(\int_T^{T^1}\left[\int_s^{T^1}\frac{g(u)}{g(s)}d(s)\right]^2ds\right)^{\frac{1}{2}},\tag{20}$$

$$g(u)=\exp\left\{-\int_0^u b(s)ds\right\},\tag{21}$$

а d_1, d_2, y_1, y_2 определяются формулами (17), (18) при $t=0$.

Теорема 1. В случае опциона купли с платежной функцией вида (14) стоимость опциона $C_T^{\max 1}$, капитал $X_t^{\max 1}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\max 1} = (\gamma_t^{\max 1}, \beta_t^{\max 1})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 1} = P_0(T^1)\Phi(-y_2) - K_1\Phi(-d_2) + K_2\Phi(d_2)\,; \tag{22}$$

$$X_t^{\max 1} = P_t(T^1)\Phi(-y_2(t)) - K_1B(t)\Phi(-d_2(t)) + K_2B(t)\Phi(d_2(t))\,; \tag{23}$$

$$\gamma_t^{\max 1} = \Phi(-y_2(t)), \beta_t^{\max 1} = -K_1\Phi(-d_2(t)) + K_2\Phi(d_2(t)). \tag{24}$$

Доказательство. Согласно общей теории платежных обязательств на рынке облигаций [2, 3],

$$X_t = B(t)E\{B^{-1}(T)f_T \mid F_t\}, \tag{25}$$

$$\gamma_t = \left.\frac{\partial X_t}{\partial p}\right|_{p = P_t(T^1)},\ \beta_t = \frac{X_t - \gamma_t P_t(T^1)}{B(t)}. \tag{26}$$

В соответствии с теорией расчетов на полных безарбитражных рынках и в предположении, что исходная вероятностная мера на $(\Omega,\ F,\ (F_t)_{t\geq 0},\ \boldsymbol{P})$ является мартингальной, а также, что

$$R(t,T) = B(t)B^{-1}(T) = \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}, \tag{27}$$

находим, используя (14), (25), что

$$X_t^{\max 1} = E\{R(t,T)f_T^{\max 1} \mid F_t\} = E\left\{R(t,T)\max\left\{P_T(T^1) - K_1, K_2\right\} \mid F_t\right\} =$$

$$= E\left\{I\left[P_T(T^1) > K_1 + K_2\right]R(t,T)P_T(T^1) \mid F_t\right\} - K_1E\left\{I\left[P_T(T^1) > K_1 + K_2\right]R(t,T) \mid F_t\right\} +$$

$$+K_2E\left\{I\left[P_T(T^1) \leq K_1 + K_2\right]R(t,T) \mid F_t\right\}. \tag{28}$$

Использование (9) дает, что события

$$\left\{P_T(T^1) > K_1 + K_2\right\} = \left\{A_T(T^1) - r(T)B_T(T^1) > \ln(K_1 + K_2)\right\} = \left\{r(T) \leq r_{12}^*\right\}; \tag{29}$$

$$\left\{P_T(T^1) \leq K_1 + K_2\right\} = \left\{A_T(T^1) - r(T)B_T(T^1) \leq \ln(K_1 + K_2)\right\} = \left\{-r(T) \leq -r_{12}^*\right\}, \tag{30}$$

где

$$r_{12}^* = \frac{\ln(K_1 + K_2) - A_T(T^1)}{-B_T(T^1)}. \tag{31}$$

Пусть

$$\xi = r(T), \eta = \int_0^{T^1} r(u)du, \varsigma = \int_0^T r(u)du\,. \tag{32}$$

Тогда из (28) – (30) находим, что

$$X_t^{\max 1} = E\left\{I\left[\xi \leq r_{12}^*\right]\exp\{-\eta\} \mid F_t\right\} - K_1B(t)E\left\{I\left[\xi \leq r_{12}^*\right]\exp\{-\varsigma\} \mid F_t\right\} +$$

$$+K_2B(t)E\left\{I\left[-\xi \leq -r_{12}^*\right]\exp\{-\varsigma\} \mid F_t\right\}. \tag{33}$$

Для дальнейшего упрощения этой формулы полезной является следующая лемма из [2].

Лемма. Пусть (X, Y) – гауссовская пара случайных величин с вектором средних значений (μ_X, μ_Y) и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$E\{I[X \le x]\exp\{-Y\}\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right\}\Phi(\tilde{x}) \tag{34}$$

и
$$E\{I[X \le x]X\exp\{-Y\}\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right\}\{(\mu_X - \rho_{XY})\Phi(\tilde{x}) - \sigma_X\varphi(\tilde{x})\}, \tag{35}$$

где
$$\tilde{x} = \frac{x - (\mu_X - \rho_{XY})}{\sigma_X}. \tag{36}$$

Из (6) находим, что

$$\mu_\xi = E\{r(T)\} = g(T)\left\{r(0) + \int_0^T \frac{a(s)}{g(s)}ds\right\}; \tag{37}$$

$$\mu_{-\xi} = -\mu_\xi; \tag{38}$$

$$\mu_\eta = E\left\{\int_0^{T^1} r(u)du\right\} = r(0)\int_0^{T^1} g(u)du + \int_0^{T^1}\left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)}a(s)ds\right]du; \tag{39}$$

$$\mu_\varsigma = E\left\{\int_0^T r(u)du\right\} = r(0)\int_0^T g(u)du + \int_0^T\left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)}a(s)ds\right]du; \tag{40}$$

$$\sigma_\xi^2 = D\{r(T)\} = \int_0^T d^2(s)\left(\frac{g(T)}{g(s)}\right)ds; \tag{41}$$

$$\sigma_{-\xi}^2 = \sigma_\xi^2; \tag{42}$$

$$\sigma_\eta^2 = D\left\{\int_0^{T^1} r(u)du\right\} = \int_0^{T^1}\left[\int_s^{T^1} \frac{g(u)}{g(s)}d(s)du\right]^2 ds; \tag{43}$$

$$\sigma_\varsigma^2 = D\left\{\int_0^T r(u)du\right\} = \int_0^T\left[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)}d(s)du\right]^2 ds; \tag{44}$$

$$\rho_{\xi\varsigma} = \operatorname{cov}\left(r(T), \int_0^T r(u)du\right) = \int_0^T\left(d^2(s)\frac{g(T)}{g(s)}\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)}du\right)ds; \tag{45}$$

$$\rho_{-\xi\varsigma} = -\rho_{\xi\varsigma}, \tag{46}$$

$$\rho_{\xi\eta} = \operatorname{cov}\left(r(T), \int_0^{T^1} r(u)du\right) = \operatorname{cov}\left(r(T), \int_0^T r(u)du\right) + \operatorname{cov}\left(r(T), \int_T^{T^1} r(u)du\right) =$$

$$= \rho_{\xi\varsigma} + \sigma_\xi^2 \int_T^{T^1} \frac{g(u)}{g(T)}du. \tag{47}$$

Использование (33), (34) дает, что

$$X_t^{\max 1} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 - \mu_\eta\right\}\Phi\left(\frac{r_{12}^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\varsigma})}{\sigma_\xi}\right) -$$

$$-K_1 B(t)\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\varsigma^2 - \mu_\varsigma\right\}\Phi\left(\frac{r_{12}^* - (\mu_\xi - \rho_{\xi\varsigma})}{\sigma_\xi}\right) +$$

$$+K_1 B(t)\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\varsigma^2 - \mu_\varsigma\right\}\Phi\left(\frac{-r_{12}^* - (\mu_{-\xi} - \rho_{-\xi\varsigma})}{\sigma_{-\xi}}\right). \tag{48}$$

Тогда (23) следует в результате подстановки (37) – (47) в (48), а (22) из того, что $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$ [2, 3].

Из (1) следует

$$\frac{\partial\Phi(e(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{e^2(s)}{2}\right\}\frac{\partial e(s)}{\partial s}, \frac{\partial\Phi(-e(s))}{\partial s} = -\frac{\partial\Phi(e(s))}{\partial s}. \tag{49}$$

Согласно (17), (18),

$$y_2(t) - d_2(t) = \sigma_T(T^1)B_T(T^1). \tag{50}$$

Тогда из (23), (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\max 1}}{\partial p} = \left[\Phi(-y_2(t))\right] + \Psi, \Psi = -p\left[\frac{\partial\Phi(y_2(t))}{\partial p}\right] + (K_1 + K_2)B(t)\left[\frac{\partial\Phi(d_2(t))}{\partial p}\right]. \tag{51}$$

Использование (17), (18), (49) дает

$$\frac{\partial\Phi(y_2(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T(T^1)B_T(T^1)}\exp\left\{-\frac{y_2(t)^2}{2}\right\}; \tag{52}$$

$$\frac{\partial\Phi(d_2(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T(T^1)B_T(T^1)}\exp\left\{-\frac{d_2(t)^2}{2}\right\}. \tag{53}$$

Из (17), (50) получаем

$$y_2^2 = d_2^2 - 2\ln\left[\frac{(K_1 + K_2)B(t)}{P_t(T^1)}\right]. \tag{54}$$

Использование (52) – (54) в (51) дает, что Ψ=0. Таким образом (24) следует из (23), (26), (51). Теорема доказана.

Теорема 2. В случае опциона купли с платежной функцией вида (15) стоимость опциона $C_T^{\max 2}$, капитал $X_t^{\max 2}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\max 2} = (\gamma_t^{\max 2}, \beta_t^{\max 2})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 2} = C_T^{\max 1} - K_2\Phi(d_1); \tag{55}$$

$$X_t^{\max 2} = X_t^{\max 1} - K_2 B(t)\Phi(d_1(t)); \tag{56}$$

$$\gamma_t^{\max 2} = \gamma_t^{\max 1} + K_2 B(t)P_t^{-1}(T^1)\sigma_T^{-1}(T^1)B_T^{-1}(T^1)\varphi(d_1(t)); \tag{57}$$

$$\beta_t^{\max 2} = \beta_t^{\max 1} - K_2\left[\Phi(d_1(t)) + \sigma_T^{-1}(T^1)B_T^{-1}(T^1)\varphi(d_1(t))\right]. \tag{58}$$

Доказательство. Использование (15), (25) аналогично (28) дает, что

$$X_t^{\max 2} = E\{R(t,T) f_T^{\max 2} \mid F_t\} = E\Big\{R(t,T)\max\Big\{P_T(T^1)-K_1, K_2\Big\} I\Big[P_T(T^1)>K_1\Big] \mid F_t\Big\} =$$

$$= E\Big\{I\Big[P_T(T^1)>K_1+K_2\Big]R(t,T)P_T(T^1)\mid F_t\Big\} - K_1 E\Big\{I\Big[P_T(T^1)>K_1+K_2\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\} +$$

$$+K_2 E\Big\{I\Big[K_1<P_T(T^1)\le K_1+K_2\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\} = X_t^{\max 1} - K_2 E\Big\{I\Big[P_T(T^1)\le K_1\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\} =$$

$$= X_t^{\max 1} - K_2 B(t) E\Big\{I\Big[-\xi \le -r_1^*\Big]\exp\{-\varsigma\}\mid F_t\Big\}, \qquad (59)$$

где ξ, ς имеют вид (32), а

$$r_1^* = \frac{\ln K_1 - A_T(T^1)}{-B_T(T^1)}.$$

Преобразование (59) аналогично (28) с использованием (23), (34) и (59) приводит к (56), а (55) следует из того, что $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ [2,3]. Из (56) с учетом (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\max 1}}{\partial p} = \big[\Phi(-y_2(t))\big] - K_2 B(t)\frac{\partial \Phi(d_1(t))}{\partial p} + \Psi, \qquad (60)$$

где Ψ имеет вид (51). Использование (17), (49) дает

$$\frac{\partial \Phi(d_1(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T(T^1)B_T(T^1)}\exp\left\{-\frac{d_1(t)^2}{2}\right\}. \qquad (61)$$

Так как при доказательстве теоремы 1 было доказано, что $\Psi=0$, то (57) следует с учетом (24) из (26), (60), (61) и (1), а (58) следует с учетом (24) из (26), (56) и (57). Теорема доказана.

Теорема 3. В случае опциона купли с платежной функцией вида (16) стоимость опциона $C_T^{\min}$, капитал $X_t^{\min}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\min} = (\gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min})$ определяются формулами

$$C_T^{\min} = P_0(T^1)\big[\Phi(y_2)-\Phi(y_1)\big] - K_1\big[\Phi(d_2)-\Phi(d_1)\big] + K_2\Phi(-d_2); \qquad (62)$$

$$X_t^{\min} = P_t(T^1)\big[\Phi(y_2(t))-\Phi(y_1(t))\big] - K_1 B(t)\big[\Phi(d_2(t))-\Phi(d_1(t))\big] + K_2 B(t)\Phi(-d_2(t)); \qquad (63)$$

$$\gamma_t^{\min} = \Phi(y_2(t)) - \Phi(y_1(t)); \qquad (64)$$

$$\beta_t^{\min} = -K_1\big[\Phi(d_2(t))-\Phi(d_1(t))\big] + K_2\Phi(-d_2(t)). \qquad (65)$$

Доказательство. Использование (16), (25) аналогично (28) дает, что

$$X_t^{\min} = E\{R(t,T) f_T^{\min} \mid F_t\} = E\Big\{R(t,T)\min\Big\{\big(P_T(T^1)-K_1\big)^+, K_2\Big\}\mid F_t\Big\} =$$

$$= E\Big\{I\Big[P_T(T^1)\le K_1+K_2\Big]R(t,T)P_T(T^1)\mid F_t\Big\} - E\Big\{I\Big[P_T(T^1)\le K_1\Big]R(t,T)P_T(T^1)\mid F_t\Big\} -$$

$$-K_1 E\Big\{I\Big[P_T(T^1)\le K_1+K_2\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\} + E\Big\{I\Big[P_T(T^1)\le K_1\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\} +$$

$$+K_2 E\Big\{I\Big[P_T(T^1)>K_1+K_2\Big]R(t,T)\mid F_t\Big\}. \qquad (66)$$

Преобразование (66) аналогично (28) приводит к (63), а (62) следует из (63) с учетом того, что $C_T^{\min} = X_0^{\min}$ [2,3]. Из (63) с учетом (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial p} = \left[\Phi(y_2(t)) - \Phi(y_1(t))\right] + \Psi\,; \tag{67}$$

$$\Psi = p\frac{\partial\Phi(y_2(t))}{\partial p} - p\frac{\partial\Phi(y_1(t))}{\partial p} + K_1 B(t)\frac{\partial\Phi(d_1(t))}{\partial p} - (K_1+K_2)B(t)\frac{\partial\Phi(d_2(t))}{\partial p}\,. \tag{68}$$

Использование (18), (49) дает

$$\frac{\partial\Phi(y_1(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T(T^1)B_T(T^1)}\exp\left\{-\frac{y_1(t)^2}{2}\right\}. \tag{69}$$

Аналогично (54)

$$y_1^2 = d_1^2 - 2\ln\left[\frac{K_1 B(t)}{P_t(T^1)}\right]. \tag{70}$$

Использование (52) – (54), (61), (69) и (70) в (68) дает, что $\Psi = 0$. Таким образом (64) следует из (26), (67), а (65) следует из (27), (63) и (64). Теорема доказана.

3. Свойства решения

Утверждение 3. Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимости стоимостей опционов от цены исполнения K_1 и от величины K_2, гарантирующей доход в случае платежных функций (14), (15) и ограничивающей выплаты по опциону в случае платежной функции (16), определяются формулами

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} = -\Phi(-d_2),\quad \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} = \Phi(d_2),$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1} = -\Phi(-d_2) - \frac{K_2}{K_1}\sigma_T^{-1}(T^1)B_T^{-1}(T^1)\varphi(d_1(t))\,; \tag{71}$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2} = \Phi(d_2) - \Phi(d_1),\quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1} = -\left[\Phi(d_2) - \Phi(d_1)\right],\quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2} = \Phi(-d_2)\,. \tag{72}$$

При этом

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} < 0,\ \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} > 0,\ \frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1} < 0,\ \frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2} > 0,\ \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1} < 0,\ \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2} > 0\,, \tag{73}$$

т.е. по K_1 опционы купли являются убывающими, а по K_2 – возрастающими функциями.

Доказательство. Использование (22), (55), (62) и (49) дает, что

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\}\frac{\partial y_2}{\partial K_1} + (K_1+K_2)\exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\}\frac{\partial d_2}{\partial K_1}\right] - \Phi(-d_2)\,; \tag{74}$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\}\frac{\partial y_2}{\partial K_2} + (K_1+K_2)\exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\}\frac{\partial d_2}{\partial K_2}\right] + \Phi(d_2)\,; \tag{75}$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1}=\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1}-\frac{K_2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\}\frac{\partial d_1}{\partial K_1}; \tag{76}$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2}=\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2}-\Phi(d_1); \tag{77}$$

$$\frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\}\frac{\partial y_2}{\partial K_1}-(K_1+K_2)\exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\}\frac{\partial d_2}{\partial K_1}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_1^2}{2}\right\}\frac{\partial y_1}{\partial K_1}-K_1\exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\}\frac{\partial d_1}{\partial K_1}\right]-[\Phi(d_2)-\Phi(d_1)]; \tag{78}$$

$$\frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\}\frac{\partial y_2}{\partial K_2}-(K_1+K_2)\exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\}\frac{\partial d_2}{\partial K_2}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[P_0(T^1)\exp\left\{-\frac{y_1^2}{2}\right\}\frac{\partial y_1}{\partial K_2}-K_1\exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\}\frac{\partial d_1}{\partial K_2}\right]+\Phi(-d_2). \tag{79}$$

Тогда (71) – (73) следуют из (74) – (79), а свойства (73) следуют очевидным образом из (71) – (73) с учетом того, что $d_2>d_1$.

Экономическая интерпретация свойств (73) заключается в следующем. Согласно (14), опцион всегда предъявляется к исполнению и при увеличении K_1 уменьшается величина возможной выплаты по опциону, а за меньший доход следует меньше платить, что приводит к уменьшению цены опциона купли с платежной функцией вида (14) при увеличении K_1. Согласно (15), (16), опционы предъявляются к исполнению, если $P_T(T^1)>K_1$. Таким образом, при увеличении K_1 увеличивается риск не предъявить опцион к исполнению, а за больший риск следует меньше платить, что приводит к уменьшению цен опционов с платежными функциями (15), (16) при увеличении K_1. Так как K_2 – это максимальная величина, которую владелец опциона может получить при предъявлении к исполнению, то естественно, что цены опционов возрастают при увеличении K_2, т.е. за возможность получить больший доход следует больше платить.

Замечание 4. Из (15), (16) следует, что

$$\lim_{K_2\downarrow 0} f_T^{\max 2}=\widetilde{f}_T,\quad \lim_{K_2\uparrow\infty} f_T^{\min}=\widetilde{f}_T, \tag{80}$$

где

$$\widetilde{f}_T=(P_T(T^1)-K_1)^+ \tag{81}$$

может быть определена как платежная функция стандартного опциона купли, соответствующая экзотическим опционам с платежными функциями (15), (16). В [2, с. 970 – 979] на основе опосредованного подхода найдена стоимость опциона купли $\widetilde{C}_T$ для стандартной платежной функции вида (81).

Утверждение 4. Пусть $\widetilde{C}_T,\widetilde{X}_t,\widetilde{\gamma}_t,\widetilde{\beta}_t$ есть пределы $C_T^{\max 2},X_t^{\max 2},\gamma_t^{\max 2},\beta_t^{\max 2}$ при $K_2\downarrow 0$ либо $C_T^{\min},X_t^{\min},\gamma_t^{\min},\beta_t^{\min}$ при $K_2\uparrow\infty$. Тогда

$$\widetilde{C}_T = P_0(T^1)\Phi(-y_1) - K_1\Phi(-d_1)\,; \tag{82}$$

$$\widetilde{X}_t = P_t(T^1)\Phi(-y_1(t)) - K_1 B(t)\Phi(-d_1(t))\,; \tag{83}$$

$$\tilde{\gamma}_t = \Phi(-y_1(t)), \tilde{\beta}_t = -K_1\Phi(-d_1(t)). \tag{84}$$

Доказательство. Из (17), (18) следует, что $d_2(t) = d_1(t), y_2(t) = y_1(t)$ при $K_2 = 0$. Таким образом, формулы (82) – (84) следуют из (55) – (58) с учетом (22) – (24). Аналогично $d_2(t) = \infty, y_2(t) = \infty$ при $K_2 = \infty$. Тогда с учетом свойств $\Phi(-\infty) = 0, \Phi(+\infty) = 1, \Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ формулы (82) – (84) также следуют из (62) – (65).

Утверждение 5. Стоимости опционов $C_T^{\max 1}, C_T^{\max 2}, C_T^{\min}, \widetilde{C}_T$ связаны следующими соотношениями:

$$C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2} > \widetilde{C}_T > C_T^{\min}\,. \tag{85}$$

Доказательство. Свойство $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$ следует непосредственно из (56). Свойства $C_T^{\max 2} > \widetilde{C}_T > C_T^{\min}$ следуют из того, что согласно (73) $C_T^{\max 2}$ и $C_T^{\min}$ являются возрастающими функциями K_2, и при этом, согласно утверждению 4, $\lim C_T^{\max 2} = \widetilde{C}_T$ при $K_2 \downarrow 0$ и $\lim C_T^{\min} = \widetilde{C}_T$ при $K_2 \uparrow \infty$.

Экономическая интерпретация свойств (85) заключается в следующем. Поскольку в случае стандартных опционов с платежной функцией (81) отсутствуют ограничения на величину выплаты по опциону, то цена экзотического опциона с платежной функцией (16) меньше цены стандартного опциона, так как за наличие ограничений, уменьшающих величину возможного дохода, следует меньше платить. Цены экзотических опционов с платежными функциями (14), (15) больше цены стандартного опциона, так как за наличие возможности получения гарантированного дохода следует больше платить. При этом $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$, так как платежная функция $f_T^{\max 2}$ содержит дополнительное условие, в котором заключена возможность непредъявления опциона к исполнению, а за возрастающий риск следует меньше платить.

Приведем результаты для двух широко используемых моделей цен облигаций [1 – 3, 10, 11]. Для модели Хо – Ли $b(t) \equiv 0, d(t) \equiv d$, а для модели Васичека $b(t) \equiv b, d(t) \equiv d$. Тогда для модели Хо – Ли

$$\sigma_T(T^1)B_T(T^1) = \left(\frac{d^2}{3}\left[(T^1 - T)^3\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(T^1 - T\right), \tag{86}$$

а для модели Васичека

$$\sigma_T(T^1)B_T(T^1) = \frac{d}{b}\left(\frac{1}{2b}(1 - \exp\{-2bT\})\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \exp\left\{-b\left(T^1 - T\right)\right\}\right). \tag{87}$$

Утверждение 6. Для моделей Хо – Ли и Васичека справедливы теоремы 1 – 3 и утверждения 3 – 5, в которых величины $\sigma_T(T^1)B_T(T^1)$ выражаются соответственно формулами (86) и (87).

Заключение

Основные результаты следующие:

1. Получены аналитические выражения для стоимостей опционов, хеджирующих стратегий (портфелей) и капиталов для опционов купли с платежными функциями (14) – (16) (теоремы 1 – 3)

2. Проведено исследование свойств решения (утверждения 3 – 5).

3. Все общие результаты для опционов купли с платежными функциями (14) – (16) конкретизированы для моделей Хо – Ли и Васичека (утверждение 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
3. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУВШЭ, 2001.
4. *Буренин А.Н.* Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995.
5. *Wilmott P.* Derivatives: the theory and practice financial engineering. N.Y.: John Willey, 2000.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance Working Paper. Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991. No. 220.
7. *Zang P.G.* An introduction to exotic options // European Financ. Manag. 1995. V. 1. P. 87 – 95.
8. *Heath D.*, *Jarrow R.*, *Morton A.* Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. 1992. V. 60. No. 1. P. 77 – 105.
9. *Бьорк Т.* О временной структуре разрывных процентных ставок // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 627 – 657.
10. *Hull J.*, *White A.* Pricing interest rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. No. 5. P. 573 – 592.
11. *Hull J.*, *White A.* Bond option pricing on a model for the evolution of bond prices // Advances in Futures and Options Research. 1993. No. 6. P. 1 – 13.

Демин Николай Серапионович
Толстобоков Вячеслав Васильевич
Томский государственный университет
E-mail: dyomin@fpmk.tsu.ru; 4tvv@rambler.ru
Поступила в редакцию 28 сентября 2009 г.