ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 1(10)

УДК 519.2:53.05

Ф.Ф. Идрисов, А.Ф. Терпугов

ОЦЕНКА МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ИСКАЖЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ. ЧАСТЬ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Исследованы свойства алгоритма оценивания параметров многомерной динамической системы при искаженных наблюдениях. Аналитически доказана его устойчивость.

Ключевые слова: *система*, *процесс*, *ошибки*, *алгоритм*, *сходимость*, *устойчивость*.

В работе [1] рассматривалась многомерная динамическая система вида

$$x_{t+1} = Bx_t + n_{t+1}, \tag{1}$$

где $x_t = [x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, ..., x_t^{(m)}]^T$ – вектор размерности m, $B = [b_{ip}]$ – матрица размерности $m \times m$ и $n_t = [n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, ..., n_t^{(m)}]^T$ – случайный вектор размерности m. Были сделаны следующие предположения:

1. Все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы.
2. Векторы n_t независимы по t и одинаково распределены, причем $M\{n_t\} = 0$, $M\{n_t n_t^T\} = Rn$.
3. Плотность вероятностей компонента n_t будем считать четной функцией, так что все моменты величин n_t нечетного порядка равны нулю. Моменты четвертого порядка будем считать ограниченными.

Модель наблюдений над системой (1) была выбрана в виде

$$y_t = x_t + \gamma_t z_t, \tag{2}$$

где γ_t – последовательность независимых случайных величин, принимающих значение 0 с вероятностью $1 - \varepsilon$ и 1 с вероятностью ε, а z_t – независимый по t случайный вектор с $M\{z_t\} = 0$ и $M\{z_t z_t^T\} = Rz$. Второе слагаемое в (2) определяет наличие аномальных наблюдений, которые появляются с вероятностью ε (далее всюду будем считать, что $\varepsilon \ll 1$).

В [1] подчеркивалось, что, несмотря на малость ε, в силу свойств ковариационной матрицы Rz, влияние искажений может быть достаточно большим. Там же был предложен алгоритм определения параметров системы (1), построенный с использованием знакового критерия, и было показано, что он более устойчив к искажениям наблюдений в сравнении с известными алгоритмами [2, 3].

Представляет интерес оценка характеристик данного алгоритма.

1. Оценка характеристик алгоритма

Прежде всего, рассмотрим матрицу $D^{(i)}$ при искажении наблюдений. Ее элементы в этом случае имеют вид

$$D_{jl}^{(i)}(\varepsilon) = -2M\left\{ p_i \left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1} \sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)} \right) (x_{t-1}^{(l)} + \gamma_{t-1} z_{t-1}^{(l)}) \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(j)}) \right\}.$$

Раскрывая скобки, получим

$$D_{jl}^{(i)}(\varepsilon) = -2M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right) x_{t-1}^{(l)} \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(j)})\right\} - \\ -2M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\gamma_{t-1} z_{t-1}^{(l)} \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(j)})\right\}. \quad (3)$$

Но в силу предположения о четности плотностей вероятностей величин $n_t^{(i)}$ и z_t второе слагаемое в (3) равно нулю, так как оно содержит нечетную по $z_{t-1}^{(l)}$ функцию. В силу независимости z_t по t

$$D_{jl}^{(i)}(\varepsilon) = -2M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\right\} M\left[x_{t-1}^{(l)} \operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(j)})\right]. \quad (4)$$

Вычислим каждый сомножитель отдельно. С вероятностью $(10 - \varepsilon)^2$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} = 0$; с вероятностью $2\varepsilon - \varepsilon^2$ хотя бы одно из γ_t или γ_{t-1} отлично от нуля. Если через $p_c(u)$ обозначить плотность вероятностей величины

$$u = \gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}$$

при условии, что хотя бы одно из γ_t или γ_{t-1} отлично от нуля, то

$$M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\right\} = (1-\varepsilon)^2 p_i(0) + (2\varepsilon - \varepsilon^2)\int_{-\infty}^{\infty} p_i(u) p_c(u) du .$$

Но заметим, что, по предположению, искажения наблюдений велики, так что дисперсия величины z_t много больше дисперсий величин $n_t^{(i)}$ и $x_t^{(i)}$. Поэтому $p_i(u)$ приближенно (по отношению к $p_c(u)$) может быть заменена δ-функцией, так как $p_c(u)$ много «шире» $p_i(u)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_i(u) p_c(u) du = p_c(0)$$

и

$$M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\right\} = (1-\varepsilon)^2 p_i(0) + (2\varepsilon - \varepsilon^2) p_c(0) . \quad (5)$$

Оценим второе слагаемое. В случае нормальных распределений $p(0) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Поэтому $p_i(0) \sim 1/\sigma_{n_i}$, $p_c(0) \sim 1/\sigma_u$, так что

$$M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\right\} = p_i(0)\left[(1-\varepsilon)^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_u}\right]. \quad (6)$$

Но в силу большой величины искажений в наблюдениях $\sigma_{n_i}/\sigma_u \ll 1$, кроме того, ε тоже мало. Поэтому второе слагаемое в (5) и (6) много меньше первого, так что

$$M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m} b_{ip} z_{t-1}^{(p)}\right)\right\} = (1-\varepsilon)^2 p_i(0) . \quad (7)$$

Рассмотрим теперь второй сомножитель в (4). Усредняя сначала по γ_{t-2}, а затем по $z_{t-2}^{(j)}$, получим

$$M\left\{x_{t-1}^{(l)}\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right\}=(1-\varepsilon)M\left\{x_{t-1}^{(l)}\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)})\right\}+\varepsilon M\left\{\left[1-2F_{z_j}(-x_{t-2}^{(j)})\right]x_{t-1}^{(l)}\right\},$$

где $F_{z_j}(\cdot)$ – функция распределения величины $z_t^{(j)}$. Учитывая еще раз, что искажения наблюдений могут быть значительными, разложим $F_{z_j}(-x_{t-2}^{(j)})$ в ряд Тейлора по степеням $x_{t-2}^{(j)}$ и ограничимся первым слагаемым. Тогда

$$M\left\{\left[1-2F_{z_j}(-x_{t-2}^{(j)})\right]x_{t-1}^{(l)}\right\}=2p_{z_j}(0)M\left\{x_{t-1}^{(l)}x_{t-2}^{(j)}\right\}=2p_{z_j}(0)(B\cdot Rx)_{lj}\,. \qquad (8)$$

И, учитывая результат, полученный в [1],

$$M\left\{x_{t-1}^{(l)}\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right\}=\sqrt{2/\pi}(1-\varepsilon)(B\cdot Rx)_{lj}\left(\sqrt{Rx_{jj}}\right)^{-1}+2\varepsilon p_{z_j}(0)(B\cdot Rx)_{lj}\,.$$

Считая $z_t^{(j)}$ нормальными, получим

$$M\left\{x_{t-1}^{(l)}\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right\}=\frac{(B\cdot Rx)_{lj}}{\sqrt{Rx_{jj}}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\varepsilon)+\frac{\varepsilon\sqrt{Rx_{jj}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z_j}}\right). \qquad (9)$$

Но в последнем слагаемом можно считать, что $\sqrt{Rx_{jj}}\big/\sigma_{z_j}<<1$, так как искажения в наблюдениях велики. Величина ε также мала. Поэтому второе слагаемое гораздо меньше первого и можно считать, что

$$M\left\{x_{t-1}^{(l)}\operatorname{sign}(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(1-\varepsilon)(B\cdot Rx)_{lj}}{\sqrt{Rx_{jj}}}\,. \qquad (10)$$

Таким образом

$$D_{jl}^{(i)}(\varepsilon)=(1-\varepsilon)D_{jl}^{(i)}+\ldots\,, \qquad (11)$$

где многоточием обозначены слагаемые, которые гораздо меньше выписанного.

Итак, наличие искажений в наблюдениях очень мало изменяет матрицу $D_{jl}^{(i)}(\varepsilon)$, то есть она является устойчивой к этим искажениям.

Рассмотрим теперь величины

$$\xi_{ij}=\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\operatorname{sign}\left[\left(y_t^{(i)}-\sum_{p=1}^{m}b_{ip}y_{t-1}^{(p)}\right)y_{t-2}^{(j)}\right]=$$

$$=\frac{1}{N-3}\sum_{t=3}^{N}\operatorname{sign}\left[\left(n_t^{(i)}+\gamma_t z_t^{(i)}-\gamma_{t-1}\sum_{p=1}^{m}b_{ip}z_{t-1}^{(p)}\right)(x_{t-2}^{(j)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(j)})\right] \qquad (12)$$

и вычислим ковариационную матрицу этих величин. Очевидно, что $M\{\xi_{ij}\}=0$. Имеем

$$(N-3)M\{\xi_{ip}\xi_{jq}\}=\frac{1}{N-3}\sum_{t,l=3}^{N}M\left\{\operatorname{sign}\left[\left(n_t^{(i)}+\gamma_t z_t^{(i)}-\gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m}b_{ir}z_{t-1}^{(r)}\right)\left(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(n_l^{(j)}+\gamma_l z_l^{(j)}-\gamma_{l-1}\sum_{s=1}^{m}b_{js}z_{l-1}^{(s)}\right)(x_{l-2}^{(q)}+\gamma_{l-2}z_{l-2}^{(q)})\right]\right\}. \qquad (13)$$

Рассмотрим отдельные слагаемые этого выражения.

а) Слагаемое с $l = t$.

С вероятностью $(1–\varepsilon)^3$ $\gamma_t = \gamma_{t-1} = \gamma_{t-2} = 0$ и отдельное слагаемое приобретает вид

$$M\left\{\operatorname{sign}\left(n_t^{(i)} n_t^{(j)}\right)\right\} \cdot M\left\{\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} x_{t-2}^{(q)}\right)\right\}.$$

Считая n_t нормальным, получим, что это слагаемое равно

$$\frac{4}{\pi^2}\arcsin\left(\frac{Rn_{ij}}{\sqrt{Rn_{ii}Rn_{jj}}}\right)\arcsin\left(\frac{Rx_{pq}}{\sqrt{Rx_{pp}Rx_{qq}}}\right). \qquad (14)$$

С вероятностью $1 - (1–\varepsilon)^3 \approx 3\varepsilon$ хотя бы одна из величин γ_t, γ_{t-1} или γ_{t-2} будет отлична от нуля. Можно вычислить слагаемое в этом случае явно, но выражение будет громоздким. Однако, так как $\operatorname{sign}(\cdot) = \pm 1$, то очевидно, что по модулю это слагаемое не превосходит единицу. Таким образом, при $l = t$ отдельное слагаемое в (13) равно

$$(1-\varepsilon)^3 \frac{4}{\pi^2}\arcsin\left(\frac{Rn_{ij}}{\sqrt{Rn_{ii}Rn_{jj}}}\right)\arcsin\left(\frac{Rx_{pq}}{\sqrt{Rx_{pp}Rx_{qq}}}\right) + 3\varepsilon k, \qquad (15)$$

где $|k| < 1$.

б) Слагаемое с $l = t \pm 1$.

Если $\gamma_{t-1} = 0$, то это слагаемое имеет вид

$$M\left\{\operatorname{sign}\left(n_t^{(i)} + \gamma_t z_t^{(i)}\right)\right\}\times$$
$$\times M\left\{\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right)\operatorname{sign}\left[\left(n_{t-1}^{(j)} - \gamma_{t-2}\sum_{s=1}^{m} b_{js} z_{t-2}^{(s)}\right)\left(x_{t-3}^{(q)} + \gamma_{t-3} z_{t-3}^{(q)}\right)\right]\right\} = 0, \qquad (16)$$

в силу того, что $n_t^{(i)}$ и $z_t^{(i)}$ не зависят от остальных величин. Таким образом, это слагаемое может быть отлично от нуля лишь при $\gamma_{t-1} = 1$, что будет с вероятностью ε. По модулю это слагаемое также не превышает 1.

в) Слагаемое с $l = t \pm 2$ имеет вид

$$M\left\{\operatorname{sign}\left(n_t^{(i)} + \gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)}\right)\right\}\times$$
$$\times M\left\{\operatorname{sign}\left[\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right)\left(n_{t-2}^{(j)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(j)} - \gamma_{t-3}\sum_{s=1}^{m} b_{js} z_{t-3}^{(s)}\right)\left(x_{t-4}^{(q)} + \gamma_{t-4} z_{t-4}^{(q)}\right)\right]\right\} = 0. \qquad (17)$$

Оно равно нулю в силу первого сомножителя. Очевидно, что все слагаемые с $|l - t| > 2$ также равны нулю.

Итак,

$$(N-3)M\{\xi_{ip}\xi_{jq}\} = (1-\varepsilon)^3 \frac{4}{\pi^2}\arcsin\left(\frac{Rn_{ij}}{\sqrt{Rn_{ii}Rn_{jj}}}\right)\arcsin\left(\frac{Rx_{pq}}{\sqrt{Rx_{pp}Rx_{qq}}}\right) + 5\varepsilon k, \qquad (18)$$

где $|k| < 1$.

Отметим, что в силу малости ε последнее слагаемое в (18) также мало. Поэтому можно утверждать, что искажение данных в наблюдениях мало сказывается на $M\{\xi_{ip}\xi_{jq}\}$, то есть величины ξ_{ij} являются устойчивыми к искажению данных в наблюдениях.

2. Исследование ковариации оценок параметров системы

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении ковариационной матрицы величин $\hat{b}_{ip}$ при $N\to\infty$, получаемых из системы (29), приведенной в [1]. Для этих целей используем метод , аналогичный изложенному в работе [4].

Обычно ковариации оценок при $N\to\infty$ убывают как $1/N$. Нетрудно показать, что и в нашем случае $\mathrm{cov}(\hat{b}_{ip},\hat{b}_{jq})\sim 1/N$. В этом случае $\hat{b}_{ip}-b_{ip}$ являются величинами порядка $1/\sqrt{N}$, так что $\hat{b}_{ip}=b_{ip}+c_{ip}/\sqrt{N}$.

Рассмотрим процессы

$$\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)=\frac{1}{\sqrt{N-3}}\sum_{t=3}^{N}\mathrm{sign}\left[\left(x_t^{(i)}+\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}\left(b_{ir}+\frac{c_{ir}}{\sqrt{N-3}}\right)(x_{t-1}^{(r)}+\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)})\right)\times\right.$$
$$\left.\times(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)})\right],\qquad p=\overline{1,m},\tag{19}$$

зависящие от объема выборки N и вектора $\vec{c}_i=(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{im})$. Найдем асимптотические (при $N\to\infty$) характеристики этих процессов.

Вычисляя математическое ожидание, получим

$$M\left\{\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)\right\}=\sqrt{N-3}G_{ip}\left(\vec{b}_i+\frac{\vec{c}_i}{\sqrt{N-3}},\vec{b}_i\right)=\sqrt{N-3}G_{ip}\left(\vec{b}_i,\vec{b}_i\right)+$$
$$+\sqrt{N-3}\sum_{l=1}^{m}\left.\frac{\partial G_{ip}(\vec{b}_i,\vec{b}_i)}{\partial\hat{b}_{il}}\right|_{\hat{b}_{il}=b_{il}}\cdot\frac{c_{il}}{\sqrt{N-3}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{N-3}}\right).$$

Так как $G_{ip}(\hat{b}_i,\hat{b}_i)=0$, то

$$M\left\{\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)\right\}=\sum_{l=1}^{m}D_{pl}^{(i)}c_{il}+O\left(\frac{1}{\sqrt{N-3}}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{l=1}^{m}D_{pl}^{(i)}c_{il}.\tag{20}$$

Вычислим теперь асимптотическую ковариационную функцию этих процессов, то есть

$$R_N(\vec{c},\vec{c}\,')=\mathrm{cov}(\eta_{ip}(N,\vec{c}),\eta_{ip}(N,\vec{c}\,')).\tag{21}$$

Представим отдельное слагаемое в (19) в виде

$$\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}_i)=\frac{1}{\sqrt{N-3}}\mathrm{sign}\left(n_t^{(i)}+\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}-\frac{1}{\sqrt{N-3}}\sum_{r=1}^{m}c_{ir}y_{t-1}^{(r)}\right)\times$$
$$\times\mathrm{sign}(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)}),\tag{22}$$

где $y_{t-1}^{(r)}=x_{t-1}^{(r)}+\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}$.

Усредняя это выражение по $n_t^{(i)}$, получим

$$M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}_i)\right\}=\frac{1}{\sqrt{N-3}}\left(1-2F_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}\right)-\frac{1}{\sqrt{N-3}}\sum_{r=1}^{m}c_{ir}y_{t-1}^{(r)}\right)\times$$
$$\times\mathrm{sign}(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)}),\tag{23}$$

где $F_i(\cdot)$ – функция распределения величины $n_t^{(i)}$. Заметим, что $F_i(\cdot)$ – гладкая функция. Разлагая ее в ряд Тейлора, получим

$$M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}_i)\right\}=\frac{1}{\sqrt{N-3}}\left(1-2F_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}\right)\right)\mathrm{sign}(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)})-$$

$$-\frac{2}{N-3}p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}\right)\sum_{s=1}^{m}c_{is}\left(x_{t-1}^{(s)}+\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(s)}\right)\mathrm{sign}(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)})+O\left(\frac{1}{(N-3)^{3/2}}\right).$$

Заметим, что $1-2F_i(\cdot)$ – нечетная по аргументу функция. Поэтому после усреднения по $z_t^{(i)}$ и $z_{t-1}^{(i)}$ первое слагаемое обратится в ноль и

$$M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}_i)\right\}=-\frac{2}{N-3}M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}\right)\right\}\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{m}c_{is}M\left\{x_{t-1}^{(s)}\,\mathrm{sign}(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)})\right\}+O\left(\frac{1}{(N-3)^{3/2}}\right),\qquad(24)$$

где учтено, что

$$M\left\{p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\sum_{r=1}^{m}b_{ir}\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(r)}\right)z_{t-1}^{(s)}\right\}=0$$

в силу нечетности по z усредняемого выражения.

Таким образом, $M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}_i)\right\}$ убывает как $1/(N-3)$.

Возвращаясь к искомой ковариационной функции, можно записать

$$R_N(\vec{c},\vec{c}')=\frac{1}{N-3}\sum_{t,l=3}^{N}M\left\{\left(\eta_{ip}^{(t)}(\vec{c})-M\left\{\left(\eta_{ip}^{(t)}(\vec{c}\right)\right\}\right)\left(\eta_{ip}^{(l)}(\vec{c}')-M\left\{\left(\eta_{ip}^{(l)}(\vec{c}')\right\}\right)\right\}.\qquad(25)$$

Рассмотрим поведение отдельных групп слагаемых в этой двойной сумме.

а) Слагаемые с $t = l$. Соответствующая часть суммы из (25) имеет вид

$$\sum_{t=3}^{N}\left(M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}')\right\}-M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\right\}M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c}')\right\}\right).\qquad(26)$$

Но, как видно из (22), $\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\sim 1/\sqrt{N-3}$. Поэтому сумма (26) принимает вид

$$1-\frac{1}{N-3}\sum_{s,s'=1}^{m}c_{is}c_{is'}R_{iss'}+O\left(\frac{1}{N-3}\right),\qquad(27)$$

где $R_{iss'}$ – некоторые коэффициенты, которые легко выписать явно, используя (24). Для нас же важно то, что при $N\to\infty$ сумма (27) стремиться к 1 и в пределе зависимость от c_{is} и $c_{is'}$ исчезает.

б) Слагаемые с $|t-l| = 1$ или $|t-l| = 2$.

Рассмотрим для примера слагаемые с $|t-l| = 1$.Соответствующая группа слагаемых имеет вид

$$\sum_{t=3}^{N}\left(M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\eta_{ip}^{(t-1)}(N,\vec{c}')\right\}-M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\right\}M\left\{\eta_{ip}^{(t-1)}(N,\vec{c}')\right\}\right).\qquad(28)$$

Так как $n_t^{(i)}$ и $n_{t-1}^{(i)}$ независимы, то, производя усреднение по ним, получим

$$M_n\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\eta_{ip}^{(t-1)}(N,\vec{c}')\right\}=$$

$$=\frac{1}{N-3}\left[1-2F_i\left(\gamma_t z_t^{(i)}-\gamma_{t-1}\sum_{r=1}^m b_{ir}z_{t-1}^{(r)}-\frac{1}{\sqrt{N-3}}\sum_{r=1}^m c_{ir}y_{t-1}^{(r)}\right)\right]\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)}+\gamma_{t-2}z_{t-2}^{(p)}\right)\times$$

$$\times\left[1-2F_i\left(\gamma_{t-1}z_{t-1}^{(i)}-\gamma_{t-2}\sum_{r=1}^m b_{ir}z_{t-2}^{(r)}-\frac{1}{\sqrt{N-3}}\sum_{r=1}^m c'_{ir}y_{t-2}^{(r)}\right)\right]\operatorname{sign}\left(x_{t-3}^{(p)}+\gamma_{t-3}z_{t-3}^{(p)}\right). \quad (29)$$

Не вычисляя явно это выражение, оценим порядок получающихся слагаемых.

Так как $F_i(\cdot)$ – гладкие функции, то это выражение можно разложить в ряд по c_{ir}, c'_{ir}. Слагаемые, не содержащие c_{ir}, будут равны $D/(N-3)$, где D – некоторая константа, и поэтому в сумме (28) также дадут некоторую константу. Слагаемые, содержащие c_{ir} или c'_{ir} в первой степени, будут иметь порядок $c_{ir}/(N-3)^{3/2}$ и поэтому в сумме (28) дадут слагаемые, убывающие как $1/\sqrt{N-3}$. При $N\to\infty$ эти слагаемые исчезнут.

Последующие слагаемые от $M\left\{\eta_{ip}^{(t)}(N,\vec{c})\right\}M\left\{\eta_{ip}^{(t-1)}(N,\vec{c}')\right\}$ будут иметь порядок $1/(N-3)^2$ и в пределе $N\to\infty$ также обратятся в ноль.

Аналогичные рассуждения верны также для слагаемых с $l=t\pm 1$ и $l=t\pm 2$. Поэтому соответствующие суммы после предельного перехода стремятся к некоторой константе, не зависящей от c_{ir}, c'_{ir}.

в) Слагаемые с $|t-l|>2$.

Прежде всего отметим что, в силу стационарности процесса x_t эти слагаемые зависят лишь от $k=|t-l|$ и соответствующие слагаемые имеют вид $\sum\limits_{|t-l|\ge 3} f(|t-l|)$.

Переходя к величине $k=|t-l|$, приведем эту сумму к виду

$$\sum_{|t-l|\ge 3} f(|t-l|)=2\sum_{k=3}^{N-3}(N-3-k)f(k)=\frac{2}{N-3}\sum_{k=3}^{N-3}(N-3-k)(N-3)f(k). \quad (30)$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=3}^{N}(N-3)^2 f(k)$ конечен, то тем самым докажем, что соответствующие слагаемые стремятся к нулю как $1/(N-3)$ при $N\to\infty$.

Заметим, что при $|t-l|\ge 3$ в выражениях, определяющих $\eta_{ip}^{(t)}$ и $\eta_{ip}^{(l)}$, независимы не только $n_t^{(i)}$ и $n_t^{(l)}$, но и z_t, z_{l-2}, z_{t-2}, и z_l, z_{l-2}, z_{t-2}. Поэтому при вычислении $M\left\{\eta_{ip}^{(t)}\eta_{ip}^{(l)}\right\}$ усреднение по n и z можно в каждом случае проводить отдельно.

Используя (23) и разлагая это выражение в ряд по c_{ir} до членов с c_{ir}^2, получим

$$M\left\{\eta_{ip}^{(t)}\right\}=\frac{I_t^{(0)}}{\sqrt{N-3}}+\frac{I_t^{(1)}\sum\limits_{s=1}^m c_{is}y_{t-1}^{(s)}}{N-3}+\frac{I_t^{(2)}\left(\sum\limits_{s=1}^m c_{is}y_{t-1}^{(s)}\right)^2}{(N-3)^{3/2}}+\ldots, \quad (31)$$

где $$I_t^{(0)} = \left[1 - 2F_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)}\right)\right]\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right),$$

$$I_t^{(1)} = 2p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)}\right)\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right), \tag{32}$$

$$I_t^{(2)} = -2p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)}\right)\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right).$$

Усредняя по z_t , получим, что $M\left\{ I_t^{(0)} \right\} = 0$. Поэтому после усреднения еще и по z_t получим

$$M_{n,z}\left\{\eta_{ip}^{(t)}\eta_{ip}^{(l)}\right\} = \frac{M\left\{ I_t^{(1)}\right\} M\left\{ I_l^{(1)}\right\}}{(N-3)^2}\sum_{s,s'=1}^{m} c_{is}c_{is'} y_{t-1}^{(s)} y_{l-1}^{(s')} + o\left(\frac{1}{(N-3)^2}\right), \tag{33}$$

так как остальные слагаемые дают величины порядка $1/(N-3)^3$. Поэтому

$$M_{n,z}\left\{\eta_{ip}^{(t)}\eta_{ip}^{(l)}\right\} = \frac{M\left\{2p_i\left(\gamma_t z_t^{(i)} - \gamma_{t-1}\sum_{r=1}^{m} b_{ir} z_{t-1}^{(r)}\right)\right\}}{(N-3)^2}\sum_{s,s'=1}^{m} c_{is}c_{is'} K_{ss'}, \tag{34}$$

где $$\hat{K}_{ss'} = M_z\left\{ x_{t-1}^{(s)}\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right) x_{l-1}^{(s')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right)\right\},$$

и где учтено, что $M\{z_{t-1}^{(s)}\} = M\{z_{l-1}^{(s)}\} = 0$. В силу этого, с точностью до постоянного сомножителя,

$$f(k)(N-3)^2 = \sum_{s,s'=1}^{m} c_{is}c_{is'}\hat{K}_{ss'}, \tag{35}$$

где

$$\hat{K}_{ss'}(|t-l|) = M\left\{\left[x_{t-1}^{(s)}\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right) - M\left\{x_{t-1}^{(s)}\operatorname{sign}\left(x_{t-2}^{(p)} + \gamma_{t-2} z_{t-2}^{(p)}\right)\right\}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[x_{l-1}^{(s')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right) - M\left\{x_{l-1}^{(s')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right)\right\}\right]\right\}. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение $\hat{K}_{ss'}(k)$ при $k\to\infty$. Пусть, например, $l \ge 3$. Тогда легко видеть, что

$$M_{x_{l-1}}\left\{x_{l-1}^{(s')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right)\right\} = \sum_{r'=1}^{m} b_{s'r'} x_{l-2}^{(r')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right).$$

Усредняя еще и по z_{l-2}, получим

$$M_{x,z}\left\{x_{l-1}^{(s')}\operatorname{sign}\left(x_{l-2}^{(p)} + \gamma_{l-2} z_{l-2}^{(p)}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{r'=1}^{m} b_{s'r'} x_{l-2}^{(r')}\left[(1-p)\operatorname{sign} x_{l-2}^{(p)} + p\left[1 - 2F_z\left(x_{l-2}^{(p)}\right)\right]\right] = \varphi(x_{l-2}), \tag{37}$$

где $x_{l-2} = \left[x_{l-2}^{(1)}, x_{l-2}^{(2)}, \ldots, x_{l-2}^{(m)}\right]^T$. Заметим, что $\varphi(x_{l-2})$ растет на бесконечности не быстрее, чем первая степень компонента x_{l-2}.

Представим совместную плотность вероятностей величин x_{l-2}, x_{t-1}, x_{t-2} в виде

$$p(x_{l-2}, x_{t-1}, x_{t-2}) = p\left(x_{l-2} \mid x_{t-1}\right) p(x_{t-1}, x_{t-2}) . \quad (38)$$

Тогда легко заметить, что вычисление величин $K_{ss'}(l-t)$ сведется к вычислению интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_{t-1},x_{t-2})\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_{l-2})(p(x_{l-2}\,|\,x_{t-1})-p(x_{l-2}))dx_{l-2}\right]p(x_{t-1},x_{t-2})dx_{t-1}dx_{t-2}\,, \quad (39)$$

где $p(x_{l-2})$ – безусловная плотность вероятностей величин x_{l-2}, а $\psi(x_{t-1}, x_{t-2})$ – некоторая функция, растущая на бесконечности не быстрее первой степени x_{t-1}.

Учитывая нормальность процесса n_t, можно записать

$$p\left(x_{l-2}\,|\,x_{t-1}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det R_k}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x_{l-2}-B^{k-1}x_{t-1})^T R_k^{(-1)}(x_{l-2}-B^{k-1}x_{t-1})\right), \quad (40)$$

где $k = |\, l-t \,|$ и

$$R_k = Rn + BRnB^T + \ldots + B^{k-2}Rn(B^T)^{k-2}\,, \quad (41)$$

а

$$p(x_{l-2}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det Rx}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_{l-2}^T \cdot Rx \cdot x_{l-2}\right). \quad (42)$$

Разлагая $p\left(x_{l-2} \mid x_{t-1}\right) - p(x_{l-2})$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в слагаемом со второй производной можно получить, что

$$p\left(x_{l-2} \mid x_{t-1}\right) - p(x_{l-2}) = p(x_{l-2})\left[x_{l-2}^T B^k x_{t-1} + B^{2k-2}X(x_{l-2}, x_{l-1})\right], \quad (43)$$

где $X(x_{l-2}, x_{l-1})$ – матрица с элементами, растущими не быстрее, чем вторая степень от x_{l-1}, x_{l-2}. Поэтому при вычислении $\hat{K}_{ss'}(|\,l-t\,|)$ получится, что они имеют вид

$$\hat{K}_{ss'}(k) = \sum_{ij} b_{ij}^{(k)} A_{ij} = \mathrm{Sp}(B^k A)\,, \quad (44)$$

где A – некоторая ограниченная матрица.

В силу того, что, по определению, все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы, получим, что

$$\sum_{k=3}^{\infty} \hat{K}_{ss'}(k) = \mathrm{Sp}\left(\sum_{k=3}^{\infty} B^k A\right) < +\infty\,,$$

так как ряд $\sum_{k=3}^{\infty} B^k$ сходится. В силу этого сходится и ряд (30), и тем самым доказывается, что последняя группа слагаемых стремится к нулю при $N \to \infty$.

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. При $N \to \infty$ имеет место следующая среднеквадратическая сходимость:

$$\eta_{ip}(N, \vec{c}_i) - \eta_{ip}(N, \vec{c}_i') \xrightarrow{\text{ср. кв.}} \sum_{l=1}^{m} D_{pl}^{(i)}(c_{il} - c_{il}')\,. \quad (45)$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$M\left\{\left[\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)-\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i)-M\{\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)\}+M\{\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i)\}\right]^2\right\}=$$
$$=\operatorname{cov}\left(\eta_{ip}(N,\vec{c}_i),\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)\right)-2\operatorname{cov}\left(\eta_{ip}(N,\vec{c}_i),\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i)\right)+$$
$$+\operatorname{cov}\left(\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i),\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i)\right). \tag{46}$$

Но как только что мы показали, что при $N\to\infty$ все указанные в (46) ковариации стремятся к некоторой константе, не зависящей от c_i и c'_i. Обозначив эту константу через E_{ip}, получим, что выражение (46) стремится к $E_{ip}-2E_{ip}+E_{ip}=0$. Так как, в свою очередь, при $N\to\infty$ согласно (20)

$$M\left\{\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)-\eta_{ip}(N,\vec{c}\,'_i)\right\}\to\sum_{l=1}^{m}D_{pl}^{(i)}(c_{il}-c'_{il}),$$

то отсюда и следует доказываемое утверждение.

Теорема 2. При $N\to\infty$ величины Δb_{il} распределены асимптотически так же, как величины $D^{(i)(-1)}\vec{\xi}_i$.

Доказательство. Действительно, из только что доказанной теоремы следует, что при $N\to\infty$ величины $\eta_{ip}(N,\vec{c})$ распределены так же, как и величины

$$\eta_{ip}(N,0)+\sum_{l=1}^{m}D_{pl}^{(i)}c_{il}.$$

Поэтому условие $\eta_{ip}(N,\vec{c}_i)=0$, определяющее $\vec{c}_i$, превращается в систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{m}D_{pl}^{(i)}c_{il}=-\eta_{ip}(N,0),$$

или, в матричном виде,

$$D^{(i)}\vec{c}_i=-\eta(N,0).$$

Но заметим, что $\eta_i(N,0)$ есть не что иное, как $\xi_i\sqrt{N-3}$, а $\vec{c}_i$ есть $\Delta\vec{b}_i\sqrt{N-3}$. В силу этого при $N\to\infty$, в смысле сходимости по распределению, величина $D^{(i)}\Delta\vec{b}_i$ распределена так же, как и величина ξ_i. Это позволяет найти асимптотическую ковариационную матрицу величин $\Delta\vec{b}_i$. Действительно, в этом случае $\Delta\vec{b}_i=D^{(i)(-1)}\vec{\xi}_i$, и тогда

$$M\left\{\Delta\vec{b}_i\Delta\vec{b}_j^T\right\}=D^{(i)(-1)}M\left\{\vec{\xi}_i\vec{\xi}_j^T\right\}D^{(i)(-1)T}. \tag{47}$$

Используя явные выражения для матриц $D^{(i)}$ и $M\left\{\vec{\xi}_i\vec{\xi}_j^T\right\}$, можем теперь вычислять значения ковариационной матрицы $M\left\{\Delta\vec{b}_i\Delta\vec{b}_j^T\right\}$.

В [4] приводятся результаты сравнительного анализа данных алгоритмов. В частности, там указывается, что в отсутствие искажений наблюдаемых данных устойчивый алгоритм увеличивает дисперсию оценок параметров динамической системы в 2,46 раза. Но этот недостаток компенсируется тем, что при искажениях данных наблюдений ковариационная матрица $M\left\{\Delta\vec{b}_i\Delta\vec{b}_j^T\right\}$ устойчивого алгоритма практически не изменяется, в то время как для неустойчивого алгоритма соответствующая ковариационная матрица сильно возрастает (в связи с ростом слагаемого εRz). И в этом случае устойчивый алгоритм дает значительно меньшие дисперсии ошибок.

Заключение

Итак, если наблюдения над динамической системой искажены, то кросскорреляционный алгоритм обработки данных является неустойчивым. Алгоритм, основанный на методе наименьших модулей, приводит к смещенным оценкам. Аналитически показана устойчивость знакового алгоритма к подобным искажениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Идрисов Ф.Ф.*, *Терпугов А.Ф.* Оценка параметров динамических систем при искаженных наблюдениях // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 4(9). С.52 – 59.
2. *Морозов В.А.* Оценивание параметров линейных динамических систем с неопределенными наблюдениями // Автоматика и телемеханика. 1984. № 4. С. 84 – 94.
3. *Васильев В.А.*, *Конев В.В.* Последовательное оценивание параметров динамических систем при наличии мультипликативной и аддитивной помех в наблюдениях // Автоматика и телемеханика. 1985. № 6. С. 33 – 44.
4. *Идрисов Ф.Ф.* Оценка параметров многомерной авторегрессионной модели при наличии аномальных ошибок // Изв. вузов. Физика. 1993. Т. 36. № 12. С. 86 – 92.

Идрисов Фарит Фатыхович
Томский государственный педагогический университет
E-mail: farit.idrisov@mail.ru
Поступила в редакцию 9 сентября 2009 г.