УДК 369:519.2

Г.М. Кошкин, Н.В. Ланкина

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕТТО-ПРЕМИЙ ДЛЯ ОТСРОЧЕННОГО СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ[1]

Рассматривается задача оценивания нетто-премии в условиях отсроченного на r лет страхования жизни. Синтезируется непараметрическая оценка нетто-премии, находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценки и ее предельное распределение.

Ключевые слова: *нетто-премия, страхование жизни, асимптотические свойства, непараметрические оценки.*

На практике расчет нетто-премии зависит от вида страхования жизни [1 – 3], а также от того, к какой категории или возрастной группе относится индивид.

Ранее в работах [4,5] в условиях непараметрической неопределенности изучались оценки нетто-премий для различных видов индивидуального страхования, а в [6,7] – в случае коллективного страхования. В данной работе рассматривается задача оценивания нетто-премий для отсроченного на r лет страхования жизни. Суть такого вида страхования заключается в следующем. Человек заключает договор страхования, выплата по договору производится в момент смерти застрахованного бенефициарию, если она произошла после r-летнего срока с момента заключения договора, либо не выплачивается, если застрахованный умрет в эти r лет. В этом случае при расчетах премий за риск учитывается динамика ценности денег, основанная на процентной ставке δ с непрерывно начисляемым процентом по вкладу.

При расчете нетто-премии используется остаточное время жизни $T(x)=T-x$, которое характеризуется функцией распределения [2, с. 25 – 27]

$$F_x(t) = \mathrm{P}(T(x) < t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$

и плотностью распределения

$$f_x(t) = \frac{d}{dt} F_x(t) = -\frac{d}{dt} S_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)}, 0 \le t < \infty,$$

где $S(x) = 1 - F(x)$ и $F(x)$ – функции выживания и распределения продолжительности жизни T, а $f(x) = F'(x) = -S'(x)$ – её плотность распределения.

Определим для отсроченного на r лет страхования жизни современную величину страховой выплаты z:

$$z = \begin{cases} 0, & T(x) \le r, \\ e^{-\delta T(x)}, & T(x) > r, \end{cases} \qquad (1)$$

где δ обозначает банковскую процентную ставку. Величина z показывает настоящую долю будущей страховой выплаты, принимаемой за условную единицу. Чем

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-08-00595-а).

больше срок страхования, тем меньше выплаты застрахованного за счет использования банковской процентной ставки.

В качестве нетто-премии для отсроченного на r лет страхования возьмем математическое ожидание величины (1):

$$ {}_{r|}\overline{A}_x(\delta) = \mathrm{M}(z) = \frac{1}{S(x)} \int_r^{\infty} e^{-\delta t} f(x+t)dt = \frac{\Phi_r(x,\delta)}{S(x)}, \tag{2} $$

где $$ \Phi_r(x,\delta) = \int_r^{\infty} e^{-\delta t} f(x+t)dt = e^{-\delta x} \int_{x+r}^{\infty} e^{-\delta t} dF(t). $$

1. Оценка подстановки нетто-премии

Пусть имеется случайная выборка продолжительности жизни $X_1,...,X_N$, по которой необходимо оценить нетто-премию. Оценим отдельно числитель и знаменатель в (2).

Воспользуемся вместо неизвестных $F(x)$ и $S(x)$ их непараметрическими оценками: эмпирическими функцией распределения

$$ F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(X_i < x) $$

и функцией выживания

$$ S_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{I}(X_i \geq x), $$

где $\mathrm{I}(A)$ – индикатор события A.

Подставив $F_N(x)$ и $S_N(x)$ в выражения для нетто-премии (2), получим следующую оценку подстановки:

$$ {}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) = \frac{e^{\delta x}}{S_N(x) \cdot N} \sum_{i=1}^{N} \exp(-\delta X_i)\mathrm{I}(r + x < X_i < \infty) = \frac{\Phi_{r,N}(x,\delta)}{S_N(x)}. \tag{3} $$

2. Среднеквадратическая ошибка оценки

Найдем главную часть асимптотической среднеквадратической ошибки (СКО) и порядок смещения оценки (3). Для этого нам понадобится теорема 1 из [5], которую ниже сформулируем в виде леммы.

Введем обозначения согласно [5]: $t_N = (t_{1N}, t_{2N}, ..., t_{sN})^{\mathrm{T}}$ – s-мерная векторная статистика с компонентами $t_{jN} = t_{jN}(x) = t_{jN}(x; X_1,...,X_N), j = \overline{1,s}, x \in R^{\alpha}$, R^{α} – α-мерное евклидово пространство; функция $H(t): R^s \to R^1$, где $t = t(x) = = (t_1(x),...,t_s(x))^{\mathrm{T}}$ – s-мерная ограниченная вектор-функция; $\mathrm{N}_s(\mu,\sigma)$ – s-мерная нормально распределенная случайная величина с вектором средних $\mu = \mu(x)$ и ковариационной матрицей $\sigma = \sigma(x)$;

$$ \nabla H(t) = (H_1(t),...,H_s(t))^{\mathrm{T}}, \quad H_j(t) = \left. \frac{\partial H(z)}{\partial z_j} \right|_{z=t}, \ j = \overline{1,s}; $$

$\Rightarrow$ – знак сходимости по распределению (слабой сходимости); $\|x\|$ – евклидова норма вектора x.

Лемма. Пусть:

1. Функция $H(t)$ дважды дифференцируема, причем $\nabla H(t) \neq 0$;

2. $\mathrm{M}\|t_N - t\|^i = \mathrm{O}(d_N{}^{-i/2}),\ i = 1, 2, ...$

Тогда $\forall k = 1, 2, ...$

$$\left|\mathrm{M}[H(t_N) - H(t)]^k - \mathrm{M}[\nabla H(t)\cdot(t_N - t)]^k\right| = \mathrm{o}(d_N{}^{-(k+1)/2}). \tag{4}$$

В формуле (4) при k=1 получаем главную часть смещения оценки $H(t_n)$, а при $k = 2$ – её СКО.

Теорема 1. Если $S(x)$>0 , $S(t)$ – непрерывна в точке x, то:

1. $\mathrm{M}\left|{}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta)\right| = \mathrm{o}(N^{-1})$;

2. СКО

$$u^2({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta)) = \mathrm{M}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta))^2 = \frac{\sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta))}{N} + \mathrm{o}(N^{-3/2}), \tag{5}$$

где $\sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta))$ определяется по формуле (6).

Доказательство. Для оценки ${}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta)$, задаваемой формулой (5), в обозначениях приведенной выше леммы имеем

$$t_N = (\Phi_{r,N}(x,\delta), S_N(x))^{\mathrm{T}};\ \ d_N = N;\ \ t = (\Phi_r(x,\delta), S(x))^{\mathrm{T}};$$

$$H(t) = \frac{\Phi_r(x,\delta)}{S(x)} = {}_{r|}\overline{A}_x(\delta);\ \ H(t_N) = \frac{\Phi_{r,N}(x,\delta)}{S_N(x)} = {}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta);$$

$$\nabla H(t) = (H_1(t), H_2(t))^T = \left(\frac{1}{S(x)}, -\frac{\Phi_r(x,\delta)}{S^2(x)}\right)^T \neq 0.$$

В [2] показано, что $S_N(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $S(x)$. Покажем, что $\Phi_{r,N}(x,\delta)$ является несмещенной оценкой функционала $\Phi_r(x,\delta)$:

$$\mathrm{M}\Phi_{r,N}(x,\delta) = \frac{e^{\delta x}}{N}\mathrm{M}\left\{\sum_{i=1}^{N}\exp(-\delta X_i)\mathrm{I}(r + x \le X_i < \infty)\right\} = \Phi_r(x,\delta).$$

Теперь для оценки $\Phi_{r,N}(x,\delta)$ вычислим дисперсию:

$$D\Phi_{r,N}(x,\delta) = D\left\{\frac{e^{\delta x}}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{I}(r + x \le X_i < \infty)e^{-\delta X_i}\right\} = \frac{e^{2\delta x}}{N^2}\sum_{i=1}^{N}D\left\{\mathrm{I}(r + x \le X_i < \infty)e^{-\delta X_i}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\Phi_r(x, 2\delta) - \Phi_r{}^2(x,\delta)\right).$$

Известно, что отношение двух несмещенных оценок может иметь смещение. Нахождение смещения отношения, как правило, является сложной задачей и требует использования результатов работы [5]. Найдем порядок смещения оценки.

Так как $\mathrm{M}(t_N - t) = 0$, то

$$\left|\mathrm{M}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta)) - \mathrm{M}\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]\right| = \left|\mathrm{M}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta))\right| = \mathrm{o}(N^{-1}).$$

Найдем компоненты ковариационной матрицы статистики t_N :

$$\sigma_{11} = ND\left\{\Phi_{r,N}(x,\delta)\right\} = \Phi_r(x,2\delta) - \Phi_r{}^2(x,\delta);$$

$$\sigma_{22} = ND\{S_N(x)\} = S(X)(1 - S(x));$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = N\operatorname{cov}(S_N(x), \Phi_{r,N}(x,\delta)) =$$

$$= N(\mathrm{M}\left\{S_N(x)\Phi_{r,N}(x,\delta)\right\}) - \mathrm{M}\{S_N(x)\}\,\mathrm{M}\left\{\Phi_{r,N}(x,\delta)\right\} = (1 - S(x))\Phi_r(x,\delta).$$

Используя предыдущий результат о смещении и найденную ковариационную матрицу, получаем СКО оценки:

$$u^2({}_{r|}\overline{A}_{x:n}^N) = \mathrm{M}\left[\nabla H(t)(t_N - t)\right]^2 + \mathrm{O}(N^{-3/2}) = \frac{\sigma({}_{r|}\overline{A}_{x:n})}{N} + \mathrm{O}(N^{-3/2}),$$

где

$$\sigma({}_{r|}\overline{A}_{x:n}) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} H_j(t)\sigma_{jp}H_p(t) = H_1^2(t)\sigma_{11} + H_2^2(t)\sigma_{22} + 2H_1(t)H_2(t)\sigma_{12} =$$

$$= \frac{\Phi_r(2\delta)}{S^2(x)} - \frac{3\Phi_r{}^2(x,\delta)}{S^3(x)} + \frac{2\Phi_r{}^2(x,\delta)}{S^2(x)}. \qquad (6)$$

Теорема доказана.

3. Асимптотическая нормальность оценки

Для нахождения предельного распределения оценки (3) нам понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 2 (центральная предельная теорема в многомерном случае) [3, с. 178 – 202]. Если $t_1, t_2, ..., t_N, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных s-мерных векторов,

$$\mathrm{M}\{t_s\} = 0, \sigma(x) = \mathrm{M}\{t_s{}^T t_s\},$$

$$S_N = \sum_{s=1}^{N} t_s,$$

то при $N \to \infty$
$$\frac{S_N}{\sqrt{N}} \Rightarrow \mathrm{N}_s(0, \sigma(x)).$$

Теорема 3 (об асимптотической нормальности $H(t_N)$) [5]. Пусть:

1. $\sqrt{N}\cdot t_N \Rightarrow \mathrm{N}_s\{\mu, \sigma(x)\}$;

2. Функция $H(z)$ дифференцируема в точке μ, $\nabla H(\mu) \neq 0$.

Тогда $\sqrt{N}(H(t_N) - H(\mu)) \Rightarrow \mathrm{N}_1\left\{\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\mu_j, \sum_{p=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} H_j(\mu)\sigma_{jp}H_p(\mu)\right\}$.

Теорема 4 (о предельном распределении оценки (3)). В условиях теоремы 1

$$\sqrt{N}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta)) \Rightarrow \mathrm{N}_1(0, \sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta))).$$

Доказательство. В обозначениях теоремы 2 имеем: $s = 2, \sigma(x) = \sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta))$. Таким образом,

$$\sqrt{N}\left\{(\Phi_{r,N}(x,\delta), S_N(x)) - t\right\} \Rightarrow N_2\left(0, \sigma\left({}_{r|}A_x(\delta)\right)\right),$$

где

$$\sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta)) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{12} \\ \sigma_{21}\sigma_{22} \end{bmatrix}.$$

Функция $H(z)$ дифференцируема в точке t и $\nabla H(t) \neq 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 3 и для оценки нетто-премии получаем $\sqrt{N}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta)) \Rightarrow \mathrm{N}_1(0, \sigma({}_{r|}\overline{A}_x(\delta)))$. Теорема доказана.

4. Статистическое моделирование

Рассмотрим модель де Муавра для отсроченного на r лет страхования жизни. Для этой модели продолжительность жизни T индивида распределена равномерно в пределах от 0 до $\omega - r$, где $\omega - r$ – предельный возраст, при котором можно застраховаться на r лет.

Для закона де Муавра плотность и функция выживания вычисляются соответственно по формулам

$$f(x) = \frac{1}{\omega}, \quad S(x) = 1 - \frac{x}{\omega}.$$

Нетто-премия, согласно (3), принимает вид

$${}_{r|}\overline{A}_x(\delta) = \frac{1}{S(x)}\int_r^{\omega} e^{-\delta t} f(x+t)dt = \frac{e^{-\delta r} - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}. \tag{7}$$

Оценку нетто-премии построим по выборке объема N независимых случайных величин $X = (X_1, ..., X_N)$, равномерно распределенных на интервале $(0,\ \omega - r)$ с предельным возрастом $\omega = 120$. Изучим динамику изменения оценок нетто-премии для различных значений N. Качество оценки будем характеризовать величиной

$$U(N, r, \delta) = \frac{\sum_{x=1}^{\omega - r}({}_{r|}\overline{A}_x^N(\delta) - {}_{r|}\overline{A}_x(\delta))^2}{N}. \tag{8}$$

На рис. 1 представлены случаи отсроченного страхования жизни на 5 лет, когда банковская процентная ставка составляет 10 % годовых ($r = 5$, $\delta = 0{,}1$).

Для случаев, представленных на рис. 1, характеристики качества оценок:

$$U(50, 5, 0{,}1) = 0{,}0119,$$

$$U(100, 5, 0{,}1) = 0{,}0036,$$

$$U(300, 5, 0{,}1) = 0{,}0008.$$

т.е. во втором случае качество оценки, согласно критерию, улучшилось примерно в 3 раза.

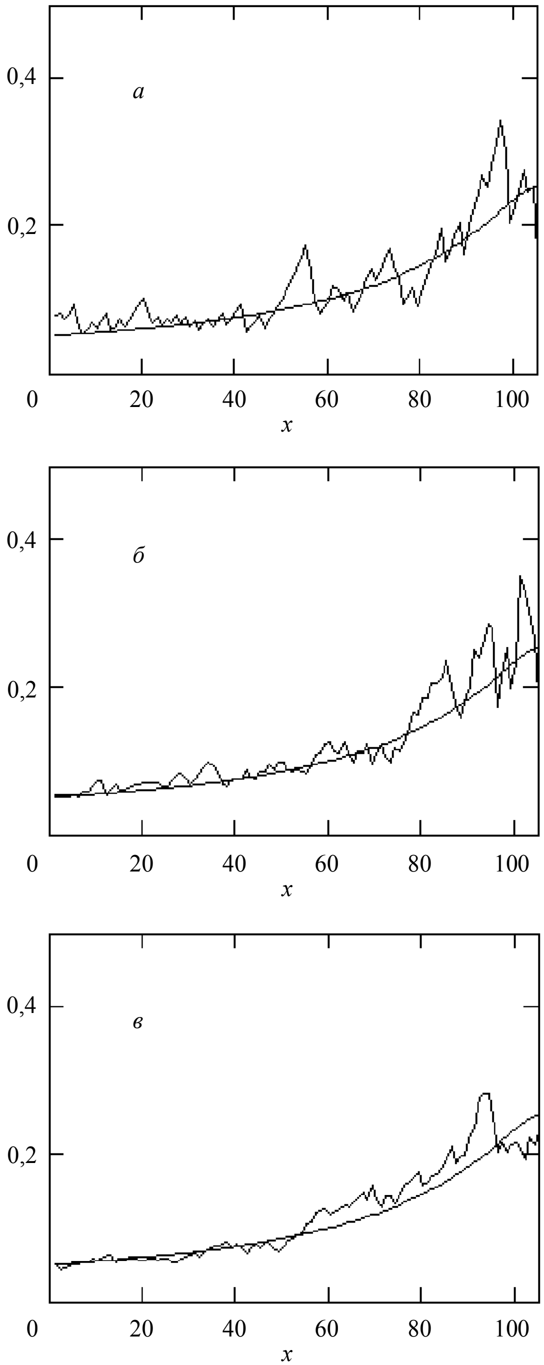

Рис. 1. Зависимость нетто-премии (сплошная кривая) и ее оценки (ступенчатая кривая) от возраста застрахованного x при объеме выборки N: *а* – 50; *б* – 100; *в* – 300

Результаты статистического моделирования (рис. 1) подтверждают состоятельность оценок нетто-премий. В случае *б* качество оценки, согласно критерию, улучшилось примерно в 3 раза, по сравнению со случаем *а*. В случае *в* качество оценки улучшилось примерно в 4,5 раза по сравнению со случаем *б* и примерно в 14 раз по сравнению со случаем *а*.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача непараметрического оценивания нетто-премий для отсроченного на r лет страхования жизни. Заметим, что рассмотренный подход к оцениванию нетто-премий можно распространить на другие виды страхования, такие, как смешанное в рамках коллективного страхования жизни, отсроченное коллективное страхование жизни, пенсионное страхование, страхование вкладов трудоспособного населения для получения негосударственных пенсий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowers N.L*, *Gerber H.U.*, *Hickman J.C.*, *Jones D.* Atuarial Mathematics. // Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986. 624 p.
2. *Фалин Г.И*, *Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. М.: МГУ, 1994. 86 с.
3. *Кошкин Г.М.* Введение в математику страхования жизни. Томск: ТГУ, 2004. 112 с.
4. *Кошкин Г.М*, *Лопухин Я.Н.* Оценивание нетто-премий в моделях долгосрочного страхования жизни // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. Вып. 2. С. 315 – 329.
5. *Кошкин Г.М.*, *Ланкина Н.В.* Непараметрическое оценивание нетто-премий для смешанного страхования жизни // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 314. № 5. С. 236 – 240.
6. *Lopukhin Ya.N.*, *Koshkin G.M.* On estimation of net premium in collective life insurance // The 5th Korea-Russian International Symposium on Science and Technology. Proceedings. KORUS 2001. Vol.2. Tomsk: Tomsk Polytechnic University. P. 296-299.
7. *Koshkin G.M.*, *Lopukhin Ya.N.* Estimation of Net Premiums in Collective Models of Life Insurance // Proc. of the 11th Annual Intern. AFIR Colloquium. 2001. V. 2. Toronto, Ontario Canada. P. 447 – 457.
8. *Боровков А.А*. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с
9. *Кошкин Г.М.* Моменты отклонения оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сибирский математический журнал.1999. Т. 40. № 3. С. 604 – 618.

Кошкин Геннадий Михайлович
Ланкина Наталья Вадимовна
Томский государственный университет
E-mail: kgm@mail.tsu.ru; Lankina_Nata@mail.ru

Поступила в редакцию 7 октября 2009 г.