УДК 519.865

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ[1]

Найдена вероятность разорения страховой компании в стационарном режиме при дважды стохастическом потоке страховых выплат и малой нагрузке страховой премии.

Ключевые слова: *вероятность разорения*, *дважды стохастический поток*, *нагрузка страховой премии.*

Классическая модель страховой компании [1] строится в предположении, что основные характеристики, определяющие изменение капитала страховой компании: скорость поступления денежных средств c и интенсивность потока страховых выплат λ, – не зависят от времени. Однако эти характеристики могут изменяться за счет, например, сезонных изменений. Такая ситуация наблюдается, в частности, при страховании автотранспорта за счет изменения погодных условий и т.д. Характерной чертой при этом является то, что интенсивность потока страховых выплат скачкообразно меняет свое значение в случайные моменты времени. В данной работе находятся такие характеристики функционирования страховой компании, как вероятность ее разорения и условное среднее значение времени до разорения, когда моделью потока страховых платежей является дважды стохастический пуассоновский поток [2] с переменной интенсивностью $\lambda(t)$.

1. Математическая модель страховой компании

Итак, будем считать, что интенсивность потока страховых платежей $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t)=\lambda_i$ [3]. Переход из состояния в состояние задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $Q=\left[q_{ij}\right]$ ранга $n-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$P_{ij}(\Delta t)=q_{ij}\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)\,,\ i\neq j\,; \tag{1}$$

$$P_{ii}(\Delta t)=1+q_{ii}\Delta t+\mathrm{o}(\Delta t)\,,\ i=\overline{1,n}\,,$$

где $q_{ij}\geq 0$ при $i\neq j$ и

$$\sum_{j=1}^{n}q_{ij}=0\,. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009 – 2010 годы), проект № 4761.

Обозначим $P_i(t) = P\{\lambda(t) = \lambda_i\}, i = \overline{1,n}$. Если управляющая цепь является неразложимой, то существуют финальные вероятности

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t),$$

которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ji}\pi_j = 0; \tag{3}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n = 1. \tag{4}$$

Обозначим далее через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_i. \tag{5}$$

Будем считать, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\left\{x^k\right\} = a_k, k = 2,3$.

Наконец, в соответствии с классической моделью страховой компании будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью c, так что за время Δt приращение капитала за счет страховых премий равно $c\Delta t$.

Пусть $S(t)$ – капитал компании в момент времени t. Если значение интенсивности потока выплат в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_i$, то изменение капитала $\Delta S(t)$ компании за время Δt определится соотношением

$$\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t) = \begin{cases} c\Delta t, & \text{с вероятностью } 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \\ c\Delta t - x, & \text{с вероятностью } \lambda_i \Delta t \psi(x)dx + o(\Delta t), \end{cases} \tag{6}$$

где x – случайная страховая выплата за время Δt. Переходя в (6) к пределу при $\Delta t \to 0$ и усредняя, получим, что изменение среднего капитала компании $\overline{S}(t)$ определится уравнением

$$\dot{\overline{S}}(t) = c - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(t) a.$$

Откуда

$$\overline{S}(t) = S(0) + (c - \lambda_0 a)t + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a \int_0^t (\pi_i - P_i(z))dz. \tag{7}$$

Из выражения (7) следует, что при $t \gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$c = (1+\theta)\lambda_0 a, \tag{8}$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется. Параметр θ, как и в классической модели, – нагрузка страховой премии.

2. Уравнения для вероятностей разорения и выживания

Пусть $T=\inf\{t:S(t)<0\}$ и $T=\infty$, если $S(t)>0\ \forall t$. Случайная величина T – момент разорения $[1]$. Обозначим через $p_i(s)=P\{T<\infty|S(0)=s,\lambda(0)=\lambda_i\}$ и $g_i(s)=P\{T=\infty|S(0)=s,\lambda(0)=\lambda_i\}$ – вероятности разорения и выживания страховой компании соответственно при условии, что в начальный момент времени ее капитал равен s и значение интенсивности $\lambda=\lambda_i$. Наконец, учитывая, что начальный капитал s и начальное состояние интенсивности не зависят друг от друга, обозначим

$$g(s)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i g_i(s),\quad p(s)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i p_i(s) \tag{9}$$

– вероятности разорения и выживания страховой компании при условии, что начальный капитал равен s.

Для вывода уравнений, определяющих $g_i(s)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t+\Delta t$. Пусть в момент времени t интенсивность $\lambda=\lambda_i$ и капитал компании равен $S-c\Delta t$. За время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1-\lambda_i\Delta t)(1+q_{ii}\Delta t)+o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется, страховые выплаты не производятся.

2. С вероятностью $\lambda_i\Delta t\psi(x)dx+o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется и производится случайная страховая выплата размера x.

3. С вероятностью $q_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$ происходит изменение интенсивности потока с λ_i на λ_j, страховая выплата не производится.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$g_i(s-c\Delta t)=(1-\lambda_i\Delta t)g_i(s)+\lambda_i\Delta t\int_0^s g_i(s-x)\psi(x)dx+\sum_{j=1}^{n}q_{ij}g_j(s)\Delta t+o(\Delta t).$$

Поделив левую и правую части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему уравнений

$$c\dot{g}_i(s)=\lambda_i g_i(s)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}g_j(s)-\lambda_i\int_0^s g_i(s-x)\psi(x)dx \tag{10}$$

с граничными условиями

$$\lim_{s\to\infty}g_i(s)=1, \tag{11}$$

так как при неограниченном росте начального капитала компания выживает с вероятностью единица при любом начальном состоянии интенсивности.

Соответствующие (10) уравнения для вероятностей разорения имеют вид

$$c\dot{p}_i(s)=\lambda_i p_i(s)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}p_j(s)-\lambda_i\int_0^s p_i(s-x)\psi(x)dx-\lambda_i\int_s^\infty\psi(x)dx \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\lim_{s\to\infty} p_i(s) = 0\,. \tag{13}$$

Для решения систем уравнений (11) или (13) можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$F_i(\omega) = \int_0^\infty g_i(s)e^{-\omega s}ds, \quad Y(\omega) = \int_0^\infty \psi(s)e^{-\omega s}ds$$

и пусть

$$X(\omega) = \frac{1-Y(\omega)}{\omega}\,.$$

Применяя преобразование Лапласа к системе (11, получим систему уравнений относительно $F_i(\omega)$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij}F_j(\omega) + \omega\left(c - \lambda_i X(\omega)\right)F_i(\omega) = cg_i(0)\,. \tag{14}$$

Для определения вероятностей выживания $g_i(s)$ нужно теперь решить систему уравнений (14) и вычислить обратные преобразования Лапласа.

Из соотношений (14) можно получить значение вероятности выживания $g(0)$ при нулевом начальном капитале. Умножая уравнения системы (14) на π_i и складывая уравнения, получим с учетом (3)

$$cg(0) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\left(c - \lambda_i X(\omega)\right)\omega F_i(\omega)\,. \tag{15}$$

Так как $X(0) = a$ и из $[4]$ $\lim_{\omega\to 0} \omega F_i(\omega) = \lim_{s\to\infty} g_i(s) = 1$, то переходя в (15) к пределу при $\omega \to 0$, получим, что

$$g(0) = \frac{c - \lambda_0 a}{c} = \frac{\theta}{1+\theta}\,. \tag{16}$$

Таким образом, как и в классической модели страховой компании $[1]$, вероятность выживания при нулевом начальном капитале зависит только от нагрузки страховой премии.

3. Вероятности разорения и выживания при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (10) или (12) не удается. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (12) будем искать в виде

$$p_i(s) = \frac{1}{1+\theta}\varphi_i(\theta s, \theta)\,. \tag{17}$$

Относительно функций $\varphi_i(z,\theta)$ будем предполагать, что они являются трижды дифференцируемыми по своим аргументам. Подставляя (17) в уравнения (12) и сделав замену переменной $\theta s = z$, получим уравнения относительно функций $\varphi_i(z,\theta)$;

$$c\theta\dot{\varphi}_i(z,\theta)=\lambda_i\varphi_i(z,\theta)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\varphi_j(z,\theta)-\lambda_i\int_0^{\frac{z}{\theta}}\varphi_i(z-\theta x,\theta)\psi(x)dx-\lambda_i(1+\theta)\int_{\frac{z}{\theta}}^{\infty}\psi(x)dx\,. \quad (18)$$

Обозначим

$$\varphi_i(z)=\lim_{\theta\to 0}\varphi_i(z,\theta)\,. \quad (19)$$

Переходя в (18) к пределу при $\theta\to 0$, получим, что

$$\sum_{j=1}^{n}q_{ij}\varphi_j(z)=0\,. \quad (20)$$

Так как по условию $Rang\left[q_{ij}\right]=n-1$, то из сравнения систем уравнений (2) и (20) получаем, что

$$\varphi_i(z)=\varphi(z)\quad\forall i\,, \quad (21)$$

где $\varphi(z)$ – неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $\varphi_i(z,\theta)$ в виде

$$\varphi_i(z,\theta)=\varphi(z)+B_i(z)\theta+o(\theta)\,. \quad (22)$$

Подставляя разложения (22) в уравнения (18), раскладывая $\varphi(z-\theta x)$ и $B_i(z-\theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ, получим, что

$$(\lambda_0-\lambda_i)a\theta\dot{\varphi}(z)+\theta\sum_{j=1}^{n}q_{ij}B_j(z)+o(\theta)=0\,.$$

Переходя к пределу при $\theta\to 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n}q_{ij}B_j(z)=(\lambda_i-\lambda_0)a\dot{\varphi}(z)\,. \quad (24)$$

Так как одновременно $\sum_{i=1}^{n}\pi_i q_{ij}=0$ и $\sum_{i=1}^{n}\pi_i(\lambda_i-\lambda_0)=0$, то система уравнений (23) совместна и имеет ранг $(n-1)$, как и система уравнений (3). Пусть матрица

$$R=\left[R_{ij}\right]=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \cdots & q_{n-1,n-1}\end{bmatrix}^{-1}. \quad (24)$$

Тогда решение системы (23) имеет вид

$$B_k(z)=-\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}q_{jn}B_n(z)+\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}(\lambda_j-\lambda_0)a\dot{\varphi}(z) \quad (25)$$

Из системы уравнений (2) имеем, что

$$q_{jn} = -\sum_{i=1}^{n-1} q_{ji} \ .$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{jn} = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} q_{ji} = -\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{kj} = -1 \ .$$

Откуда

$$B_k(z) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj}\left(\lambda_j - \lambda_0\right) a\dot{\varphi}(z) \ . \tag{26}$$

Представим теперь функции $\varphi_i(z,\theta)$ в виде

$$\varphi_i(z,\theta) = \varphi(z) + B_i(z)\theta + C_i(z)\theta^2 + o\left(\theta^2\right) . \tag{27}$$

Подставляя разложения (27) в уравнения (18), раскладывая $\varphi(z-\theta x)$, $B_i(z-\theta x)$ и $C_i(z-\theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2, получим, учитывая (18), что

$$\theta^2 \sum_{j=1}^{n} q_{ij} C_j(z) - \theta^2(\lambda_i - \lambda_0) a\dot{B}_i(z) + \theta^2 \lambda_i \frac{a_2}{2}\ddot{\varphi}(z) + \theta^2 \lambda_0 a\dot{\varphi}(z) + o\left(\theta^2\right) = 0 \ .$$

Переходя к пределу при $\theta \to 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} C_j(z) - (\lambda_i - \lambda_0) a\dot{B}_i(z) + \lambda_i \frac{a_2}{2}\ddot{\varphi}(z) + \lambda_0 a\dot{\varphi}(z) = 0 \ . \tag{28}$$

Умножая соотношения (28) на π_i, суммируя и учитывая (4), получим

$$-\sum_{i=1}^{n} \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a\dot{B}_i(z) + \lambda_0 \frac{a_2}{2}\ddot{\varphi}(z) + \lambda_0 a\dot{\varphi}(z) = 0 \ . \tag{29}$$

Так как

$$\dot{B}_k(z) = \dot{B}_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj}\left(\lambda_j - \lambda_0\right) a\ddot{\varphi}(z) ,$$

то из (29) получим

$$A_1\ddot{\varphi}(z) + A_2\dot{\varphi}(z) = 0 , \tag{30}$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_0)\pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij}\left(\lambda_j - \lambda_0\right), \quad A_2 = \lambda_0 a \ . \tag{31}$$

Откуда

$$\varphi(z) = U_1 + U_2 e^{-\frac{A_2}{A_1}z} \ .$$

Можно показать, что постоянная $A_1 > 0$. Так как условие (13) должно выполняться при всех θ, то $\varphi(+\infty) = 0$. Откуда $U_1 = 0$. Далее, из соотношений (9), (16) и (17) имеем

$$p(0) = \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=1}^{n}\pi_i\varphi_i(0,\theta) = \frac{1}{1+\theta}\left(\varphi(0) + \theta\sum_{i=1}^{n}\pi_i B_i(0) + o(\theta)\right) = \frac{1}{1+\theta}. \qquad (32)$$

Так как и условие (32) должно выполняться при всех θ, то $\varphi(0) = 1$. Таким образом,

$$\varphi(z) = e^{-\frac{A_2}{A_1}z} \qquad (33)$$

и

$$p_i(s) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta s} + O(\theta). \qquad (34)$$

Для оценки точности получившегося приближения рассмотрим дополнительные члены, входящие в разложение $\varphi_i(z,\theta)$ по степеням θ. Представим теперь функции $\varphi_i(z,\theta)$ в виде

$$\varphi_i(z,\theta) = \varphi(z) + B_i(z)\theta + C_i(z)\theta^2 + D_i(z)\theta^3 + o\left(\theta^3\right). \qquad (35)$$

Подставив разложения (35) в уравнения (18), получим, учитывая соотношения (21), (23) и (28):

$$\sum_{j=1}^{n}q_{ij}D_j(z) - (\lambda_i - \lambda_0)a\dot{C}(z) + \lambda_i\frac{a_2}{2}\ddot{B}_i(z) + \lambda_0 a\dot{B}_i(z) - \lambda_i\frac{a_3}{6}\dddot{\varphi}(z) = 0. \qquad (36)$$

Умножая соотношения системы (36) на π_i и складывая эти соотношения, будем иметь

$$-\sum_{i=1}^{n}\pi_i(\lambda_i - \lambda_0)a\dot{C}_i(z) + \frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i\lambda_i\ddot{B}_i(z) + \lambda_0 a\sum_{i=1}^{n}\pi_i\dot{B}_i(z) - \lambda_0\frac{a_3}{6}\dddot{\varphi}(z) = 0. \qquad (37)$$

Из системы уравнений (28) получим аналогично (26)

$$C_k(z) = C_n(z) + a\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}(\lambda_i - \lambda_0)\dot{B}_i(z) - \frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}\lambda_i\ddot{\varphi}(z) - \lambda_0 a\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}\dot{\varphi}(z). \qquad (38)$$

Подставляя выражения (38) в уравнение (37), получим

$$\frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n}\pi_i\lambda_i\ddot{B}_i(z) - a^2\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(\lambda_k - \lambda_0)\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}(\lambda_i - \lambda_0)\ddot{B}_i(z) + \lambda_0 a\sum_{i=1}^{n}\pi_i\dot{B}_i(z) +$$

$$+\left(\frac{aa_2}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(\lambda_k - \lambda_0)\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}\lambda_i - \frac{\lambda_0 a_3}{6}\right)\dddot{\varphi}(z) + \lambda_0 a^2\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(\lambda_k - \lambda_0)\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}\ddot{\varphi}(z) = 0. \qquad (39)$$

Соотношение (39) с учетом выражений (26), определяющих $B_i(z)$, приводит, наконец, к уравнению относительно $B_n(z)$

$$A_1\ddot{B}_n(z)+A_2\dot{B}_n(z)=A_3\ddot{\varphi}(z)+A_4\ddot{\varphi}(z), \tag{40}$$

где

$$A_3=a^3\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k(\lambda_k-\lambda_0)\sum_{i=1}^{n-1}R_{ki}(\lambda_i-\lambda_0)\sum_{j=1}^{n-1}R_{ij}\left(\lambda_j-\lambda_0\right)-$$

$$-\frac{aa_2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}R_{ij}\left(\pi_i\lambda_i\left(\lambda_j-\lambda_0\right)+\pi_i(\lambda_i-\lambda_0)\lambda_j\right)+\frac{\lambda_0 a_3}{6}, \tag{41}$$

$$A_4=-\lambda_0 a^2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}R_{ij}\left(\pi_i\left(\lambda_j-\lambda_0\right)+\pi_i(\lambda_i-\lambda_0)\right).$$

Решение уравнения (40) имеет вид

$$B_n(z)=W_1+W_n e^{-\frac{A_2}{A_1}z}+Wze^{-\frac{A_2}{A_1}z}, \tag{42}$$

где
$$W=\frac{A_3A_2^2}{A_1^3}-\frac{A_4A_2}{A_1^2}. \tag{43}$$

Из граничных условий (13) получаем, что $B_n(+\infty)=0$. Откуда $W_1=0$. Так как начальное условие (32) должно выполняться при всех θ, то $\sum_{i=0}^{n}\pi_i B_i(0)=0$. Поэтому

$$B_n(0)=-\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}\left(\lambda_j-\lambda_0\right)a\dot{\varphi}(0)$$

и
$$W_n=\frac{aA_2}{A_1}\sum_{k=1}^{n-1}\pi_k\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}\left(\lambda_j-\lambda_0\right). \tag{45}$$

Окончательно получаем, что

$$B_n(z)=W_n e^{-\frac{A_2}{A_1}z}+Wze^{-\frac{A_2}{A_1}z}, \tag{45}$$

где W_n и W определяются соотношениями (43) и (44). Для остальных $B_i(z)$ будем иметь

$$B_k(z)=W_k e^{-\frac{A_2}{A_1}z}+Wze^{-\frac{A_2}{A_1}z}, \tag{46}$$

где
$$W_k=W_n-\frac{aA_2}{A_1}\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}\left(\lambda_j-\lambda_0\right). \tag{47}$$

Формулы (34), определяющие вероятности $p_i(s)$, примут вид

$$p_i(s)=\frac{1}{1+\theta}\left(e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta s}+\theta\left(W_i e^{-\frac{A_2}{A_1}\theta s}+\theta sWe^{-\frac{A_2}{A_1}\theta s}\right)\right)+o(\theta). \tag{48}$$

При малых значениях θ полученной поправкой можно пренебречь.

4. Условное среднее время до разорения страховой компании

Дополнительной характеристикой, позволяющей анализировать перспективы страховой компании, является среднее время до разорения при условии, что разорение произошло $[5]$. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, на котором определены траектории процесса $S(t)$ изменения капитала компании. Пусть в начальный момент времени капитал компании равен s и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Разобьем все возможные траектории процесса $S(t)$, выходящие из этой точки, на два класса: $\left\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_p\right\}$ – траектории, приводящие к разорению, и $\left\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_в\right\}$ – траектории, приводящие к выживанию. Пусть $t_i(s, \omega)$ – время до разорения на траектории, приводящей к разорению. Обозначим

$$T_i(s) = \int\limits_{\Omega_p(s)} t_i(s, \omega) P(d\omega). \tag{49}$$

Так как $\int\limits_{\Omega_p(s)} P(d\omega) = p_i(s)$, то условное среднее время до разорения

$$t_i(s) = \frac{T_i(s)}{p_i(s)}. \tag{50}$$

Для вывода уравнений, определяющих $T_i(s)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. За время Δt капитал компании изменится на величину Δs и

$$t_i(s, \omega) = \Delta t + t_j(s + \Delta s, \omega), \tag{51}$$

где номер j соответствует значению интенсивности $\lambda(t)$ в момент времени $t + \Delta t$. Усредняя соотношение (51), будем иметь

$$T_i(s) = \Delta t p_i(s) + M_{\Delta s, j}\left\{T_j(s + \Delta s)\right\}.$$

Отсюда после предельного перехода при $\Delta t \to 0$ получим систему уравнений, определяющих $T_i(s)$:

$$c\dot{T}_i(s) = \lambda_i T_i(s) - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} T_j(s) - \lambda_i \int\limits_0^s T_i(s - x)\psi(x)dx - p_i(s). \tag{52}$$

Граничные условия имеют вид

$$\lim_{s \to \infty} T_i(s) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{52}$$

так как при $s \to \infty$ область интегрирования в (49) $\Omega_p(s) \to \varnothing$.

Как и при вычислении вероятностей разорения, рассмотрим случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решения уравнений (52) будем искать в виде

$$T_i(s) = \frac{1}{\theta^2} f_i(\theta s, \theta). \tag{53}$$

Относительно функций $f_i(s, \theta)$ будем предполагать, что они являются по крайней мере дважды дифференцируемыми по своим аргументам. Подставляя выражения (53) в систему уравнений (52) после замены переменной $\theta s = z$, получим

$$c\theta\dot{f}_i(z,\theta) = \lambda_i f_i(z,\theta) - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} f_j(z,\theta) - \lambda_i \int_0^{\frac{z}{\theta}} f_i(z-\theta x,\theta)\psi(x)\,dx - \frac{\theta^2}{1+\theta}\varphi_i(z,\theta), \quad (54)$$

где $\varphi_i(z,\theta)$ определяются соотношениями (17).

Обозначим

$$f_i(z) = \lim_{\theta\to 0} f_i(z,\theta). \quad (55)$$

Переходя в уравнениях (55) к пределу при $\theta \to 0$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} f_j(z) = 0.$$

Откуда аналогично (21) имеем

$$f_i(z) = f(z) \quad \forall i, \quad (56)$$

где $f(z)$ – неопределенная пока функция.

Представим теперь функции $f_i(z,\theta)$ в виде

$$f_i(z,\theta) = f(z) + B_i(z)\theta + o(\theta). \quad (57)$$

Подставляя разложения (57) в уравнения (54), раскладывая $f(z-\theta x)$ и $B_i(z-\theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ, получим, что

$$(\lambda_0 - \lambda_i)a\theta\dot{f}(z) + \theta\sum_{j=1}^{n} q_{ij} B_j(z) + o(\theta) = 0.$$

Переходя к пределу при $\theta \to 0$, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} B_j(z) = (\lambda_i - \lambda_0)a\dot{f}(z). \quad (58)$$

Откуда аналогично (26) получаем, что

$$B_k(z) = B_n(z) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj}\left(\lambda_j - \lambda_0\right)a\dot{f}(z). \quad (59)$$

Наконец, представим функции $f_i(z,\theta)$ в виде

$$f_i(z,\theta) = f(z) + B_i(z)\theta + C_i(z)\theta^2 + o\left(\theta^2\right). \quad (60)$$

Подставляя разложения (60) в уравнения (54), раскладывая $f(z-\theta x)$, $B_i(z-\theta x)$ и $C_i(z-\theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2, получим, учитывая (60), после предельного перехода при $\theta \to 0$, что

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} C_j(z) - (\lambda_i - \lambda_0)a\dot{B}_i(z) + \lambda_i \frac{a_2}{2}\ddot{f}(z) + \lambda_0 a\dot{f}(z) + \varphi(z) = 0. \quad (61)$$

Умножая соотношения (61) на π_i, суммируя и учитывая (4), получим

$$-\sum_{j=1}^{n}\pi_i\left(\lambda_i-\lambda_0\right)a\dot{B}_i\left(z\right)+\lambda_0\frac{a_2}{2}\ddot{f}\left(z\right)+\lambda_0 a\dot{f}\left(z\right)+\varphi\left(z\right)=0\,. \qquad (62)$$

Так как

$$\dot{B}_k(z)=\dot{B}_n\left(z\right)+\sum_{j=1}^{n-1}R_{kj}\left(\lambda_j-\lambda_0\right)a\ddot{\varphi}\left(z\right), \qquad (63)$$

то из (62) будем иметь

$$A_1\ddot{f}\left(z\right)+A_2\dot{f}\left(z\right)=-\varphi\left(z\right), \qquad (64)$$

где A_1 и A_2 определяются формулами (31), а $\varphi(z)$ формулой (33).

Решение уравнения (64) имеет вид

$$f\left(z\right)=V_1+V_2 e^{-\frac{A_2}{A_1}z}+\frac{z}{A_2}e^{-\frac{A_2}{A_1}z}\,. \qquad (6)$$

Из условия (53) получаем, что $V_1=0$. Постоянную V_2 можно определить из следующих соображений. Рассмотрим уравнения (55) при $z=0$. Они перепишутся в виде

$$c\theta\dot{f}_i\left(0,\theta\right)=\lambda_i f_i\left(0,\theta\right)-\sum_{j=1}^{n}q_{ij}f_j\left(0,\theta\right)-\frac{\theta^2}{1+\theta}\varphi_i\left(0,\theta\right).$$

Переходя к пределу при $\theta\to 0$, получим отсюда $V_2=f\left(0\right)=0$.

Окончательно получаем, что

$$f\left(z\right)=\frac{z}{A_2}e^{-\frac{A_2}{A_1}z} \qquad (7)$$

и при $\theta\ll 1$

$$t_i\left(s\right)=\frac{1+\theta}{\theta A_2}s+O(1)\quad\forall i\,. \qquad (8)$$

Таким образом, $t_i\left(s\right)\sim 1/\theta$ и при $\theta\to 0$ $t_i\left(s\right)\to\infty$.Получающееся на первый взгляд противоречие объясняется следующим образом. Условное среднее время $t_i\left(s\right)$ вычисляется в предположении, что разорение, в конце концов, происходит. Если нагрузка страховой премии велика, то капитал компании в среднем быстро увеличивается и разорение возможно лишь на начальном интервале. При малых θ капитал компании растет медленно, поэтому разорение может произойти на значительно большем временном интервале, что и отражается в соотношении (68).

Заключение

В работе найдены основные характеристики деятельности страховой компании: вероятность ее разорения и условное среднее время до разорения при дважды стохастическом потоке страховых выплат и дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Предложенная методика может быть использована для анализа других моделей страхования при условии, что нагрузка страховой премии считается малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Panjer H.Y.*, *Willmont G.E.* Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.
2. *Наумов В.А.* Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. С. 67 – 73.
3. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
4. *Лаврентьев М.А.*, *Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
5. *Глухова Е.В.*, *Змеев О.А.*, *Лившиц К.И.* Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.

Лившиц Климентий Исаакович
Томский государственный университет
Бублик Яна Сергеевна
Анжеро-Судженский филиал Кемеровского государственного университета
E-mail: kim47@mail.ru; bublik@asf.ru

Поступила в редакцию 2 сентября 2009 г.