

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.865

Н.С. Демин, В.В. Толстобоков

ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ОПЦИОНЫ ПРОДАЖИ НА ДИФфуЗИОННОМ (B, P) -РЫНКЕ ОБЛИГАЦИЙ В СЛУЧАЕ МОДЕЛИ ХАЛЛА – УАЙТА

На основе опосредованного подхода осуществлен вывод формул для стоимости опциона, портфеля и капитала Европейского опциона продажи с гарантированным доходом для обладателя опциона и с ограничением выплат для инвестора на диффузионном (B, P) -рынке облигаций. Исследованы свойства решения.

Ключевые слова: опцион, облигация, хеджирование, капитал, портфель.

Опцион на финансовых рынках является одной из наиболее распространенных вторичных (производных) ценных бумаг, поскольку дает право, а не обязанность, предъявить его к исполнению [1 – 5]. Покупатель опциона приобретает право покупки или продажи оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец опциона (эмитент, инвестор) за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование владельца опциона при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли (call option), а во втором – опцион продажи (put option). Если платежное обязательство характеризуется только ценой базисного актива в момент исполнения опциона и ценой исполнения, то такие опционы являются стандартными.

Развитие финансовых рынков потребовало использования более сложных платежных обязательств, учитывающих, с одной стороны, желание обладателя опциона иметь гарантированный доход, а с другой – желание инвестора ограничить выплаты по опционам, что породило класс экзотических опционов [6, 7]. Эта проблематика достаточно исследована, когда в качестве базисного актива используется акция $((B, S)$ -рынок), и является малоисследованной, когда в качестве базисного актива используется облигация $((B, P)$ -рынок). В данной работе представляется исследование трех видов экзотических опционов продажи Европейского типа на диффузионном (B, P) -рынке облигаций на основе опосредованного подхода: двух опционов с гарантированным доходом, которые дают преимущество владельцу опциона; опциона с ограничением выплат, который дает преимущество продавцу опциона.

Используемые обозначения: $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $N\{b; D\}$ – нормальная (гауссовская) плотность с параметрами b и D ;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz; \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}. \quad (1)$$

1. Постановка задачи

В теории облигаций используется два основных подхода к заданию стоимости облигации – опосредованный и прямой [2]. В случае опосредованного подхода стоимость облигации определяется через краткосрочную процентную ставку, а в случае прямого, известного как модель Хиса – Джерроу – Мортон (НЖМ-модель) [8], через форвардную процентную ставку. В данной работе используется опосредованный подход.

Рассмотрение задачи ведется на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ [2, 3]. Следуя [2, 3, 9], введем следующие характеристики (B, P) -рынка облигаций. Стоимость $B(t)$ в момент времени t банковского счета такова, что

$$B(t) = \exp \left\{ \int_0^t r(s) ds \right\}, \quad (2)$$

где $r(t)$ – некоторый стохастический процесс процентной ставки. Основное предположение относительно процесса $r(t)$ состоит в том, что это есть диффузионный гауссовско-марковский процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dr(t) = (a(t) - b(t)r(t))dt + d(t)dW_t, r(0) = r_0, \quad (3)$$

где W_t – винеровский процесс, функции $a(t)$, $b(t)$, $d(t)$ – детерминированные функции, причем

$$\int_0^T (|a(t)| + |b(t)| + d^2(t))dt < \infty. \quad (4)$$

Замечание 1. Модель процентной ставки, описываемая уравнением (3) есть не что иное, как модель Халла – Уайта [10, 11], частными случаями которой являются модели Мертона, Васичека, Хо – Ли [2].

Стоимость $P_t(T^1)$ в момент времени t бескупонной облигации со сроком погашения T^1 , согласно теореме 1, п. 5а из [2], определяется формулой

$$P_t(T^1) = E \left\{ \exp \left\{ - \int_t^{T^1} r(s) ds \right\} \middle| F_t \right\}, 0 < P_t(T^1) \leq 1. \quad (5)$$

Утверждение 1 [2]. Если краткосрочная процентная ставка $r(t)$ подчиняется уравнению (3) и выполнено условие (4), то уравнение (3) имеет, и при этом единственное, решение

$$r(t) = g(t) \left\{ r(0) + \int_0^t \frac{a(s)}{g(s)} + \int_0^t \frac{d(s)}{g(s)} dW_s \right\}, \quad (6)$$

где
$$g(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \beta(s) ds \right\} \quad (7)$$

– фундаментальное решение уравнения

$$g(t) = 1 - \int_0^t \beta(s)g(s)ds. \quad (8)$$

Утверждение 2 [2]. Процесс $P_t(T^1)$ имеет эквивалентное (5) представление в виде уравнения

$$P_t(T^1) = \exp \{ A_t(T^1) - r(t)B_t(T^1) \}, \quad (9)$$

где

$$A_t(T^1) = \frac{1}{2} \int_t^{T^1} \left[\int_s^{T^1} \frac{g(u)}{g(s)} d(s) du \right]^2 ds - \int_t^{T^1} \left[\int_s^u \frac{g(u)}{g(s)} d(s) ds \right] du, \quad (10)$$

$$B_t(T^1) = \int_t^{T^1} \frac{g(u)}{g(t)} du, \quad (11)$$

Замечание 2. Модели цен облигаций, которые представляются в виде (9), называются однофакторными аффинными моделями согласно терминологии п. 4с, гл. III из [2].

Что же касается динамики процесса цен $P_t(T^1)$ облигации, то будем предполагать, что относительно исходной меры на $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ процесс $\overline{P}_t(T^1) = P_t(T^1) / B(t)$, являющийся дисконтированной относительно банковского счета ценой облигации, является мартингалом [2, 3], а в силу теоремы 1, п. 5а, гл. VII из [2], рассматриваемый рынок является безарбитражным [1 – 3].

Инвестор в момент времени t формирует капитал

$$X_t = \beta_t B(t) + \gamma_t P_t(T^1), t \in [0, T], T < T^1, \quad (12)$$

состоящий из банковского счета B и бескупонной облигации $P(T^1)$ со сроком погашения T^1 . Задача инвестирования на таком (B, P) -рынке заключается в следующем: сформировать портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$ таким образом, чтобы эволюция капитала X_t^* в соответствии с (12) обеспечила в момент $T < T^1$ выполнение платежного обязательства

$$X_T^* = f_T, \quad (13)$$

где $f_T \geq 0$ – платежная функция, T – фиксированный момент исполнения опциона, то есть рассматриваются опционы европейского типа [1 – 3].

В данной работе исследуется проблема хеджирования для опционов купли с платежными функциями соответственно вида $(a^+ = \max\{a; 0\})$

$$f_T^{\max 1} = \max \{ K_1 - P_T(T^1), K_2 \}; \quad (14)$$

$$f_T^{\max 2} = \max \{ K_1 - P_T(T^1), K_2 \} I [P_T(T^1) < K_1]; \quad (15)$$

$$f_T^{\min} = \min \{ (K_1 - P_T(T^1))^+, K_2 \}, \quad (16)$$

где $K_1 > 0, K_2 > 0, I[A]$ – индикатор события A , т. е. $I[A]=1$, если событие A происходит и $I[A]=0$, если событие A не происходит.

Согласно платежному обязательству (14), владелец опциона может всегда предъявить его к исполнению, получая гарантированную выплату K_2 , если $P_T(T^1) \geq K_1 - K_2$, и выплату в размере $K_1 - P_T(T^1)$, если $P_T(T^1) < K_1 - K_2$. Согласно платежному обязательству (15), владелец опциона предъявляет его к исполнению

только при выполнении условия $P_T(T^1) < K_1$. В результате владелец опциона получает гарантированную выплату K_2 , если $P_T(T^1) \geq K_1 - K_2$, и выплату в размере $K_1 - P_T(T^1)$, если $P_T(T^1) < K_1 - K_2$. Согласно платежному обязательству (16), если $P_T(T^1) < K_1$, то покупатель опциона предъявляет его к исполнению и получает выплату в размере $K_1 - P_T(T^1)$, если $P_T(T^1) > K_1 - K_2$, и в размере K_2 , если $P_T(T^1) \leq K_1 - K_2$.

Замечание 3. Платежные функции (14), (15) дают преимущество владельцу опциона, так как гарантируют ему выплату, равную K_2 , в случае (14) всегда и в случае (15) при выполнении условия $P_T(T^1) < K_1$. Платежная функция (16) дает преимущество инвестору, так как ограничивает его выплаты по опциону величиной K_2 .

Структура статьи следующая. В п. 2 вынесены основные результаты для опционов продажи, для которых получены формулы, определяющие цены опционов, а также хеджирующие стратегии (портфели) и соответствующие им капиталы, обеспечивающие выполнение платежных обязательств. В п. 3 исследуются свойства решения.

2. Основные результаты

Обозначим

$$d_1(t) = \frac{\ln \left[\frac{K_1 B(t)}{P_t(T^1)} \right] + \frac{1}{2} \sigma_T^2(T^1) B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1) B_T(T^1)},$$

$$d_2(t) = \frac{\ln \left[\frac{(K_1 - K_2) B(t)}{P_t(T^1)} \right] + \frac{1}{2} \sigma_T^2(T^1) B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1) B_T(T^1)}; \quad (17)$$

$$y_1(t) = \frac{\ln \left[\frac{K_1 B(t)}{P_t(T^1)} \right] - \frac{1}{2} \sigma_T^2(T^1) B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1) B_T(T^1)},$$

$$y_2(t) = \frac{\ln \left[\frac{(K_1 - K_2) B(t)}{P_t(T^1)} \right] - \frac{1}{2} \sigma_T^2(T^1) B_T^2(T^1)}{\sigma_T(T^1) B_T(T^1)}, \quad (18)$$

где

$$B_T(T^1) = \int_T^{T^1} \frac{g(u)}{g(T)} du; \quad (19)$$

$$\sigma_T(T^1) = \left(\int_T^{T^1} \left[\int_s^{T^1} \frac{g(u)}{g(s)} d(s) du \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (20)$$

$$g(u) = \exp \left\{ - \int_0^u b(s) ds \right\}, \quad (21)$$

а d_1 , d_2 , y_1 , y_2 определяются формулами (17), (18) при $t = 0$.

Теорема 1. В случае опциона купли с платежной функцией вида (14) стоимость опциона $C_T^{\max 1}$, капитал $X_t^{\max 1}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\max 1} = (\gamma_t^{\max 1}, \beta_t^{\max 1})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 1} = K_1 \Phi(d_2) - P_0(T^1) \Phi(y_2) + K_2 \Phi(-d_2); \quad (22)$$

$$X_t^{\max 1} = K_1 B(t) \Phi(d_2(t)) - P_t(T^1) \Phi(y_2(t)) + K_2 B(t) \Phi(-d_2(t)); \quad (23)$$

$$\gamma_t^{\max 1} = -\Phi(y_2(t)), \beta_t^{\max 1} = K_1 \Phi(d_2(t)) + K_2 \Phi(-d_2(t)). \quad (24)$$

Доказательство. Согласно общей теории платежных обязательств на рынке облигаций [2, 3],

$$X_t = B(t) E \{ B^{-1}(T) f_T \mid F_t \}; \quad (25)$$

$$\gamma_t = \frac{\partial X_t}{\partial p} \bigg|_{p=P_t(T^1)}, \quad \beta_t = \frac{X_t - \gamma_t P_t(T^1)}{B(t)}. \quad (26)$$

В соответствии с теорией расчетов на полных безарбитражных рынках и в предположении, что исходная вероятностная мера на $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ является мартингальной, полагая

$$R(t, T) = B(t) B^{-1}(T) = \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\}, \quad (27)$$

находим, используя (14), (25), что

$$\begin{aligned} X_t^{\max 1} &= E \{ R(t, T) f_T^{\max 1} \mid F_t \} = E \{ R(t, T) \max \{ K_1 - P_T(T^1), K_2 \} \mid F_t \} = \\ &= K_1 E \{ R(t, T) I [P_T(T^1) < K_1 - K_2] \mid F_t \} - E \{ R(t, T) P_T(T^1) I [P_T(T^1) < K_1 - K_2] \mid F_t \} + \\ &\quad + K_2 E \{ R(t, T) I [P_T(T^1) \geq K_1 - K_2] \mid F_t \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Использование (9) дает, что события

$$\{P_T(T^1) > K_1 - K_2\} = \{A_T(T^1) - r(T) B_T(T^1) > \ln(K_1 - K_2)\} = \{r(T) \leq r_{12}^*\}; \quad (29)$$

$$\{P_T(T^1) \leq K_1 - K_2\} = \{A_T(T^1) - r(T) B_T(T^1) \leq \ln(K_1 - K_2)\} = \{-r(T) \leq -r_{12}^*\}, \quad (30)$$

где
$$r_{12}^* = \frac{\ln(K_1 - K_2) - A_T(T^1)}{-B_T(T^1)}. \quad (31)$$

Пусть

$$\xi = r(T), \eta = \int_0^{T^1} r(u) du, \zeta = \int_0^T r(u) du. \quad (32)$$

Тогда из (28) – (30) находим, что

$$\begin{aligned} X_t^{\max 1} &= K_1 B(t) E \{ I [-\xi \leq -r_{12}^*] \exp \{-\zeta\} \mid F_t \} - E \{ I [-\xi \leq -r_{12}^*] \exp \{-\eta\} \mid F_t \} + \\ &\quad + K_2 B(t) E \{ I [\xi \leq r_{12}^*] \exp \{-\zeta\} \mid F_t \}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для дальнейшего упрощения этой формулы полезной является следующая лемма из [2].

Лемма. Пусть (X, Y) – гауссовская пара случайных величин с вектором средних значений (μ_X, μ_Y) и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$E\{I[X \leq x] \exp\{-Y\}\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right\} \Phi(\tilde{x}) \quad (34)$$

и
$$E\{I[X \leq x] X \exp\{-Y\}\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_Y^2 - \mu_Y\right\} \{(\mu_X - \rho_{XY})\Phi(\tilde{x}) - \sigma_X \varphi(\tilde{x})\}, \quad (35)$$

где
$$\tilde{x} = \frac{x - (\mu_X - \rho_{XY})}{\sigma_X}. \quad (36)$$

Из (6) находим, что

$$\mu_\xi = E\{r(T)\} = g(T) \left\{ r(0) + \int_0^T \frac{a(s)}{g(s)} ds \right\}; \quad (37)$$

$$\mu_{-\xi} = -\mu_\xi; \quad (38)$$

$$\mu_\eta = E \left\{ \int_0^{T^1} r(u) du \right\} = r(0) \int_0^{T^1} g(u) du + \int_0^{T^1} \left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)} a(s) ds \right] du; \quad (39)$$

$$\mu_\varsigma = E \left\{ \int_0^T r(u) du \right\} = r(0) \int_0^T g(u) du + \int_0^T \left[\int_0^u \frac{g(u)}{g(s)} a(s) ds \right] du; \quad (40)$$

$$\sigma_\xi^2 = D\{r(T)\} = \int_0^T d^2(s) \left(\frac{g(T)}{g(s)} \right) ds; \quad (41)$$

$$\sigma_{-\xi}^2 = \sigma_\xi^2; \quad (42)$$

$$\sigma_\eta^2 = D \left\{ \int_0^{T^1} r(u) du \right\} = \int_0^{T^1} \left[\int_s^{T^1} \frac{g(u)}{g(s)} d(s) du \right]^2 ds; \quad (43)$$

$$\sigma_\varsigma^2 = D \left\{ \int_0^T r(u) du \right\} = \int_0^T \left[\int_s^T \frac{g(u)}{g(s)} d(s) du \right]^2 ds; \quad (44)$$

$$\rho_{\xi\varsigma} = \text{cov} \left(r(T), \int_0^T r(u) du \right) = \int_0^T \left(d^2(s) \frac{g(T)}{g(s)} \int_s^T \frac{g(u)}{g(s)} du \right) ds; \quad (45)$$

$$\rho_{-\xi\varsigma} = -\rho_{\xi\varsigma}; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\eta} &= \text{cov} \left(r(T), \int_0^{T^1} r(u) du \right) = \text{cov} \left(r(T), \int_0^T r(u) du \right) + \text{cov} \left(r(T), \int_T^{T^1} r(u) du \right) = \\ &= \rho_{\xi\varsigma} + \sigma_\xi^2 \int_T^{T^1} \frac{g(u)}{g(T)} du. \end{aligned} \quad (47)$$

Использование (33), (34) дает, что

$$X_t^{\max 1} = K_1 B(t) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{\xi}^2 - \mu_{\xi} \right\} \Phi \left(\frac{-r_{12}^* - (\mu_{-\xi} - \rho_{-\xi\xi})}{\sigma_{-\xi}} \right) - \\ - \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{\eta}^2 - \mu_{\eta} \right\} \Phi \left(\frac{-r_{12}^* - (\mu_{-\xi} - \rho_{-\xi\xi})}{\sigma_{-\xi}} \right) + K_2 B(t) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{\xi}^2 - \mu_{\xi} \right\} \Phi \left(\frac{r_{12}^* - (\mu_{\xi} - \rho_{\xi\xi})}{\sigma_{\xi}} \right). \quad (48)$$

Тогда (23) следует в результате подстановки (37) – (47) в (48), а (22) из того, что $C_T^{\max 1} = X_0^{\max 1}$ [2, 3].

Из (1) следует

$$\frac{\partial \Phi(e(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{e^2(s)}{2} \right\} \frac{\partial e(s)}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Phi(-e(s))}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi(e(s))}{\partial s}. \quad (49)$$

Согласно (17), (18),

$$y_2(t) - d_2(t) = \sigma_T(T^1) B_T(T^1). \quad (50)$$

Тогда из (23), (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\max 1}}{\partial p} = -\Phi(y_2(t)) + \Psi, \quad \Psi = -p \left[\frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial p} \right] + (K_1 - K_2) B(t) \left[\frac{\partial \Phi(d_2(t))}{\partial p} \right]. \quad (51)$$

Использование (17), (18), (49) дает

$$\frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_T(T^1) B_T(T^1)} \exp \left\{ -\frac{y_2(t)^2}{2} \right\}; \quad (52)$$

$$\frac{\partial \Phi(d_2(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_T(T^1) B_T(T^1)} \exp \left\{ -\frac{d_2(t)^2}{2} \right\}. \quad (53)$$

Из (17), (50) получаем

$$y_2^2 = d_2^2 - 2 \ln \left[\frac{(K_1 - K_2) B(t)}{P_t(T^1)} \right]. \quad (54)$$

Использование (52) – (54) в (51) дает, что $\Psi=0$. Таким образом (24) следует из (23), (26), (51). Теорема доказана.

Теорема 2. В случае опциона купли с платежной функцией вида (15) стоимость опциона $C_T^{\max 2}$, капитал $X_t^{\max 2}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\max 2} = (\gamma_t^{\max 2}, \beta_t^{\max 2})$ определяются формулами

$$C_T^{\max 2} = C_T^{\max 1} - K_2 \Phi(-d_1); \quad (55)$$

$$X_t^{\max 2} = X_t^{\max 1} - K_2 B(t) \Phi(-d_1(t)); \quad (56)$$

$$\gamma_t^{\max 2} = \gamma_t^{\max 1} - K_2 B(t) P_t^{-1}(T^1) \sigma_T^{-1}(T^1) B_T^{-1}(T^1) \varphi(d_1(t)); \quad (57)$$

$$\beta_t^{\max 2} = \beta_t^{\max 1} - K_2 \left[\Phi(-d_1(t)) - \sigma_T^{-1}(T^1) B_T^{-1}(T^1) \varphi(d_1(t)) \right]. \quad (58)$$

Доказательство. Использование (15), (25), аналогично (28) дает, что

$$\begin{aligned} X_t^{\max 2} &= E\{R(t, T) f_T^{\max 2} | F_t\} = E\{R(t, T) \max\{K_1 - P_T(T^1), K_2\} I[P_T(T^1) < K_1] | F_t\} = \\ &= K_1 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) < K_1 - K_2] | F_t\} - E\{R(t, T) P_T(T^1) I[P_T(T^1) < K_1 - K_2] | F_t\} + \\ &+ K_2 E\{R(t, T) I[K_1 - K_2 \leq P_T(T^1) < K_1] | F_t\} = X_t^{\max 1} - K_2 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) > K_1] | F_t\} = \\ &= X_t^{\max 1} - K_2 B(t) E\{I[\xi \leq r_1^*] \exp\{-\zeta\} | F_t\}, \end{aligned} \quad (59)$$

где ξ, ζ имеют вид (32), а

$$r_1^* = \frac{\ln K_1 - A_T(T^1)}{-B_T(T^1)}.$$

Преобразование (59) аналогично (28) с использованием (23), (34), (59) приводит к (56), а (55) следует из того, что $C_T^{\max 2} = X_0^{\max 2}$ [2,3]. Из (56) с учетом (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\max 2}}{\partial p} = -\Phi(y_2(t)) + K_2 B(t) \frac{\partial \Phi(d_1(t))}{\partial p} + \Psi, \quad (60)$$

где Ψ имеет вид (51). Использование (17), (49) дает

$$\frac{\partial \Phi(d_1(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_T(T^1)} B_T(T^1)} \exp\left\{-\frac{d_1(t)^2}{2}\right\}. \quad (61)$$

Так как при доказательстве теоремы 1 было доказано, что $\Psi = 0$, то (57) следует с учетом (24) из (26), (60), (61), (1), а (58) следует с учетом (24) из (26), (56), (57). Теорема доказана.

Теорема 3. В случае опциона купли с платежной функцией вида (16) стоимость опциона $C_T^{\min}$, капитал $X_t^{\min}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\min} = (\gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min})$ определяются формулами

$$C_T^{\min} = K_1 [\Phi(d_1) - \Phi(d_2)] - P_0(T^1) [\Phi(y_1) - \Phi(y_2)] + K_2 \Phi(d_2); \quad (62)$$

$$X_t^{\min} = K_1 B(t) [\Phi(d_1(t)) - \Phi(d_2(t))] - P_t(T^1) [\Phi(y_1(t)) - \Phi(y_2(t))] + K_2 B(t) \Phi(d_2(t)); \quad (63)$$

$$\gamma_t^{\min} = -[\Phi(y_1(t)) - \Phi(y_2(t))]; \quad (64)$$

$$\beta_t^{\min} = K_1 [\Phi(d_1(t)) - \Phi(d_2(t))] + K_2 \Phi(d_2(t)). \quad (65)$$

Доказательство. Использование (16), (25), аналогично (28) дает, что

$$\begin{aligned} X_t^{\min} &= E\{R(t, T) f_T^{\min} | F_t\} = E\{R(t, T) \min\{(K_1 - P_T(T^1))^+, K_2\} | F_t\} = \\ &= E\{R(t, T) [K_1 - P_T(T^1)] I[K_1 - K_2 < P_T(T^1) < K_1] | F_t\} + K_2 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) \leq K_1 - K_2] | F_t\} = \\ &= K_1 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) < K_1] | F_t\} - K_1 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) < K_1 - K_2] | F_t\} - \\ &- E\{P_T(T^1) R(t, T) I[P_T(T^1) < K_1] | F_t\} + E\{P_T(T^1) R(t, T) I[P_T(T^1) < K_1 - K_2] | F_t\} + \\ &+ K_2 E\{R(t, T) I[P_T(T^1) \leq K_1 - K_2] | F_t\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Преобразование (66) аналогично (28) приводит к (63), а (62) следует из (63) с учетом того, что $C_T^{\min} = X_0^{\min}$ [2,3]. Из (63) с учетом (49) следует

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial p} = -[\Phi(y_1(t)) - \Phi(y_2(t))] + \Psi; \quad (67)$$

$$\Psi = p \frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial p} - p \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial p} + K_1 B(t) \frac{\partial \Phi(d_1(t))}{\partial p} - (K_1 - K_2) B(t) \frac{\partial \Phi(d_2(t))}{\partial p}. \quad (68)$$

Использование (18), (49) дает

$$\frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T(T^1)B_T(T^1)} \exp\left\{-\frac{y_1(t)^2}{2}\right\}. \quad (69)$$

Аналогично (54)

$$y_1^2 = d_1^2 - 2 \ln \left[\frac{K_1 B(t)}{P_t(T^1)} \right]. \quad (70)$$

Использование (52) – (54), (61), (69), (70) в (68) дает, что $\Psi = 0$. Таким образом, (64) следует из (26), (67), а (65) следует из (27), (63), (64). Теорема доказана.

3. Свойства решения

Утверждение 3. Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимости стоимостей опционов от цены исполнения K_1 и от величины K_2 , гарантирующей доход в случае платежных функций (14), (15) и ограничивающей выплаты по опциону в случае платежной функции (16), определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} &= \Phi(d_2), \quad \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} = \Phi(-d_2), \\ \frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1} &= \Phi(d_2) + \frac{K_2}{K_1} \sigma_T^{-1}(T^1) B_T^{-1}(T^1) \phi(d_1(t)); \end{aligned} \quad (71)$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2} = \Phi(d_1) - \Phi(d_2), \quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1} = \Phi(d_1) - \Phi(d_2), \quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2} = \Phi(d_2); \quad (72)$$

и при этом

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} > 0, \quad \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} > 0, \quad \frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1} > 0, \quad \frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2} > 0, \quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1} > 0, \quad \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2} > 0, \quad (73)$$

т.е. по K_1 и K_2 опционы продажи являются возрастающими функциями.

Доказательство. Использование (22), (55), (62), (49) дает, что

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-P_0(T^1) \exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\} \frac{\partial y_2}{\partial K_1} + (K_1 - K_2) \exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\} \frac{\partial d_2}{\partial K_1} \right] - \Phi(d_2); \quad (74)$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-P_0(T^1) \exp\left\{-\frac{y_2^2}{2}\right\} \frac{\partial y_2}{\partial K_2} + (K_1 - K_2) \exp\left\{-\frac{d_2^2}{2}\right\} \frac{\partial d_2}{\partial K_2} \right] + \Phi(-d_2); \quad (75)$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_1} = \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_1} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\} \frac{\partial d_1}{\partial K_1}; \quad (76)$$

$$\frac{\partial C_T^{\max 2}}{\partial K_2} = \frac{\partial C_T^{\max 1}}{\partial K_2} - \Phi(-d_1); \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_1} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[P_0(T^1) \exp \left\{ -\frac{y_2^2}{2} \right\} \frac{\partial y_2}{\partial K_1} - (K_1 - K_2) \exp \left\{ -\frac{d_2^2}{2} \right\} \frac{\partial d_2}{\partial K_1} \right] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[P_0(T^1) \exp \left\{ -\frac{y_1^2}{2} \right\} \frac{\partial y_1}{\partial K_1} - K_1 \exp \left\{ -\frac{d_1^2}{2} \right\} \frac{\partial d_1}{\partial K_1} \right] + [\Phi(d_1) - \Phi(d_2)]; \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_T^{\min}}{\partial K_2} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[P_0(T^1) \exp \left\{ -\frac{y_2^2}{2} \right\} \frac{\partial y_2}{\partial K_2} - (K_1 - K_2) \exp \left\{ -\frac{d_2^2}{2} \right\} \frac{\partial d_2}{\partial K_2} \right] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[P_0(T^1) \exp \left\{ -\frac{y_1^2}{2} \right\} \frac{\partial y_1}{\partial K_2} - K_1 \exp \left\{ -\frac{d_1^2}{2} \right\} \frac{\partial d_1}{\partial K_2} \right] + \Phi(d_2). \end{aligned} \quad (79)$$

Тогда (71) – (73) следуют из (74) – (79), а свойства (73) следуют очевидным образом из (71) – (73) с учетом того, что $d_2 < d_1$.

Экономическая интерпретация свойств (73) заключается в следующем. Согласно (14), опцион всегда предъявляется к исполнению и при увеличении K_1 увеличивается величина возможной выплаты по опциону, а за больший доход следует больше платить, что приводит к увеличению цены опциона купли с платежной функцией вида (14) при увеличении K_1 . Согласно (15), (16), опционы предъявляются к исполнению, если $P_T(T^1) < K_1$. Таким образом, при увеличении K_1 уменьшается риск не предъявить опцион к исполнению, а за меньший риск следует больше платить, что приводит к увеличению цен опционов с платежными функциями (15), (16), при увеличении K_1 . Так как K_2 – это максимальная величина, которую владелец опциона может получить при предъявлении к исполнению, то естественно, что цены опционов возрастают при увеличении K_2 , так как за возможность получить больший доход следует больше платить.

Замечание 4. Из (15), (16) следует, что

$$\lim_{K_2 \downarrow 0} f_T^{\max 2} = \tilde{f}_T, \quad \lim_{K_2 \uparrow K_1} f_T^{\min} = \tilde{f}_T, \quad (80)$$

где
$$\tilde{f}_T = (K_1 - P_T(T^1))^+ \quad (81)$$

может быть определена как платежная функция стандартного опциона продажи, соответствующая экзотическим опционам с платежными функциями (15), (16). В [2] (с. 970 – 979) на основе опосредованного подхода найдена стоимость опциона продажи $\tilde{C}_T$ для стандартной платежной функции вида (81).

Утверждение 4. Пусть $\tilde{C}_T, \tilde{X}_t, \tilde{\gamma}_t, \tilde{\beta}_t$ есть пределы $C_T^{\max 2}, X_t^{\max 2}, \gamma_t^{\max 2}, \beta_t^{\max 2}$ при $K_2 \downarrow 0$ либо $C_T^{\min}, X_t^{\min}, \gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min}$ при $K_2 \uparrow K_1$. Тогда

$$\tilde{C}_T = K_1 \Phi(d_1) - P_0(T^1) \Phi(y_1); \quad (82)$$

$$\tilde{X}_t = K_1 B(t) \Phi(d_1(t)) - P_t(T^1) \Phi(y_1(t)); \quad (83)$$

$$\tilde{\gamma}_t = -\Phi(y_1(t)), \tilde{\beta}_t = K_1 \Phi(d_1(t)). \quad (84)$$

Доказательство. Из (17), (18) следует, что $d_2(t) = d_1(t)$, $y_2(t) = y_1(t)$ при $K_2 = 0$. Таким образом, формулы (82) – (84) следуют из (55) – (58) с учетом (22) – (24). Аналогично $d_2(t) = -\infty$, $y_2(t) = -\infty$ при $K_2 = K_1$. Тогда с учетом свойств $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$ формулы (82) – (84) также следуют из (62) – (65).

Утверждение 5. Стоимости опционов $C_T^{\max 1}$, $C_T^{\max 2}$, $C_T^{\min}$, $\tilde{C}_T$ связаны следующими соотношениями:

$$C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2} > \tilde{C}_T > C_T^{\min}. \quad (85)$$

Доказательство. Свойство $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$ следует непосредственно из (56). Свойства $C_T^{\max 2} > \tilde{C}_T > C_T^{\min}$ следуют из того, что, согласно (73), $C_T^{\max 2}$ и $C_T^{\min}$ являются возрастающими функциями K_2 и при этом, согласно утверждению 4, $\lim C_T^{\max 2} = \tilde{C}_T$ при $K_2 \downarrow 0$ и $\lim C_T^{\min} = \tilde{C}_T$ при $K_2 \uparrow K_1$.

Экономическая интерпретация свойств (85) заключается в следующем. Поскольку в случае стандартных опционов с платежной функцией (81) отсутствуют ограничения на величину выплаты по опциону, то цена экзотического опциона с платежной функцией (16) меньше цены стандартного опциона, так как за наличие ограничений, уменьшающих величину возможного дохода, следует меньше платить. Цены экзотических опционов с платежными функциями (14), (15) больше цены стандартного опциона, так как за наличие возможности получения гарантированного дохода следует больше платить. При этом $C_T^{\max 1} > C_T^{\max 2}$, так как платежная функция $f_T^{\max 2}$ содержит дополнительное условие, в котором заключена возможность непредъявления опциона к исполнению, а за возрастающий риск следует меньше платить.

Приведем результаты для двух широко используемых моделей цен облигаций [1 – 3, 10, 11]. Для модели Хо – Ли $b(t) \equiv 0$, $d(t) \equiv d$, а для модели Васичека $b(t) \equiv b$, $d(t) \equiv d$. Тогда для модели Хо – Ли

$$\sigma_T(T^1)B_T(T^1) = \left(\frac{d^2}{3} [(T^1 - T)^3] \right)^{\frac{1}{2}} (T^1 - T), \quad (86)$$

а для модели Васичека

$$\sigma_T(T^1)B_T(T^1) = \frac{d}{b} \left(\frac{1}{2b} (1 - \exp\{-2bT\}) \right)^{\frac{1}{2}} (1 - \exp\{-b(T^1 - T)\}). \quad (87)$$

Утверждение 6. Для моделей Хо – Ли и Васичека справедливы теоремы 1 – 3 и утверждения 3 – 5, в которых величины $\sigma_T(T^1)B_T(T^1)$ выражаются соответственно формулами (86) и (87).

Заключение

Основные результаты заключаются в следующем:

1. Получены аналитические выражения для стоимостей опционов, хеджирующих стратегий (портфелей) и капиталов для опционов продажи с платежными функциями (14) – (16) (теоремы 1 – 3).

2. Проведено исследование свойств решения (утверждения 3 – 5).
3. Все общие результаты для опционов продажи с платежными функциями (14) – (16) конкретизированы для моделей Хо – Ли и Васичека (утверждение 6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
3. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. М.: ГУВШЭ, 2001.
4. Буренин А.Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. М.: Тривола, 1995.
5. Wilmott P. Derivatives: The Theory and Practice Financial Engineering. N.Y.: John Willey, 2000.
6. Rubinstein M. Exotic options // Finance Working Paper. Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991. No. 220.
7. Zang P.G. An introduction to exotic options // European Financ. Manag. 1995. V. 1 No. 1. P. 87 – 95.
8. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. 1992. V. 60. No. 1. P. 77 – 105.
9. Бьорк Т. О временной структуре разрывных процентных ставок // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 627 – 657.
10. Hull J., White A. Pricing interest rate derivative securities // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. No. 5. P. 573 – 592.
11. Hull J., White A. Bond option pricing on a model for the evolution of bond prices // Advances in Futures and Options Research. 1993. No. 6. P. 1 – 13.

Демин Николай Сергеевич

Толстобоков Вячеслав Васильевич

Томский государственный университет

E-mail: dyomin@fpmk.tsu.ru; 4tvv@rambler.ru

Поступила в редакцию 26 декабря 2009 г.