ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 2(11)

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872

А.Е. Горбатенко

АСИМПТОТИКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМЫ MAP|GI|∞ В УСЛОВИИ РАСТУЩЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА[1]

Для исследования системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и с входящим MAP-потоком предложен метод асимптотического анализа в условиях растущей интенсивности. Найдена асимптотика произвольного порядка и приведены асимптотическое и имитационное распределения числа занятых приборов в системе.

Ключевые слова: *MAP-поток, система массового обслуживания с неограниченным числом приборов, асимптотический анализ, условие растущей интенсивности, распределение вероятностей числа занятых приборов.*

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом приборов являются адекватными математическими моделями реальных систем и процессов в различных предметных областях: экономике, телекоммуникации, сетях связи и т.д.

Исследованию таких систем массового обслуживания посвящены работы [1 – 7]. Многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, в частности телекоммуникационных потоков, а также потоков в экономических системах, выполненные зарубежными и отечественными специалистами, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей (пуассоновских, рекуррентных) реальных потоков. Исследователи, занимающиеся потоками, разработали схемы специальных потоков (поток Кокса, рекуррентный поток фазового типа, марковский модулированный поток (MMPP), марковский поток однородных событий (MAP), групповой марковский поток однородных событий (BMAP)). Также представлены работы по изучению СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступают специальные потоки. В работах Д. Баум [8], Л. Броер [9], были рассмотрены СМО BMAP|GI|∞, COX|GI|∞, получено асимптотическое распределение числа занятых приборов в условии растущего времени обслуживания.

В данной работе рассматривается система MAP|GI|∞**.** Находится асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе в условии растущей интенсивности входящего потока и конечной загрузке. Эти условия имеют принципиальное отличие от условия растущего времени обслуживания.

---

[1] Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)», проект № 4761.

1. Метод асимптотического анализа

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP-поток заявок [10, 11], управляемый эргодической цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей Q инфинитезимальных характеристик $q_{k\nu}$, набором неотрицательных величины $\lambda_k^{(1)} \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k\nu}$ при всех $k \neq \nu$.

Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют заданную функцию распределения $B_1(x)$.

Для исследования немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов предложен метод просеянного потока [10]. Этот метод заключается в том, что в некоторый момент времени $t \in [t_0, t_1]$ заявка входящего потока, поступившая в систему, с вероятностью $S_1(t) = 1 - B_1(t_1 - t)$ формирует событие просеянного потока (рис. 1).

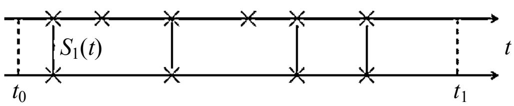

Рис.1. Метод просеянного потока

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших на интервале $[t_0, t_1\ ]$, $i(t)$ – число занятых приборов в системе массового обслуживания на момент времени t.

Если в начальный момент времени t_0 система свободна, в ней нет заявок, то для момента времени t_1 выполняется равенство:

$$i(t_1) = n(t_1). \tag{1}$$

Задача исследования системы массового обслуживания сводится к задаче анализа нестационарного просеянного потока $n(t)$ при $t_0 < t < t_1$ [12].

Двумерный случайный процесс $\{k(t), n(t)\}$ является нестационарной двумерной цепью Маркова [12].

Для распределения вероятностей

$$P(k,n,t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\},$$

полагая $d_{kk} = 0$, нетрудно показать, что $P(k, n, t)$ этой системы удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(k,n,t)}{\partial t} = \sum_{\nu} \{P(\nu,n,t) + S_1(t)[P(\nu,n-1,t) - P(\nu,n,t)]d_{\nu k}\}q_{\nu k} +$$

$$+S_1(t)[P(k,n-1,t) - P(k,n,t)]\lambda_k^{(1)}. \tag{2}$$

Начальное условие для решения $P(k, n, t)$ в момент времени t_0 определим в виде

$$P(k,n,t_0) = \begin{cases} R(k), & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $R(k)$ – стационарное распределение вероятностей состояния цепи Маркова $k(t)$.

Обозначим

$$H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(k,n,t) = R(k) M\{e^{jun(t)} \mid k(t) = k\}, \tag{4}$$

из (2) и начальных условий (3) получим для этих функций задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(k,u,t)}{\partial t} = \sum\limits_{\nu} H(\nu,u,t)\{1+S_1(t)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k} + S_1(t)(e^{ju}-1)H(k,u,t)\lambda_k^{(1)}, \\ H(k,u,t_0) = R(k), \quad t_0 \le t \le t_1. \end{cases} \tag{5}$$

Задача исследования системы массового обслуживания сводится к нахождению распределения вероятностей $P(n)=\sum\limits_{k} P(k,n,t_1)$, где распределение $P(k,n,t_1)$ определяется функциями $H(k,n,t_1)$.

Поставленную задачу будем решать в асимптотическом условии растущей интенсивности входящего MAP-потока.

Условием растущей интенсивности MAP-потока будем называть соотношения

$$\lambda_k^{(1)} = N\cdot\lambda_k,\ N\to\infty, \tag{6}$$

определяющие большие значения интенсивности потока.

С учетом (6) систему (5) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(k,u,t,N)}{\partial t} = \sum\limits_{\nu} H(\nu,u,t,N)\{1+S_1(t)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k} + S_1(t)(e^{ju}-1)H(k,u,t,N)\lambda_k N, \\ H(k,u,t_0,N) = R(k),\ t_0 \le t \le t_1. \end{cases} \tag{7}$$

Для системы массового обслуживания будем рассматривать условие конечной загрузки:

$$b^{(1)} = b/N,\ N\to\infty \tag{8}$$

и равномерной ограниченности $\lambda_k^{(1)}\cdot b^{(1)} \le C-const$ условных загрузок, где $b^{(1)} = \int\limits_0^\infty (1-B_1(x))\,dx$ – среднее время обслуживания заявки.

В заданных условиях найдем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе массового обслуживания произвольного порядка.

2. Асимптотика первого порядка

Аналогично [13] обозначим $\delta = 1/N$ и в задаче (7) с учетом (8) выполним следующие замены:

$$t=\frac{\tau}{N},\quad S_1(t)=S(\tau),\quad H(k,u,t,N)=F(k,u,\tau,\delta), \tag{9}$$

получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(k,u,\tau,\delta)}{\partial \tau} = \delta\sum\limits_{\nu} F(\nu,u,\tau,\delta)\{1+(e^{ju}-1)d_{\nu k}\}q_{\nu k} + S(\tau)(e^{ju}-1)F(k,u,\tau,\delta)\lambda_k, \\ F(k,u,\tau_0,\delta) = R(k), \quad \tau_0 \le \tau \le \tau_1, \end{cases} \tag{10}$$

где $\tau_0 = t_0 N,\ \tau_1 = t_1 N$.

Теорема 1. Если управляющая MAP-потоком цепь Маркова $k(t)$ имеет конечное число состояний, то для решения $F(k, u,\tau, \delta)$ задачи (10) существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} F(k,u,\tau,\delta) = F_1(k,u,\tau), \tag{11}$$

где функция $F_1(k, u,\tau)$ имеет вид

$$F_1(k,u,\tau) = R(k)\exp\left\{(e^{ju}-1)\lambda_k \int_{\tau_0}^{\tau} S(x)\,dx\right\}. \qquad (12)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой Пуанкаре [14] об аналитической зависимости решения от параметра можно утверждать, что существует предел (11).

В задаче (10) выполним предельный переход при $\delta\to 0$, для $F_1(k,u,\tau)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(k,u,\tau)}{\partial\tau} = S(\tau)(e^{ju}-1)F_1(k,u,\tau)\lambda_k, \\ F_1(k,u,\tau_0) = R(k), \quad \tau_0 \le \tau \le \tau_1. \end{cases} \qquad (13)$$

Отметим, что при таком предельном переходе задача Коши (10) для системы дифференциальных уравнений обращается в совокупность задач Коши (13) независимых дифференциальных уравнений. Из задач Коши (13) функции $F_1(k,u,\tau)$ определяются равенствами (12).

Теорема доказана.

Следствие 1. Асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени t, имеет следующий вид:

$$P_1(n,t) = \sum_k R(k)\frac{1}{n!}\left(\lambda_k \int_{t_0}^{t} S(x)dx\right)^n e^{-\lambda_k \int_{t_0}^{t} S(x)dx}. \qquad (14)$$

Доказательство. Просуммируем (12) по k и, выполнив обратную к (9) замену $\tau = tN$, получим

$$\sum_k F_1(k,u,\tau) = \sum_k R(k)\exp\left\{(e^{ju}-1)\lambda_k \int_{t_0}^{t} S(x)\,dx\right\} = h(u,t), \qquad (15)$$

где $h(u,t)$ – асимптотическая при $\delta\to 0$ ($N\to\infty$) функция, аналогичная характеристической, числа наступивших событий в просеянном потоке до момента времени t.

Разложив экспоненту в ряд, получим следующее равенство:

$$h(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}\sum_k R(k)\frac{1}{n!}\left(\lambda_k \int_{t_0}^{t} S(x)dx\right)^n e^{-\lambda_k \int_{t_0}^{t} S(x)dx}. \qquad (16)$$

Для достаточно малых δ (больших N) выполняется приближенное (асимптотическое) равенство:

$$H(k,u,t) = F(k,u,\tau,\delta) \approx F(k,u,\tau). \qquad (17)$$

С другой стороны, $H(k,u,t)$ определяется равенством (3). Также просуммировав (4) по k, получим

$$H(u,t) = \sum_k H(k,u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}\sum_k P(k,n,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P(n,t). \qquad (18)$$

Просуммировав по k (17), в силу (15), получим следующее асимптотическое равенство:

$$H(u,t) \approx h(u,t).$$

Из полученного асимптотического равенства, в силу (16) и (18), получим (14), где $P(n,t) \approx P_1(n,t)$.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Асимптотическое стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе имеет следующий вид:

$$P_1(i) = \sum_k R(k) \frac{(\rho_k)^i}{i!} e^{-\rho_k}, \tag{19}$$

где $\rho_k = \lambda_k b, \; b = \int_0^\infty (1 - B(x))\, dx$.

Доказательство. В (14) положим $t = t_1 = 0$ и $t_0 \to -\infty$, получим

$$P_1(n,0) = \sum_k R(k) \frac{1}{n!} \left(\lambda_k \int_{-\infty}^{0} S(x) dx \right)^n e^{-\lambda_k \int_{-\infty}^{0} S(x) dx} = \sum_k R(k) \frac{1}{n!} (\lambda_k b)^n e^{-\lambda_k b}.$$

В силу условия (1)

$$P_1(n,0) = P_1(i,0) = P_1(i).$$

Таким образом, асимптотическое стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов в системе имеет вид (19), где $P(i) \approx P_1(i)$.

Следствие доказано.

Распределение вероятностей $P_1(i)$ является взвешенной суммой с весами $R(k)$ пуассоновских распределений, поэтому рассматриваемое распределение может быть многомодальным [11].

3. Асимптотика произвольного порядка

Аппроксимацию первого порядка можно существенно уточнить, рассматривая асимптотики более высокого порядка, полагая

$$P(i) = P_1(i) + \sum_{s>1} \delta^s f_s(i).$$

Под асимптотикой n-го порядка будем понимать асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе массового обслуживания, которое находится по следующей формуле:

$$P(i) = \sum_{s=0}^{n} \delta^s f_s(i), \tag{20}$$

где

$$f_s(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jui} F_s(u) du, \tag{21}$$

$$F_s(u) = \sum_k F_s(k,u,0), \text{ при } \tau = \tau_1 = 0 \text{ и } \tau_0 \to -\infty.$$

Для нахождения функций $F_s(k,u,\tau)$, решение $F(k,u,\tau,\delta)$ задачи (10) запишем в виде разложения

$$F(k,u,\tau,\delta) = \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s F_{s+1}(k,u,\tau). \tag{22}$$

Теорема 2. Для функций $F_s(k,u,\tau)$ имеет место рекуррентное равенство

$$F_{s+1}(k,u,\tau)=\sum_{\nu} q_{\nu k}\int_{\tau_0}^{\tau}\left\{1+S(z)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}F_s(\nu,u,z)\times$$
$$\times\exp\left\{(e^{ju}-1)\lambda_k\int_z^{\tau}S(x)dx\right\}dz,\ \ s>1. \tag{23}$$

Доказательство. Подставим разложение (22) в задачу (10), получим

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{\infty}\delta^s\dfrac{\partial F_{s+1}(k,u,\tau)}{\partial\tau}=\lambda_k S(\tau)(e^{ju}-1)\sum\limits_{s=0}^{\infty}\delta^s F_{s+1}(k,u,\tau)+\\ \qquad\qquad +\sum\limits_{s=1}^{\infty}\delta^s\sum\limits_{\nu}F_{s+1}(\nu,u,\tau)\left\{1+S(\tau)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},\\ \sum\limits_{s=0}^{\infty}\delta^s F_{s+1}(k,u,\tau_0)=R(k).\end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ при $s>0$, для $F_{s+1}(k,u,\tau)$ получим следующие задачи Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_{s+1}(k,u,\tau)}{\partial\tau}=S(\tau)(e^{ju}-1)\lambda_k F_{s+1}(k,u,\tau)+\sum\limits_{\nu}F_s(\nu,u,\tau)\left\{1+S(\tau)(e^{ju}-1)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},\\ F_{s+1}(k,u,\tau_0)=0,\end{cases}$$

в которых системы распадаются на совокупность независимых задач Коши для неоднородных уравнений и с нулевыми начальными условиями. Решение этих задач имеет вид (23).

Теорема доказана.

Получим явный вид для функций $F_s(k,u,\tau)$. Применим метод математической индукции, для этого подставим (12) в (23) при s = 1, полученное выражение подставим в (23) при s = 2 и т.д. В результате получим следующее равенство:

$$F_s(k_s,u,z_s)=\sum_{k_{s-1}}\ldots\sum_{k_1}R(k_1)\left(\prod_{l=1}^{s-1}q_{k_l,k_{l+1}}\right)\cdot\int_{z_0}^{z_s}\int_{z_0}^{z_{s-1}}\ldots\int_{z_0}^{z_2}\left\{\prod_{l=1}^{s-1}\left\{1+S(z_l)(e^{ju}-1)d_{k_l,k_{l+1}}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{(e^{ju}-1)\sum_{l=1}^{s}\lambda_{k_l}\int_{z_{l-1}}^{z_l}S(x)dx\right\}\right\}dz_1\ldots dz_{s-2}dz_{s-1}, \tag{24}$$

где $z_s=\tau,\ z_0=\tau_0$.

Просуммируем по k_s (24), полагая $\tau=\tau_1=0$ и $\tau_0\to-\infty$, найдём функцию

$$F_s(u)=\sum_{k_s}F_s(k_s,u,z_s)=$$
$$=\sum_{k_s}\sum_{k_{s-1}}\ldots\sum_{k_1}R(k_1)\left(\prod_{l=1}^{s-1}q_{k_l,k_{l+1}}\right)\cdot\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z_{s-1}}\ldots\int_{-\infty}^{z_2}\left\{\prod_{l=1}^{s-1}\left\{1+S(z_l)(e^{ju}-1)d_{k_l,k_{l+1}}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{(e^{ju}-1)\left[\lambda_{k_s}b+\sum_{l=1}^{s-1}\left(\lambda_{k_l}-\lambda_{k_s}\right)\int_{z_{l-1}}^{z_l}S(x)dx\right]\right\}\right\}dz_1\ldots dz_{s-2}dz_{s-1}. \tag{25}$$

Подставим (25) в (21), а затем, воспользовавшись разложением (20), найдем асимптотику n-го порядка.

4. Область применимости асимптотических результатов к допредельной ситуации

Выше были получены формулы, позволяющие найти асимптотическое распределение числа занятых приборов. Допредельное распределение можно получить с помощью имитационного моделирования [15, 16]. Остается выяснить, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к результатам имитационного моделирования системы массового обслуживания в допредельной ситуации. Для этого рассматривается имитационная модель данной системы и строятся оценки $\hat{P}(i)$ значений вероятностей числа заявок в системе. По оценкам значений вероятностей числа заявок в системе строятся следующие величины:

$$\hat{F}(i) = \sum_{m=0}^{i} \hat{P}(m), i = 0,1,2,...$$

и находится расстояние Колмогорова:

$$\Delta_s = \max_i \left| \hat{F}(i) - F_s(i) \right|,$$

где $\hat{F}(i)$ – функция распределения, полученная с помощью имитационного моделирования, $F_s(i)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа.

Пусть

$$Q = \begin{Bmatrix} -0,03 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & -0,04 & 0,01 \\ 0,04 & 0,02 & -0,06 \end{Bmatrix},$$

$$d = \begin{Bmatrix} 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\lambda^{(1)} = N\{2 \;\; 7 \;\; 18\}.$$

Время обслуживания заявок распределено по равномерному закону на интервале [0, 2 $b^{(1)}$], где $b^{(1)} = 2/N$. В этом случае значения величины Δ_s, s = 1, 2, составили:

N	30	50
Δ_1	0.0182	0.0144
Δ_2	0.0163	0.0127

На рис. 2 показаны распределения вероятностей числа занятых приборов (числа заявок в системе), полученных с помощью имитационного моделирования и асимптотического анализа.

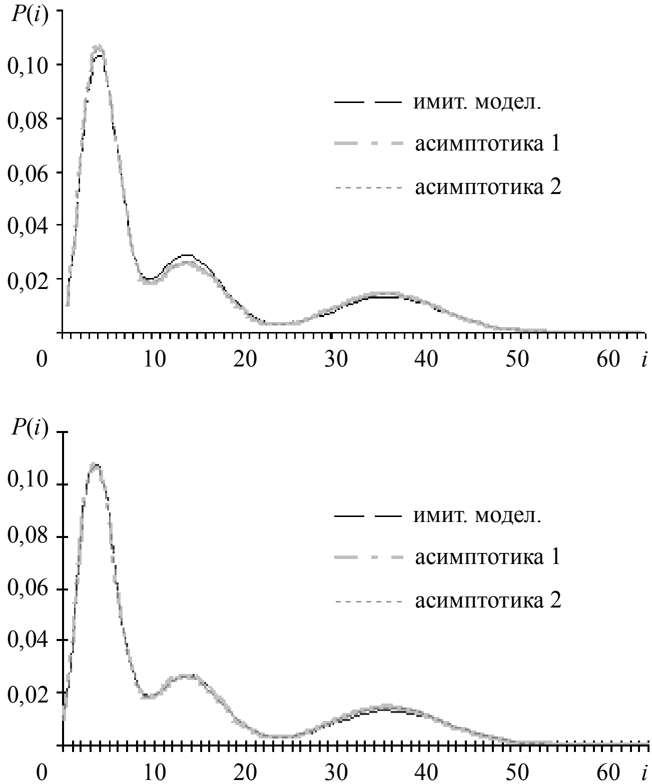

Рис. 2. Распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

Заключение

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания MAP|GI|∞. С помощью метода просеянного потока и метода асимптотического анализа найдена асимптотика произвольного порядка. Сравнив полученные асимптотические распределения первого и второго порядка с результатами имитационного моделирования, можно сказать, что точность полученного асимптотического распределения достаточно велика, так как расстояние Колмогорова не более 0,02. Полученное распределение также является многомодальным. Это имеет принципиальное значение при численных реализациях, так как условием останова для численных алгоритмов обычно является достижение определенного достаточно малого значения вероятности, которое может достигаться в окрестности некоторого локального минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Decreusefond L.*, *Moyal P*. A functional central limit theorem for the M/GI/∞ queue // Ann. Appl. Probab. 2008. V .18. No 6. P. 156 – 178.
2. *Tsoukato K.P.*, *Makowski A.M.* Heavy Traffic Analysis for A Multiplexer Driven by M/GI/infinity Input Processes [Электронный ресурс]. URL: http://handle.dtic.mil/100.2/ADA455583
3. *Van Doorn E.A.*, *Jagers A. A.* A Note on the GI/GI/infinity system with identical service and interarrival-time distributions // J. Queueing Systems. 2004. No. 47. P. 45 – 52.

4. *Pang G.*, *Whitt W.* Two-Parameter Heavy-Traffic Limits for Infinite-Server Queues Probability Surveys. 2008. V. 0. P. 1 – 56.
5. *Shore H.* Simple Approximations for the GI/G/c queue // J. Operational Research Society. 1988. No. 39. P. 279 – 284.
6. *Baykal-Gursoy M.*, *Xiao W.* Stochastic Decomposition in M/M/∞ queues with Markov Modulated Service Rates. Queueing Systems // Theory and Applications. 2004. V. 48. P. 75 – 88.
7. *Baltzer J.C.* On the fluid limit of the M/G/∞ queue queueing systems // Theory and Applications. 2007. V. 56. P. 255 – 265.
8. *Baum D.*, *Kalashnikov V.* No-Waiting stations with spatial arrival processes and customer motion // Информационные процессы. 2002. Т. 2. № 2. С. 143 – 145.
9. *Breuer L.*, *Baum D.* The Inhomogeneous BMAP/G/infinity Queue // MMB. 2001. P. 209 – 223.
10. *Назаров А.А.*, *Моисеева А.А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
11. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 2007. 336 с.
12. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
13. *Горбатенко А.Е.*, *Назаров А.А.* Исследование системы MAP|GI|∞ в условии растущей интенсивности входящего потока // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. статей Международной научной конференции. Минск: Издательский центр БГУ, 2008. С. 52 – 56.
14. *Эльсгольц Л.Е.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
15. *Марголис Н.Ю.*, *Терпугов А.Ф.* Имитационное моделирование случайности: учебно-справочное пособие. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. 63 с.
16. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем. М.: Мир, 1978.

Горбатенко Анна Евгеньевна
Томский государственный университет
E-mail: anngo86@mail.ru

Поступила в редакцию 21 ноября 2009 г.