

УДК 519.21

А.М. Горцев, В.Л. Зуевич

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Решена задача оптимальной оценки состояний асинхронного дважды стохастического потока на основе наблюдений за моментами наступления событий. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Получен явный вид апостериорных вероятностей для любого момента времени. Приведены результаты статистических экспериментов по оценке состояний потока.

Ключевые слова: асинхронный дважды стохастический поток событий, оптимальная оценка состояний, цифровые сети интегрального обслуживания.

Математические модели теории массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась еще одна важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей связи, телекоммуникационных сетей и т.п. Усложнение структуры информационно-телекоммуникационных систем, интеграция различных систем связи, разнообразие программного и аппаратного обеспечения, протоколов передачи данных привели в конце 80-х – начале 90-х годов прошлого века к созданию цифровых сетей интегрального обслуживания (Integrated Services Digital Networks – ISDN). Данные сети характеризуются тем, что по единым аппаратным средствам совместно передаются самые разнообразные виды информации – большие массивы данных, речь и видео в цифровой форме, факсимиле и т.д. При этом теория построения математических моделей функционирования информационно-телекоммуникационных систем, существовавшая до середины 80-х годов прошлого века, во многом становится непригодной для анализа информационных процессов, протекающих в ISDN. В связи с этим в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах так называемых дважды стохастических потоков. Отметим, что одними из первых работ в этом направлении были статьи [1 – 3].

Дважды стохастические потоки характеризуются тем, что их интенсивность изменяется со временем по некоторому случайному закону, т.е. является случайным процессом. В зависимости от вида случайного процесса дважды стохастические потоки можно разделить на два класса. К первому классу относятся потоки с интенсивностью, являющейся непрерывным случайным процессом. Ко второму – потоки, у которых интенсивность есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний (под состоянием потока обычно понимают состояние

интенсивности потока). Последние (потоки с переключениями или МС-потоки событий [1, 2]) являются наиболее характерными для реальных телекоммуникационных сетей. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий [4 – 8]; 2) асинхронные потоки событий – потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий [9 – 23]; 3) полусинхронные потоки событий – потоки, у которых для одного множества состояний справедливо определение первого типа, а для остальных состояний – второго типа [24 – 28].

Подчеркнем, что синхронные, асинхронные и полусинхронные потоки можно представить в виде моделей МАР (Markovian Arrival Process)-потоков событий [29 – 31].

В реальных ситуациях параметры, определяющие входящий поток событий, не только дважды стохастический, как правило, известны либо частично, либо вообще неизвестны. Что касается состояний дважды стохастического потока, то даже тогда, когда параметры, его определяющие, априорно известны, сказать о том, в каком состоянии находится поток в тот или иной момент времени без наблюдения за потоком, возможно только на основании априорных данных. С другой стороны, очевидно, что функционирование системы обслуживания непосредственно зависит от параметров дважды стохастического потока и состояний, в которых он находится. В связи с этим в процессе функционирования системы обслуживания возникает необходимость адаптироваться к временным изменениям состояний дважды стохастического потока. При этом возникают два класса задач: 1) задача фильтрации интенсивности потока (или задача оценивания состояний потока событий) по наблюдениям за потоком (по наблюдениям за моментами наступления событий) [4, 7, 9 – 11, 13, 15, 22 – 25]; 2) задача оценивания параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [5, 6, 8, 12, 14, 16 – 21, 26 – 28].

В настоящей статье рассматривается дважды стохастический поток событий второго типа – асинхронный поток событий. Подчеркнем, что в [9 – 11, 13, 15, 22, 23] решены задачи фильтрации, в [12, 14, 16 – 21] – задачи оценки параметров асинхронных дважды стохастических потоков событий в различных условиях, когда число состояний потока равно двум. Полученные в [9 – 11, 13, 15, 22, 23] результаты по оценке состояний асинхронных потоков можно разделить на три группы: 1) результаты по оценке состояний асинхронных потоков с дополнительными (лишними) событиями без ошибок в измерениях моментов времени наступления событий [22, 23]; 2) результаты по оценке состояний асинхронного потока без дополнительных (лишних) событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени наступления событий [11, 13, 15]; 3) результаты по оценке состояний асинхронного потока без дополнительных (лишних) событий и без ошибок в измерениях моментов времени наступления событий [9, 10].

В настоящей статье решается задача об оптимальной оценке состояний асинхронного дважды стохастического потока с произвольным (конечным) числом состояний без дополнительных (лишних) событий и без ошибок в измерениях моментов времени наступления событий (далее асинхронный поток либо просто по-

ток), т.е. результаты [10] обобщаются на случай произвольного числа состояний асинхронного потока. Находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний асинхронного потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений, и которая обеспечивает минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [32].

1. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный поток событий. Интенсивность потока – кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с n состояниями: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$). Процесс (поток) в момент времени t находится в i -м состоянии, если $\lambda(t) = \lambda_i$ ($i = \overline{1, n}$). В течение времени пребывания в i -м состоянии поток ведет себя как пуассоновский с интенсивностью λ_i ($i = \overline{1, n}$). Длительность пребывания потока в i -м состоянии является экспоненциально распределенной случайной величиной с функцией распределения $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ii}\tau}$, где $\alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$); $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j = \overline{1, n}, i \neq j$) – интенсивность перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j , т.е. величины α_{ij} образуют матрицу интенсивностей (матрицу инфинитезимальных коэффициентов) переходов между состояниями $\|\alpha_{ij}\|_1^n$. Процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым. Наблюдению доступны только временные моменты наступления событий потока. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$.

Состояние потока в момент времени t оценивается на основании последовательности временных моментов наступления событий, наблюдаемых от момента t_0 до момента t . Пусть $\hat{\lambda}(t)$ – оценка состояния потока в момент времени t ; $\omega(\lambda_i | t_1, t_2, \dots, t_m)$ ($i = \overline{1, n}$) – апостериорная вероятность того, что $\lambda(t) = \lambda_i$ при условии, что за время наблюдения за потоком наступило m событий в моменты t_1, t_2, \dots, t_m . При этом $\sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t_1, t_2, \dots, t_m) = 1$. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности [32]. Согласно этому критерию,

$$\hat{\lambda}(t) = \lambda_j, \text{ если } \omega(\lambda_j | t_1, t_2, \dots, t_m) \geq \omega(\lambda_i | t_1, t_2, \dots, t_m), \quad j = \overline{1, n}.$$

2. Вывод рекуррентного соотношения для апостериорных вероятностей состояний потока

Согласно методике [32], рассмотрим дискретные наблюдения за потоком через достаточно малые промежутки времени длительности Δt и получим рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей.

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$ и время t изменяется дискретно с конечным шагом Δt : $t = k\Delta t$ ($k = 0, 1, \dots$). Рассмотрим двумерный случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}, k = 0, 1, \dots$); r_k – число событий, наблюдаемых на интервале времени $((k - 1)\Delta t, k\Delta t)$, ($r_k = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots$). Поскольку на интервале $(-\Delta t, 0)$ наблюдений не производится, то r_0 можем положить произвольным, например положить $r_0 = 0$. Обозначим $\vec{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ – последовательность ненаблюдаемых значений процесса $\lambda(t)$ в моменты времени $k\Delta t$ ($k = \overline{0, m}$). Обозначим $\vec{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ – последовательность значений количества наблюдаемых событий на временных интервалах $((k - 1)\Delta t, k\Delta t)$ ($k = \overline{0, m}$). Для нахождения рекуррентного соотношения докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Процесс $\lambda(t)$ является транзитивным марковским.

Доказательство. Рассмотрим два произвольно выбранных момента времени τ и $\tilde{\tau}$, $\tau > \tilde{\tau}$. Обозначим $P(\lambda(\tau) = \lambda_j | \lambda(t), t < \tilde{\tau}; \lambda(\tilde{\tau}) = \lambda_i)$ ($i, j = \overline{1, n}$) – вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в j -м состоянии при условии, что его траектория до момента $t = \tilde{\tau}$ есть $\lambda(t)$ и в момент времени $\tilde{\tau}$ процесс $\lambda(t)$ находился в i -м состоянии. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии ($i = \overline{1, n}$) является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение. Таким образом, длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии после момента $\tilde{\tau}$ не зависит от траектории процесса $\lambda(t)$ до момента $t = \tilde{\tau}$. Тогда

$$P(\lambda(\tau) = \lambda_j | \lambda(t), t < \tilde{\tau}; \lambda(\tilde{\tau}) = \lambda_i) = P(\lambda(\tau) = \lambda_j | \lambda(\tilde{\tau}) = \lambda_i).$$

Отсюда следует марковость процесса $\lambda(t)$.

Вероятность перехода процесса $\lambda(t)$ за время Δt из состояния i в состояние j ($i, j = \overline{1, n}, i \neq j$), в соответствии с определением потока, есть

$$P(\lambda(\tau + \Delta t) = \lambda_j | \lambda(\tau) = \lambda_i) = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t) > 0,$$

то есть за время Δt процесс $\lambda(t)$ с отличной от нуля вероятностью может перейти из состояния i в отличное от него состояние j . Вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ останется в состоянии i , запишется в виде

$$P(\lambda(\tau + \Delta t) = \lambda_i | \lambda(\tau) = \lambda_i) = 1 - \Delta t \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} + o(\Delta t).$$

Величину Δt здесь можно подобрать так, что будет соблюдаться неравенство

$$P(\lambda(\tau + \Delta t) = \lambda_i | \lambda(\tau) = \lambda_i) > 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Таким образом, существует время Δt , за которое процесс $\lambda(t)$ может перейти из текущего состояния в любое другое состояние (в том числе остаться в текущем состоянии) с отличной от нуля вероятностью. Получили определение транзитивного марковского процесса. *Лемма доказана.*

Лемма 2. Случайный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$ является марковским.

Доказательство. Рассмотрим моменты времени $m\Delta t$ и $(m + 1)\Delta t$. Обозначим $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \vec{\lambda}^{(m)}, \vec{r}_m)$ – переходную вероятность того, что $\lambda((m + 1)\Delta t) = \lambda^{(m+1)}$ и на

полуинтервале времени $[m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ произошло r_{m+1} событий потока при условии, что $\lambda(k\Delta t) = \lambda^{(k)}$ ($k = \overline{0, m}$) и на полуинтервалах времени $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ ($k = \overline{0, m}$) наблюдалось r_k событий потока соответственно.

Согласно лемме 1, процесс $\lambda(t)$ – марковский. В силу конструкции процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ компонента r_k – число событий на полуинтервале $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ – не влияет на компоненту $\lambda^{(k)}$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t = k\Delta t$. Наоборот, компонента $\lambda^{(k)}$ не влияет на компоненту r_k . Дальнейшее поведение процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ не зависит от предыстории до момента времени $k\Delta t$, так как длительность каждого состояния потока имеет экспоненциальное распределение, и в каждом состоянии поток ведет себя как простейший. Тогда переходная вероятность примет вид

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \bar{\lambda}^{(m)}, \bar{r}_m) = p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m).$$

Полученное равенство доказывает марковость случайного процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$. Лемма доказана.

Пусть $\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1})$ – апостериорная вероятность того, что $\lambda((m+1)\Delta t) = \lambda^{(m+1)}$ ($\lambda^{(m+1)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}$) при условии, что на полуинтервалах времени $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ ($k = \overline{0, m+1}$) наблюдалось r_k событий потока соответственно; $\omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m)$ – апостериорная вероятность того, что $\lambda(m\Delta t) = \lambda^{(m)}$ ($\lambda^{(m)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}$) при условии, что на полуинтервалах времени $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ ($k = \overline{0, m}$) наблюдалось r_k событий потока соответственно. Обозначим $p(r_{m+1} | \lambda^{(m)})$ – вероятность того, что на полуинтервале $[m\Delta t, (m+1)\Delta t)$ наблюдается r_{m+1} событий при условии, что $\lambda(m\Delta t) = \lambda^{(m)}$ ($\lambda^{(m)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}$); $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})$ – вероятность того, что $\lambda((m+1)\Delta t) = \lambda^{(m+1)}$ ($\lambda^{(m+1)} = \lambda_j, j = \overline{1, n}$) при условии, что $\lambda(m\Delta t) = \lambda^{(m)}$ ($\lambda^{(m)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}$).

Теорема 1. Апостериорная вероятность $\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1})$ определяется рекуррентной формулой

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)})}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)})}. \quad (1)$$

Доказательство. Учитывая формулу для условной вероятности и формулу полной вероятности, имеем

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \frac{\omega(\lambda^{(m+1)}, \bar{r}_{m+1})}{\omega(\bar{r}_{m+1})} = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)}, \bar{r}_{m+1})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)}, \bar{r}_{m+1})}. \quad (2)$$

Подставляя выражение $\omega(\lambda^{(m)}, \bar{r}_{m+1}) = \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)}, \bar{r}_{m+1})$ в (2), находим

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)}, \bar{r}_m, r_{m+1})}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)}, \bar{r}_m, r_{m+1})}. \quad (3)$$

Учитывая, что $\omega(\lambda^{(m+1)}, \lambda^{(m)}, \bar{r}_m, r_{m+1}) = p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \bar{r}_m) \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) \omega(\bar{r}_m)$, пере-пишем (3) в виде

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \bar{r}_m) \omega(\bar{r}_m)}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \bar{r}_m) \omega(\bar{r}_m)}.$$

Сокращая здесь $\omega(\bar{r}_m)$ и учитывая результат леммы 2: $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \bar{r}_m) = p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$, получаем

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}{\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)}. \quad (4)$$

Рассмотрим в (4) переходную вероятность $p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m)$. По формуле для условной вероятности имеем

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}, r_m) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}). \quad (5)$$

Первый сомножитель в (5) запишется в виде

$$p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}),$$

так как на значение процесса $\lambda((m + 1)\Delta t)$ в момент времени $(m + 1)\Delta t$ число наблюдаемых событий r_m на полуинтервале $[(m - 1)\Delta t, m\Delta t)$ не влияет (процесс $\lambda((m + 1)\Delta t)$ «живет своей жизнью»), значение же $\lambda^{(m)}$ процесса $\lambda(m\Delta t)$ в момент времени $m\Delta t$ не зависит от предыстории в силу марковости процесса $\lambda(t)$. Рассмотрим второй сомножитель в (5). Имеем, во-первых, $p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}) = p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})$, так как число событий r_{m+1} , наблюдаемых на полуинтервале $[m\Delta t, (m + 1)\Delta t)$, не зависит от числа событий r_m , наблюдаемых на полуинтервале $[(m - 1)\Delta t, m\Delta t)$, в силу того, что потоки событий во всех состояниях процесса $\lambda(t)$ пуассоновские. Имеем далее

$$p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = \frac{p(\lambda^{(m)}, r_{m+1}, \lambda^{(m+1)})}{p(\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})} = \frac{p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}, r_{m+1}) p(\lambda^{(m)}, r_{m+1})}{p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(\lambda^{(m)})}. \quad (6)$$

Так как на значение процесса $\lambda((m + 1)\Delta t)$ в момент времени $(m + 1)\Delta t$ число наблюдаемых событий r_{m+1} на полуинтервале $[m\Delta t, (m + 1)\Delta t)$, так же как и число

наблюдённых событий r_m на полуинтервале $[(m-1)\Delta t, m\Delta t)$, не влияет, то $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}, r_{m+1}) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})$. Тогда из равенства (6) вытекает

$$p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}).$$

В силу этого (5) приобретает вид

$$p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1} | \lambda^{(m)}, r_m) = p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), приходим к (1). Теорема доказана.

3. Вывод дифференциальных уравнений и формул пересчета для апостериорных вероятностей

Рассмотрим достаточно малый интервал времени $(t, t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$. Поскольку $\lambda^{(m+1)} = \lambda_j$, $\lambda^{(m)} = \lambda_i$ ($i, j = \overline{1, n}$), то в (1) имеем

$$\omega(\lambda^{(m+1)} | \bar{r}_{m+1}) = \omega(\lambda_j | \bar{r}_{m+1}(t + \Delta t)) = \omega(\lambda_j | t + \Delta t), \quad j = \overline{1, n};$$

$$\omega(\lambda^{(m)} | \bar{r}_m) = \omega(\lambda_i | \bar{r}_m(t)) = \omega(\lambda_i | t), \quad i = \overline{1, n};$$

$$p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)}) = p(\lambda_j | \lambda_i), \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$p(r_{m+1} | \lambda^{(m)}) = p(r_{m+1} | \lambda_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

В соответствии с определением асинхронного потока имеют место

$$p(\lambda_j | \lambda_i) = \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t) \quad (i, j = \overline{1, n}, i \neq j); \quad (8)$$

$$p(\lambda_i | \lambda_i) = 1 + \alpha_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \quad (i = \overline{1, n}); \quad (9)$$

$$p(r_{m+1} | \lambda_i) = \frac{(\lambda_i \Delta t)^{r_{m+1}}}{r_{m+1}!} e^{-\lambda_i \Delta t} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Рассмотрим вариант, когда на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ нет событий потока. Это означает, что интервал $(t, t + \Delta t)$ расположен на временной оси между моментами наступления соседних событий, скажем, между моментами t_k и t_{k+1} . Тогда $r_{m+1} = 0$ и, с точностью до членов $o(\Delta t)$, равенство (10) примет следующий вид:

$$p(r_{m+1} = 0 | \lambda_i) = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (11)$$

Лемма 3. В течение времени между моментами наступления соседних событий асинхронного потока апостериорные вероятности состояний потока $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) удовлетворяют следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^n (\alpha_{ij} - \delta_{ij}\lambda_j)\omega(\lambda_i | t) + \omega(\lambda_j | t) \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t),$$

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Доказательство. Обозначим в (1) A – числитель, B – знаменатель. Учитывая введенные обозначения и формулы (8), (9), (11), имеем

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(\lambda_j | \lambda_i) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_i) = \\
 &= (1 - \lambda_j \Delta t + \alpha_{jj} \Delta t) \omega(\lambda_j | t) + \Delta t \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij} \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим B . Находим

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(\lambda_j | \lambda_i) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_i) \sum_{j=1}^n p(\lambda_j | \lambda_i)
 \end{aligned}$$

или, поскольку $\sum_{j=1}^n p(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, то с учетом (11), получаем (с точностью до членов $o(\Delta t)$)

$$B = \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(r_{m+1} = 0 | \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) - \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) = 1$, знаменатель B примет вид

$$B = 1 - \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t). \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (1), находим

$$\omega(\lambda_j | t) = \frac{(1 - \lambda_j \Delta t + \alpha_{jj} \Delta t) \omega(\lambda_j | t) + \Delta t \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij} \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t)}{1 - \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t)}. \quad (15)$$

Раскладывая B^{-1} в ряд Маклорена, получаем

$$B^{-1} = 1 + \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t).$$

С учетом этого разложения, формула (15), с точностью до членов $o(\Delta t)$, выпишется в виде

$$\omega(\lambda_j | t) = (1 - \lambda_j \Delta t) \omega(\lambda_j | t) + \Delta t \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \omega(\lambda_i | t) + \Delta t \omega(\lambda_j | t) \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t).$$

Перенося $\omega(\lambda_j | t)$ в левую часть равенства, деля левую и правую части равенства на Δt и устремляя Δt к нулю, находим

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \omega(\lambda_i | t) - \lambda_j \omega(\lambda_j | t) + \omega(\lambda_j | t) \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Вводя здесь символ Кронекера, приходим к (12). Лемма доказана.

Для решения системы дифференциальных уравнений (12) ее необходимо дополнить начальными условиями: значениями апостериорных вероятностей состояний потока в моменты наступления событий потока и в момент начала наблюдений за потоком. Начальные условия для системы (12) определяются в следующих двух леммах.

Рассмотрим случай, когда на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ наступает одно событие потока. Допустим, что это k -е по счету от начала наблюдений за потоком событие, наступившее в момент времени $t_k (t < t_k < t + \Delta t)$. В этом случае $r_{m+1} = 1$ и формула (10), с точностью до членов $o(\Delta t)$, примет вид

$$p(r_{m+1} = 1 | \lambda_i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (16)$$

Согласно (10), два и более событий на интервале времени $(t, t + \Delta t)$ наступают с вероятностью $o(\Delta t)$, то есть асинхронный поток обладает свойством ординарности. Поэтому случаи $r_{m+1} = 2, 3, \dots$ не рассматриваются.

Лемма 4. Апостериорные вероятности состояний асинхронного потока $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в момент наступления события потока определяются формулой пере-счета:

$$\omega(\lambda_j | t_k + 0) = \frac{\lambda_j \omega(\lambda_j | t_k - 0)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t_k - 0)} \quad (j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Доказательство. Введем величины $\Delta t'$ и $\Delta t''$, такие, что $t = t_k - \Delta t'$, $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$. Пусть по-прежнему A – числитель, B – знаменатель в (1). Тогда, учитывая введенные обозначения и формулы (8), (9), (16), получаем

$$A = \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(\lambda_j | \lambda_i) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_i) = \lambda_j \Delta t \omega(\lambda_j | t_k - \Delta t') + o(\Delta t). \quad (18)$$

Рассмотрим B . Имеем

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(\lambda_j | \lambda_i) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) p(r_{m+1} = 1 | \lambda_i) \sum_{j=1}^n p(\lambda_j | \lambda_i), \end{aligned}$$

или, так как $\sum_{j=1}^n p(\lambda_j | \lambda_i) = 1$, с учетом (16), находим

$$B = \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t_k - \Delta t') + o(\Delta t). \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (1), получаем

$$\omega(\lambda_j | t_k + \Delta t'') = \frac{\Delta t \lambda_j \omega(\lambda_j | t_k - \Delta t') + o(\Delta t)}{\Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t_k - \Delta t') + o(\Delta t)} \quad (j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots).$$

Поделим числитель и знаменатель последней дроби на Δt , после чего устремим Δt к нулю ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ стремятся к нулю одновременно). При этом $t = t_k - \Delta t'$ стремится к t_k слева, $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$ стремится к t_k справа. После предельного перехода получаем (17). В формуле (17) $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ – предел функции $\omega(\lambda_j | t)$ в точке t_k ($k = 1, 2, \dots$) справа, $\omega(\lambda_j | t_k - 0)$ – предел $\omega(\lambda_j | t)$ в той же точке слева. То есть функция $\omega(\lambda_j | t)$ в точке t_k ($k = 1, 2, \dots$) претерпевает разрыв первого рода. *Лемма доказана.*

Рассмотрим $\omega(\lambda_j | t_0)$ ($j = \overline{1, n}$) – апостериорные вероятности состояния потока в момент $t_0 = 0$ начала наблюдений за потоком. Вероятности $\omega(\lambda_j | t_0)$ являются начальными условиями для решения системы (12) на полуинтервале $[t_0, t_1)$, то есть на полуинтервале времени от момента начала наблюдений за потоком до момента наступления первого события. Задавать $\omega(\lambda_j | t_0)$ ($j = \overline{1, n}$) можно, исходя из априорной информации о потоке. Поскольку поток рассматривается в стационарном режиме, то можно в качестве $\omega(\lambda_j | t_0)$ ($j = \overline{1, n}$) выбрать априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$. Пусть π_j ($j = \overline{1, n}$) – априорная финальная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t находится в j -м состоянии. Для вероятностей π_j ($j = \overline{1, n}$) справедлива лемма 5.

Лемма 5. Априорные финальные вероятности π_j ($j = \overline{1, n}$) состояний процесса $\lambda(t)$ ($t \rightarrow \infty$) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \alpha_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1, \quad (20)$$

где α_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) – элементы матрицы интенсивностей переходов.

Доказательство. Обозначим $\pi_j(\tau) = p(\lambda(\tau) = \lambda_j)$ ($j = \overline{1, n}$) – вероятность того, что случайный процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени τ находится в j -м состоянии (асинхронный поток в момент времени τ находится в j -м состоянии). Рассмотрим момент времени $\tau + \Delta\tau$ и вероятность $\pi_j(\tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ – достаточно малая величина. По формуле полной вероятности имеем

$$\pi_j(\tau + \Delta\tau) = \sum_{i=1}^n \pi_i(\tau) p(\lambda(\tau + \Delta\tau) = \lambda_j | \lambda(\tau) = \lambda_i) \quad (j = \overline{1, n}),$$

или, согласно определению асинхронного потока, получаем

$$\pi_j(\tau + \Delta\tau) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \pi_i(\tau) \alpha_{ij} \Delta\tau + \pi_j(\tau)(1 + \alpha_{jj} \Delta\tau) + o(\Delta\tau) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Перенося $\pi_j(\tau)$ в левую часть, деля обе части полученного равенства на $\Delta\tau$ и устремляя $\Delta\tau$ к нулю, находим

$$\frac{d\pi_j(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \pi_i(\tau) \alpha_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (21)$$

Согласно лемме 1, процесс $\lambda(t)$ является транзитивным марковским. Для транзитивного марковского процесса существует финальное распределение [33], то есть существуют $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(\tau)$ при $t \rightarrow \infty$ ($j = \overline{1, n}$), причем для π_j ($j = \overline{1, n}$) выпол-

няется условие нормировки. Осуществив в (21) предельный переход при $\tau \rightarrow \infty$, получаем систему (20). Поскольку по определению асинхронного потока $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0$ ($i = \overline{1, n}$), то одно из первых n уравнений системы (20) можно исключить в силу линейной зависимости. Оставшиеся уравнения образуют неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с n неизвестными π_j ($j = \overline{1, n}$). Поскольку финальное распределение π_j ($j = \overline{1, n}$) существует, данная система заведомо разрешима. *Лемма доказана.*

Леммы 3 – 5 позволяют сформулировать теорему 2.

Теорема 2. Поведение апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) на временной оси определяется системой дифференциальных уравнений (12), формулами пересчета вероятностей (17) и решением системы (20), содержащей n уравнений, в которых $t_k \leq t < t_{k+1}$, $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0)$, $\omega(\lambda_j | t_{k+1}) = \omega(\lambda_j | t_{k+1} - 0)$ ($k = 0, 1, \dots$); для $k = 0$ имеет место равенство $\omega(\lambda_j | t_0) = \omega(\lambda_j | t_0 + 0) = \pi_j$ ($j = \overline{1, n}$).

Доказательство следует из лемм 3 – 5 путем синхронизации формул (12), (17) и (20). *Теорема доказана.*

Теорема 2 определяет, в частности, поведение апостериорных вероятностей на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$, т.е. между моментами наступления соседних событий, причем на правом конце полуинтервала имеет место значение $\omega(\lambda_j | t_{k+1}) = \omega(\lambda_j | t_{k+1} - 0)$, на основе которого по формулам (17) находится вероятность $\omega(\lambda_j | t_{k+1} + 0)$ ($j = \overline{1, n}$), являющаяся начальной для следующего полуинтервала $[t_{k+1}, t_{k+2})$. Таким образом, апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ в моменты наступления событий t_1, t_2, \dots претерпевают разрывы первого рода.

4. Явный вид апостериорных вероятностей в зависимости от времени

Введем матрицу $D = \|d_{il}\|_1^n$, $d_{il} = \alpha_{il}$ ($i \neq l$), $d_{il} = \alpha_{il} - \lambda_l$ ($i, l = \overline{1, n}$). Обозначим $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – собственные числа матрицы D . Введем матрицу $S = \|s_{il}\|_1^n$, составленную из собственных векторов матрицы D таким образом, что l -й столбец матрицы S является собственным вектором, соответствующим собственному числу ω_l ($l = \overline{1, n}$). Элементы обратной матрицы S^{-1} обозначим s_{li}^{-1} . Введем матрицу $\Omega = \|\omega_l \delta_{il}\|_1^n$ (δ_{il} – символ Кронекера). На главной диагонали матрицы Ω расположены собственные числа матрицы D , прочие элементы – нулевые.

Рассмотрим $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots$) – полуинтервал времени между моментами наступления соседних k -го и $k+1$ -го событий, либо, если $k = 0$, между моментом начала наблюдения за потоком и моментом наступления 1-го события. Следующая теорема определяет решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (12) на временной оси в явном виде.

Теорема 3. Апостериорные вероятности состояний асинхронного потока $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) на полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots$) определяются формулой

$$\omega(\lambda_j | t) = \frac{\sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n s_{il} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

где $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0) = \sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k)$, $z_l(t_k) = \sum_{i=1}^n s_{li}^{-1} \omega(\lambda_i | t_k + 0)$.

Доказательство. Решим систему нелинейных дифференциальных уравнений (12) на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots$) с начальными условиями $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0)$ ($j = \overline{1, n}$). Сначала сведем (12) к системе линейных дифференциальных уравнений. Введем функцию $\psi(t)$ следующим образом:

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t). \quad (23)$$

С учетом (23), система (12) примет вид

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) (\alpha_{ij} - \delta_{ij} \lambda_j) + \omega(\lambda_j | t) \psi(t) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (24)$$

В (24) выполним замену функций:

$$\omega(\lambda_j | t) = y_j(t) \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] \quad (j = \overline{1, n}), \quad (25)$$

где $y_j(t)$ ($j = \overline{1, n}$) – новая неизвестная функция, $t_k \leq t < t_{k+1}$, $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0) = y_j(t_k + 0)$. Дифференцируя (25) по t , находим

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \frac{dy_j(t)}{dt} \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] + y_j(t) \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] \psi(t) \quad (j = \overline{1, n}).$$

Подставляя правую часть последнего выражения в (24), с учетом (25) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{dy_j(t)}{dt} \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] + y_j(t) \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] \psi(t) = \\ & = \sum_{i=1}^n y_i(t) \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] (\alpha_{ij} - \delta_{ij} \lambda_j) + y_j(t) \exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] \psi(t) \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

производя здесь необходимые преобразования, находим

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n y_i(t) (\alpha_{ij} - \delta_{ij} \lambda_j), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

Система (26) представляет собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, линейную относительно неизвестных функций $y_j(t)$ ($j = \overline{1, n}$).

Введем следующие вектор-функции:

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{z}(t) = S^{-1}\bar{y}(t). \quad (27)$$

С учетом (27), система (26) примет вид

$$\bar{y}'(t) = D\bar{y}(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (28)$$

В силу определения матриц S и Ω , соотношение (28) имеет вид

$$\bar{y}'(t) = S\Omega S^{-1}\bar{y}(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда (26) запишется как

$$\frac{d}{dt}(S^{-1}\bar{y}(t)) = \Omega S^{-1}\bar{y}(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (29)$$

В соответствии с обозначениями (27) соотношение (29) представляется в виде $\bar{z}'(t) = \Omega\bar{z}(t)$ или

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \omega_i z_i(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (30)$$

Система дифференциальных уравнений (30) состоит из n независимых уравнений с разделяющимися переменными. Тогда решение i -го уравнения с начальными условиями в точке t_k есть

$$z_i(t) = z_i(t_k) e^{\omega_i(t-t_k)}, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (31)$$

Согласно (27), имеем $z_i(t) = \sum_{l=1}^n s_{il}^{-1} y_l(t)$. Тогда, учитывая (25), находим

$$z_i(t_k) = \sum_{l=1}^n s_{il}^{-1} \omega(\lambda_l | t_k + 0) \quad (i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots) \quad (32)$$

Перейдем от функций $z_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) к функциям $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$). В соответствии с (27) и (31) получаем

$$y_j(t) = \sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (33)$$

Так как $\sum_{i=1}^n \omega(\lambda_i | t) = 1$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, то из (25) находим

$$\exp \left[\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau \right] = 1 / \sum_{i=1}^n y_i(t). \quad (34)$$

Подставляя сначала (34), а затем (33) в (25), учитывая при этом (32), получаем (22). Теорема доказана.

Формулы (17), (20), (22) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$, $j = \overline{1, n}$, в любой момент времени t :

1) в момент времени $t_0 = 0$ задаются вероятности $\omega(\lambda_j | t_0 + 0) = \pi_j$, где π_j – решение системы (20), $j = \overline{1, n}$;

2) по формуле (22) рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$, $j = \overline{1, n}$, в любой момент времени t ($0 \leq t < t_1$), где t_1 – момент наблюдения первого события потока;

3) по формуле (22) рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$, $j = \overline{1, n}$, в момент времени t_1 : $\omega(\lambda_j | t_1) = \omega(\lambda_j | t_1 - 0)$; затем по формуле (17) производится пересчет апостериорных вероятностей в точке $t = t_1$, при этом $\omega(\lambda_j | t_1 + 0)$, $j = \overline{1, n}$, являются начальными условиями для $\omega(\lambda_j | t)$ на следующем шаге алгоритма;

4) по формуле (22) рассчитываются апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t)$, $j = \overline{1, n}$, для любого t ($t_1 \leq t < t_2$), где t_2 – момент времени наступления второго события потока и т.д.

5. Асинхронный поток с двумя состояниями

Рассмотрим частный случай асинхронного потока, когда $n = 2$. Для потока с двумя состояниями нетрудно найти введенные в разделе 4 собственные числа ω_1 , ω_2 и матрицу S . Поток с двумя состояниями определяется интенсивностями наступления событий λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$) и матрицей интенсивностей переходов $\|\alpha_{ij}\|_1^2$. Согласно определению потока, $\alpha_{11} = -\alpha_{12}$, $\alpha_{22} = -\alpha_{21}$, для простоты обозначим $\alpha_1 = \alpha_{12}$, $\alpha_2 = \alpha_{21}$ ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$). Так как для потока с двумя состояниями $\omega(\lambda_1 | t) + \omega(\lambda_2 | t) = 1$ для любого t , то будем рассматривать только вероятность $\omega(\lambda_1 | t)$.

Априорные финальные вероятности π_1 , π_2 состояний процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t ($t \rightarrow \infty$), определяются из (20) как

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (35)$$

Матрица D примет вид

$$D = \begin{pmatrix} -(\alpha_1 + \lambda_1) & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -(\alpha_2 + \lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел ω_1 , ω_2 матрицы D запишется как

$$\omega^2 + \omega(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1}}{2}, \\ \omega_2 &= \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1}}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Найдем собственные векторы матрицы D . Для этого решим систему

$$(D - \omega_i E)\vec{x}^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

где $\vec{x}^{(i)}$ – собственный вектор, соответствующий ω_i ($i = 1, 2$). Поскольку данная система однородна и ее определитель равен нулю ($i = 1, 2$), то одну из компонент i -го собственного вектора зададим произвольно, другую выразим через заданную.

Положим, например, $x_2^{(1)} = 1$, $x_1^{(2)} = 1$. Тогда

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_2}{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

то есть матрица S примет следующий вид:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1} & 1 \\ 1 & \frac{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_2}{\alpha_2} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Тогда элементы s_{ij}^{-1} ($i, j = 1, 2$) матрицы S^{-1} определяются в виде

$$s_{11}^{-1} = \frac{(\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1)(\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_2)}{\alpha_2(\omega_2 - \omega_1)}, \quad s_{22}^{-1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$s_{12}^{-1} = s_{21}^{-1} = -\frac{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (38)$$

Из (32) получаем

$$z_1(t_k) = (s_{11}^{-1} - s_{12}^{-1})\omega(\lambda_1 | t_k + 0) + s_{12}^{-1},$$

$$z_2(t_k) = (s_{21}^{-1} - s_{22}^{-1})\omega(\lambda_1 | t_k + 0) + s_{22}^{-1}.$$

Подставляя сюда выражения (38), находим

$$z_1(t_k) = \frac{(\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1)(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 + \omega_2)}{\alpha_2(\omega_2 - \omega_1)}\omega(\lambda_1 | t_k + 0) - \frac{\alpha_1 + \lambda_1 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$z_2(t_k) = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda_1 + \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\omega(\lambda_1 | t_k + 0) + \frac{\alpha_2}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (39)$$

При $n = 2$ формула (22) для нахождения апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$ примет вид

$$\omega(\lambda_1 | t) = \frac{s_{12}z_2(t_k) + s_{11}z_1(t_k)e^{(\omega_1 - \omega_2)(t - t_k)}}{s_{12}z_2(t_k) + s_{22}z_2(t_k) + (s_{11}z_1(t_k) + s_{21}z_1(t_k))e^{(\omega_1 - \omega_2)(t - t_k)}},$$

где s_{ij} ($i, j = 1, 2$) – элементы матрицы S , определенной в (37), $z_i(t_k)$ ($i = 1, 2$) определяются формулами (39), собственные числа ω_1, ω_2 определяются (36).

Подставляя в правую часть полученного равенства явный вид собственных чисел ω_1, ω_2 (формулы (36)), явный вид элементов s_{ij} матрицы S (формула (37)), явный вид величин $z_1(t_k), z_2(t_k)$ (формулы (39)), производя при этом необходимые преобразования, получаем апостериорную вероятность $\omega(\lambda_1 | t)$ в виде

$$\omega(\lambda_1 | t) = \frac{\xi_1(\xi_2 - \omega(\lambda_1 | t_k + 0)) - \xi_2(\xi_1 - \omega(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-(\xi_2 - \xi_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}{\xi_2 - \omega(\lambda_1 | t_k + 0) - (\xi_1 - \omega(\lambda_1 | t_k + 0))e^{-(\xi_2 - \xi_1)(\lambda_1 - \lambda_2)(t - t_k)}}, \quad (40)$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}$,

$$\xi_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$\xi_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)}}{2(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$. Отметим, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\lambda_1 | t) = \xi_1$.

Таким образом, поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 1, 2, \dots$) между соседними событиями определяется формулой (40). В момент времени $t = t_k$, т.е. на левом конце полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$, апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1 | t_k)$ определяется формулой (17) для $n = 2$:

$$\omega(\lambda_1 | t_k) = \omega(\lambda_1 | t_k + 0) = \frac{\lambda_1 \omega(\lambda_1 | t_k - 0)}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \omega(\lambda_1 | t_k - 0)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

На правом конце полуинтервала $[t_k, t_{k+1})$, т.е. в момент времени $t = t_{k+1}$, апостериорная вероятность $\omega(\lambda_1 | t)$ определяется формулой (40): $\omega(\lambda_1 | t_{k+1}) = \omega(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$. С помощью значения $\omega(\lambda_1 | t_{k+1} - 0)$ по формуле пересчета (41) находится значение $\omega(\lambda_1 | t_{k+1} + 0)$, являющееся начальным значением для $\omega(\lambda_1 | t)$ для следующего полуинтервала $[t_{k+1}, t_{k+2})$ и т.д. Для полуинтервала $[t_0, t_1)$ имеет место $\omega(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, где априорная финальная вероятность π_1 определяется формулой (35).

Подчеркнем, что формулы (40), (41) совпадают с формулами для апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$, приведенными в [10]. Кроме того, подчеркнем, что для $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$, т.е. для асинхронного альтернирующего потока событий [12, 16], из (41) вытекает, что $\omega(\lambda_1 | t_k + 0) = 1, k = 1, 2, \dots$. Последнее означает, что в данном частном случае поведение апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$ не зависит от предыстории, что является естественным, так как события асинхронного альтернирующего потока наступают только в первом состоянии процесса $\lambda(t)$.

6. Численные результаты статистических экспериментов

Сделаем важное замечание. В силу формулы пересчета (17) значение $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ ($j = \overline{1, n}, k = 0, 1, \dots$) зависит от всех моментов t_1, t_2, \dots, t_k наступления событий асинхронного потока, а также начальных условий, задаваемых в момент времени t_0 . Вследствие этого найти явное выражение для полной (безусловной) вероятности ошибочного решения представляется затруднительным, а, скорее всего, невозможным. Поэтому в данном разделе приводятся результаты статистического эксперимента, реализованного с помощью имитационной модели асинхронного потока событий, по вычислению оценок полной вероятности ошибки вынесения решения \hat{P}_0 для различных вариантов набора параметров потока.

Отдельный эксперимент включает в себя два этапа. На первом этапе производится имитационное моделирование асинхронного потока при заданных значениях параметров потока и заданном времени моделирования. Алгоритм имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей он не содержит. На втором этапе отдельного эксперимента производится непосредственное вычисление вероятностей $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ и $\omega(\lambda_j | t)$ по формулам (17), (20), (22), построение оценки состояние потока $\hat{\lambda}(t)$ и вычисление оценки полной вероятности ошибки \hat{P}_0 .

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена траектория (верхняя часть рис. 1) случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования. Расчеты произведены для следующих значений параметров потока: $n = 3$; $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 0,1$; первая строка матрицы интенсивностей переходов процесса $\lambda(t)$ из одного состояния в другое состояние $\|\alpha_{ij}\|_1^3$ есть $\alpha^{(1)} = (-1,8; 1; 0,8)$, вторая строка – $\alpha^{(2)} = (0,55; -1,2; 0,65)$, третья строка – $\alpha^{(3)} = (0,2; 0,4; -0,6)$. Время t изменяется в пределах от 0 до T , где T – время моделирования асинхронного потока ($T = 5$ ед. времени). На рис. 1 (верхняя часть рис. 1) цифрами 1, 2, 3 обозначены первое, второе и третье состояния случайного процесса $\lambda(t)$. В нижней части рис.1 приведена траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$, где цифрами 1, 2, 3 по-прежнему обозначены состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производится с шагом $\Delta t = 0,01$. На рис. 1 (нижняя часть рис. 1) штриховкой на оси времени обозначены временные промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (области ошибочных решений). На рис. 2 – 4 приведены траектории поведения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_1 | t)$, $\omega(\lambda_2 | t)$, $\omega(\lambda_3 | t)$, соответствующие полученной при имитационном моделировании последовательности временных моментов наступления событий t_1, t_2, \dots ($\omega(\lambda_1 | t) + \omega(\lambda_2 | t) + \omega(\lambda_3 | t) = 1$).

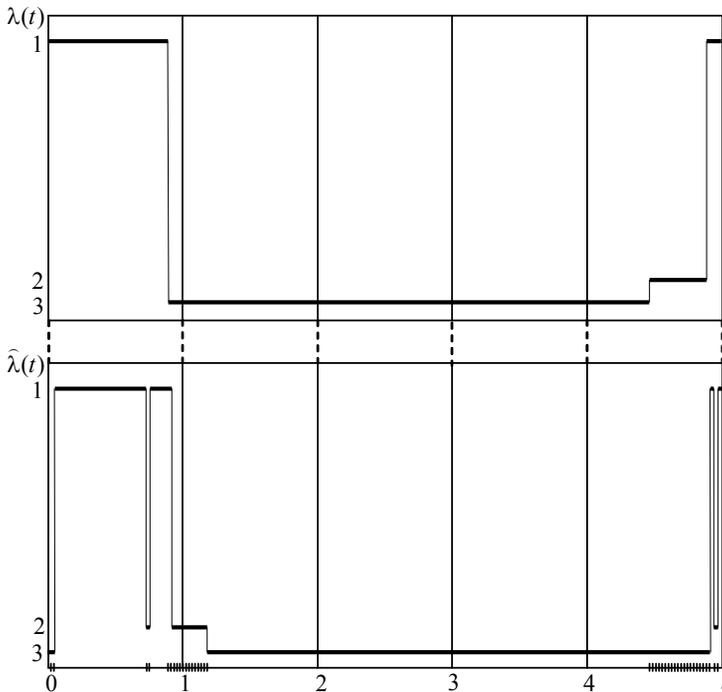


Рис. 1. Истинная траектория процесса $\lambda(t)$ (верх рисунок) и траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ (низ рисунок)

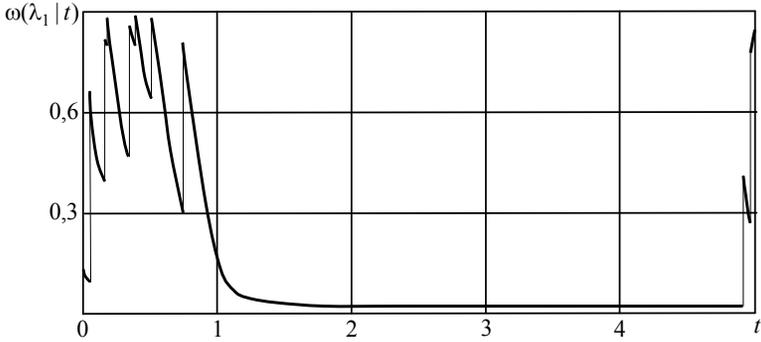


Рис. 2. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$

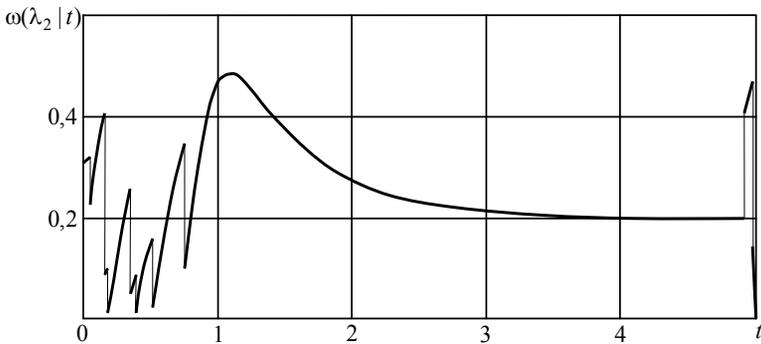


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_2 | t)$

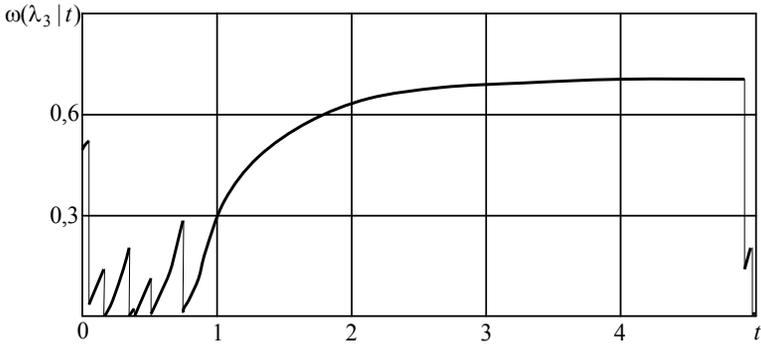


Рис. 4. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_3 | t)$

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии случайного процесса $\lambda(t)$ по наблюдениям за асинхронным потоком проведен статистический эксперимент, состоящий из следующих шагов: 1) для определенного набора параметров осуществляется имитационное моделирование асинхронного потока на заданном отрезке времени $[0, T]$ (i -й эксперимент, $i = \overline{1, N}$); 2) производится расчет апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ состояний процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке $[0, T]$ по формулам (17), (20), (22); 3) осуществляется оценивание истинной

траектории процесса $\lambda(t)$ (оценивание на отрезке $[0, T]$ интервалов, когда оценка $\hat{\lambda}(t)$ принимает то или иное значение); 4) осуществляется определение (для i -го эксперимента) t_i^- – суммарной длительности интервалов времени, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$; 5) для i -го эксперимента осуществляется вычисление доли ошибочных решений $\hat{p}_i = t_i^- / T$; 6) осуществляется повторение N раз ($i = \overline{1, N}$) шагов 1 – 5 для расчета оценки безусловной вероятности ошибки оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка \hat{p}_i ($i = \overline{1, N}$) долей ошибочных решений в N экспериментах. После этого вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0 = (1/N) \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ и

выборочная дисперсия $\hat{D} = (1/(N-1)) \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_0)^2$.

Результаты эксперимента, выполненного для асинхронного потока с двумя состояниями ($n = 2$), приведены в табл. 1 – 5. В первой строке таблиц указано время моделирования асинхронного потока событий T ($T = 200, 400, \dots, 1000$ ед. времени). Во второй и третьей строках таблиц для каждого времени моделирования T приведены численные значения для \hat{P}_0 и \hat{D} соответственно. Результаты получены при следующих значениях параметров, общих для всех таблиц: $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_{12} = 0,04$, $\alpha_2 = \alpha_{21} = 0,08$, $N = 100$. При этом результаты в табл. 1 получены для $\lambda_1 = 2$, в табл. 2 – для $\lambda_1 = 3$, в табл. 3 – для $\lambda_1 = 5$, в табл. 4 – для $\lambda_1 = 7$, в табл. 5 – для $\lambda_1 = 10$.

Т а б л и ц а 1

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 2$)

T	200	400	600	800	1000
\hat{P}_0	0,2270	0,2116	0,2171	0,2138	0,2128
\hat{D}	0,005246	0,001985	0,001559	0,000984	0,000866

Т а б л и ц а 2

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 3$)

T	200	400	600	800	1000
\hat{P}_0	0,1267	0,1280	0,1243	0,1297	0,1269
\hat{D}	0,001630	0,000692	0,000631	0,000397	0,000324

Т а б л и ц а 3

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5$)

T	200	400	600	800	1000
\hat{P}_0	0,0720	0,0711	0,0662	0,0694	0,0697
\hat{D}	0,000364	0,000228	0,000154	0,000127	0,000095

Т а б л и ц а 4

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 7$)

T	200	400	600	800	1000
\hat{P}_0	0,0424	0,0452	0,0463	0,0462	0,0464
\hat{D}	0,000169	0,000093	0,000082	0,000050	0,000053

Т а б л и ц а 5

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 10$)

T	200	400	600	800	1000
\hat{P}_0	0,0331	0,0304	0,0309	0,0304	0,0305
\hat{D}	0,000124	0,000046	0,000034	0,000023	0,000019

Анализ численных результатов, представленных в табл. 1 – 5, показывает: 1) для всех вариантов расчета оценка безусловной вероятности ошибочного решения \hat{P}_0 является достаточно стабильной для $T \geq 200$ ед. времени; 2) при фиксированном T оценка \hat{P}_0 уменьшается в зависимости от λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, 5, 7, 10$), что является естественным, так как при увеличении разности $\lambda_1 - \lambda_2$ легче отслеживаются состояния потока; 3) при заданных в осуществленном статистическом эксперименте значениях параметров алгоритм оптимальной оценки состояний асинхронного потока обеспечивает приемлемую оценку безусловной вероятности ошибочного решения, при этом выборочная дисперсия оценки достаточно мала.

Заключение

Полученные результаты показывают возможность оценивания состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний по результатам текущих наблюдений (в течение некоторого временного интервала) за потоком. Последнее позволяет системе массового обслуживания оперативно адаптироваться (варьировать дисциплину обслуживания, режимы обслуживания и свою структуру) к изменяющимся состояниям потока.

Выражения (17) и (22) для оценки состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов. Сам же алгоритм оценки состояний потока обеспечивает минимум полной вероятности ошибки вынесения решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92 – 99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55 – 61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764 – 779.
4. Нежелская Л.А. Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стохастического потока с инициативными событиями // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технич. конф.

- «Микросистема – 91», 8 – 12 октября 1991, Суздаль. М.: Всесоюзное общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26 – 28.
5. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7 – 8. С. 6 – 10.
 6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности «мертвого времени» и интенсивностей синхронного дважды стохастического потока событий // Радиотехника. 2004. № 10. С. 8 – 16.
 7. Бушланов И.В., Горцев А.М. Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40 – 51.
 8. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76 – 93.
 9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС-потокком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем: сб. статей. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20 – 32.
 10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46 – 54.
 11. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.Н. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Изв. вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67 – 85.
 12. Горцев А.М., Загородняя М.Е. Оценка параметров альтернирующего потока событий при условии его частичной наблюдаемости // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 3. С. 273 – 280.
 13. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальный алгоритм оценки состояний МС-потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Оптика атмосферы и океана. 1998. Т. 11. № 4. С. 419 – 429.
 14. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 19 – 27.
 15. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52 – 66.
 16. Горцев А.М., Паршина М.Е. Оценивание параметров альтернирующего потока событий в условиях «мертвого времени» // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 8 – 13.
 17. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179 – 184.
 18. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69 – 79.
 19. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2004. № 284. С. 137 – 145.
 20. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35 – 49.
 21. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с иницированием лишних событий методом моментов // Вестник ТГУ: материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. № 18. С. 267 – 273.
 22. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий // Вестник Тюмен. гос.ун-та. 2008. № 6. С. 107 – 119.

23. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока с иницированием лишних событий // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 26 – 29 янв. 2009. Вып. 20. Минск: РИВШ, 2009. С. 90 – 96.
24. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: изд-во БГУ, 1998. С. 18 – 21.
25. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 95 – 98.
26. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестн. ТГУ. Приложение. 2002. № 1(1). С. 18 – 23.
27. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание периода мертвого времени и параметров полусинхронного дважды стохастического потока событий // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 7 – 13.
28. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 1. С. 31 – 34.
29. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1 – 46.
30. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575 – 598.
31. Дудин А.Н., Клименок В.П. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
32. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
33. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.

Горцев Александр Михайлович
Зувич Владимир Леонидович
Томский государственный университет
E-mail: amg@fpmk.tsu.ru; ZuevichV@ya.ru

Поступила в редакцию 18 февраля 2010 г.