ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 2(11)

УДК 519.2

Ю.В. Малинковский, Ю.Е. Летунович

ОТКРЫТЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ВНУТРЕННИХ ИЗМЕНЕНИЙ В УЗЛАХ

Исследуется открытая сеть массового обслуживания с простейшим входящим потоком, экспоненциальным обслуживанием в узлах и марковской маршрутизацией. В сети циркулируют заявки нескольких типов. В каждом из узлов сети находится единственный прибор, который может работать в нескольких режимах. Время пребывания в каждом режиме имеет показательное распределение. Переходы возможны только в соседние режимы. Во время переключения режимов число заявок в узле не меняется. Устанавливаются условия обратимости, при выполнении которых стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет мультипликативную форму.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания*, *стационарное распределение*, *обратимость.*

Изучение систем и сетей с многорежимными стратегиями обслуживания представляет большой интерес, поскольку зачастую на практике возникает ситуация, когда оборудование может частично или полностью выходить из строя. Попытка построения таких моделей была предпринята в работе [1]. В ней рассмотрена открытая сеть с многорежимными стратегиями обслуживания, в которой циркулируют заявки одного типа. Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [1], на случай, когда в сеть поступают заявки нескольких типов.

Таким образом, исследуется открытая неоднородная сеть с многорежимным обслуживанием. Рассматриваемые режимы отвечают разной степени работоспособности узлов сети. При переходе в режим с большим номером, в менее «надёжный» режим, производительность узла уменьшается. Прибор не выходит из строя полностью. Прибор может частично терять работоспособность как при обслуживании, так и в незанятом состоянии.

Для рассматриваемой сети допускается наличие внутренних изменений в узлах. Под внутренними изменениями будем понимать переходы обслуживающего устройства из одного режима работы в другой. На практике это может означать возможность поломки или восстановления устройства без воздействия внешних факторов.

При описании состояния узла были введены обозначения, аналогичные обозначениям, введённым в работе [2]. Состояние описывается произвольно и может не совпадать с числом заявок определённого типа в узле. Такое описание позволяет упростить процесс обращения времени и обобщить модели сетей с многорежимным обслуживанием, которые были рассмотрены авторами ранее.

1. Изолированный узел

Рассмотрим одноканальную экспоненциальную систему массового обслуживания с ожиданием, в которую поступают M независимых пуассоновских потоков с параметрами α_u, $u = \overline{1, M}$. Здесь α_u есть интенсивность поступления заявок типа u.

В системе находится единственный прибор, который может работать в $r+1$ режимах. Назовём *0* основным режимом работы. Время переключения с одного режима на другой имеет показательное распределение. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в системе не меняется. Переключение происходит только на соседние режимы.

Состояние системы будем описывать абстрактно, и состояние системы может не совпадать с числом заявок в ней. Пусть $x(t)$ – состояние системы в момент времени t. Обозначим через $|x|_u^l$ – число заявок типа u, $u=\overline{1,M}$, в системе, которая функционирует в l-м режиме и находится в состоянии x. Предполагаем, что $x(t)$ – однородный марковский процесс с фазовым пространством X.

Пусть $\pi_u(x,\tilde{x})$ – условная вероятность того, что система перейдёт в состояние $\tilde{x}$, если в неё поступит заявка, заставшая его в состоянии x, $|\tilde{x}|_u^l=|x|_u^l+1$; $\mu_u(x,\tilde{x})$ – интенсивность перехода из x в $\tilde{x}$ за счёт ухода заявок типа u из системы, $|\tilde{x}|_u^l=|x|_u^l-1, |x|_u^l\neq 0$.

В рассматриваемой системе предполагаются возможными внутренние переходы из состояния x в другое состояние $\tilde{x}$, но с тем же числом заявок ($|\tilde{x}|_u^{l+1}=|x|_u^l, |\tilde{x}|_u^{l-1}=|x|_u^l, \tilde{x}\neq x$). Это значит, что такие переходы связаны не с поступлением или обслуживанием заявок, а с переходами системы из одного режима работы в другой. Для состояний x, у которых номер режима $1\le l\le r-1$, время пребывания в режиме l имеет показательное распределение. При этом с интенсивностью $\nu(x,\tilde{x})$ прибор переходит в $l+1$-й режим, а с интенсивностью $\varphi(x,\tilde{x})$ – в $l-1$-й режим. Предполагается, что $\nu(x,\tilde{x})=0$, когда система находится в режиме r, и $\varphi(x,\tilde{x})=0$, когда система функционирует в режиме работы *0*.

Предполагается, что введённые параметры выбраны таким образом, что процесс $x(t)$ эргодичен. Тогда финальное распределение является единственным стационарным распределением.

Введём следующие обозначения

$$\Omega^+(u,l,x)=\left\{\tilde{x}\in X: |\tilde{x}|_u^l=|x|_u^l+1; |\tilde{x}|_m^l=|x|_m^l, m\in\{1,2,\ldots,M\}\setminus\{u\}\right\},$$

$$\Omega^-(u,l,x)=\left\{\tilde{x}\in X: |\tilde{x}|_u^l=|x|_u^l-1; |x|_u^l\neq 0,\ |\tilde{x}|_m^l=|x|_m^l, m\in\{1,2,\ldots,M\}\setminus\{u\}\right\},$$

$$\Theta^+(u,l,x)=\left\{\tilde{x}\in X: |\tilde{x}|_u^{l+1}=|x|_u^l; l\neq r,\ |\tilde{x}|_u^s=|x|_u^s, \tilde{x}\neq x, s\in\{0,1,\ldots,r\}\setminus\{l\}\right\},$$

$$\Theta^-(u,l,x)=\left\{\tilde{x}\in X: |\tilde{x}|_u^{l-1}=|x|_u^l; l\neq 0,\ |\tilde{x}|_u^s=|x|_u^s, \tilde{x}\neq x, s\in\{0,1,\ldots,r\}\setminus\{l\}\right\}.$$

Обозначим через $p(x)$ стационарные вероятности состояний марковского процесса $x(t)$. Уравнения обратимости для рассматриваемой системы запишутся в следующем виде:

$$\alpha_u\pi_u(x,\tilde{x})p(x)=\mu_u(\tilde{x},x)p(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Omega^+(u,l,x), u=\overline{1,M};$$

$$\nu(x,\tilde{x})p(x)=\varphi(\tilde{x},x)p(\tilde{x}),\ \tilde{x}\in\Theta^+(u,l,x), u=\overline{1,M}.$$

Обозначим через $y_{k_u}^l$ – состояние системы с числом заявок типа u, равным $\left|y_{k_u}^l\right|=k_u$, находящейся в режиме работы l.

Лемма. Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\pi_u\left(y_{k_u-1}^{l-1}, y_{k_u}^{l-1}\right)\nu\left(y_{k_u}^{l-1}, y_{k_u}^{l}\right)\mu_u\left(y_{k_u}^{l}, y_{k_u-1}^{l}\right)\varphi\left(y_{k_u-1}^{l}, y_{k_u-1}^{l-1}\right)=$$
$$=\pi_u\left(y_{k_u-1}^{l}, y_{k_u}^{l}\right)\varphi\left(y_{k_u}^{l}, y_{k_u}^{l-1}\right)\mu_u\left(y_{k_u}^{l-1}, y_{k_u-1}^{l-1}\right)\nu\left(y_{k_u-1}^{l-1}, y_{k_u-1}^{l}\right).$$

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству в [1].

Из уравнений обратимости легко определяются стационарные вероятности состояний системы:

$$p(x)=\prod_{u=1}^{M}\prod_{k_u=1}^{|x|_u^l}\frac{\alpha_u\pi_u\left(y_{k_u-1}^{l}, y_{k_u}^{l}\right)}{\mu_u\left(y_{k_u}^{l}, y_{k_u-1}^{l}\right)}\prod_{s=1}^{l}\frac{\nu\left(y_0^{s-1}, y_0^{s}\right)}{\varphi\left(y_0^{s}, y_0^{s-1}\right)}p(z),$$
$$x, z, y_{k_u}^{l}\in X, |z|^0=0.$$

Здесь z – такое состояние системы, когда в ней отсутствуют заявки, и система работает в основном режиме *0*. Вероятности $p(x)$ не зависят в силу обратимости системы от выбора пути, приводящего из состояния, когда система пуста, в состояние x.

2. Склеивание узлов в открытую сеть

Рассмотрим сеть, состоящую из N обратимых однолинейных узлов со структурой, определённой в предыдущем пункте. Это означает, что $\pi_u(x,\tilde{x})$, $\mu_u(x,\tilde{x})$, $\nu(x,\tilde{x})$, $\varphi(x,\tilde{x})$ такие же, но снабжены индексом i, указывающим номер узла. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Заявки могут быть M типов. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-й узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}$ $\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p_{0(i,u)}=1\right)$. После обслуживания в i-м узле заявка типа u независимо от других заявок мгновенно направляется в j-й узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}p_{(i,u)(j,v)}+p_{(i,u)0}=1;\, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}\right)$.

Будем предполагать, что матрица переходов $(p_{(i,u)(j,v)})$, $u,v=\overline{1,M}$, $i,j=\overline{0,N}$, $p_{(0,u)(0,v)}=0$ неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{iu}=p_{0(i,u)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\varepsilon_{jv}p_{(j,v)(i,u)},\, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}, \qquad (1)$$

имеет единственное решение (ε_{iu}), для которого $\varepsilon_{iu}>0$ ($i=\overline{1,N}$, $u=\overline{1,M}$). Обозначим через $\alpha_{iu}=\lambda\varepsilon_{iu}$ среднюю интенсивность поступления заявок типа u в i-й узел.

Состояние сети в момент времени t описывается вектором $x(t)=(x_1(t), x_2(t),\ldots, x_N(t))$, где $x_i(t)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Очевидно, $x(t)$ – однородный марковский процесс с фазовым пространством $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_N$.

Пусть $\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)$ – условная вероятность того, что узел перейдёт в состояние $\tilde{x}_i$, если в него поступит заявка, заставшая его в состоянии x_i, $|\tilde{x}_i|_u^{l_i}=|x_i|_u^{l_i}+1$. Здесь $|x_i|_u^{l_i}$ – число заявок типа u в i-м узле, который функционирует в режиме l_i, когда система находится в состоянии x_i. Пусть $\mu_{iu}(x,\tilde{x})$ – интенсивность перехода из x_i в $\tilde{x}_i$ за счёт ухода заявок типа u в i-м узле, $|\tilde{x}_i|_u^{l_i} = |x_i|_u^{l_i} - 1, |x_i|_u^{l_i} \neq 0$.

В каждом узле предполагаются возможными внутренние переходы из состояния x_i в другое состояние $\tilde{x}_i$, но с тем же числом заявок ($|\tilde{x}_i|_u^{l_i+1} = |x_i|_u^{l_i}, |\tilde{x}_i|_u^{l_i-1} = |x_i|_u^{l_i}, \tilde{x}_i \neq x_i$). Это значит, что такие переходы связаны не с поступлением или обслуживанием заявок, а с переходами системы из одного режима работы в другой. Для состояний x_i, у которых номер режима $1 \le l_i \le r_i - 1$, время пребывания в режиме l_i имеет показательное распределение. При этом с интенсивностью $\nu_i(x_i,\tilde{x}_i)$ прибор переходит в l_i+1-й режим, а с интенсивностью $\varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)$ – в l_i-1-й режим. Предполагается, что $\nu_i(x_i,\tilde{x}_i)$=0, когда система находится в режиме r_i, и $\varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)$=0, когда узел функционирует в режиме работы *0*.

Инфинитезимальные интенсивности перехода системы из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in X_i\,(x_i \neq \tilde{x}_i)$ принимают следующий вид:

$$q_i(x_i,\tilde{x}_i) = \begin{cases} \alpha_{iu}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Omega^+(i,u,l_i,x_i), \\ \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Omega^-(i,u,l_i,x_i), \\ \nu_i(x_i,\tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Theta^+(i,u,l_i,x_i), \\ \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Theta^-(i,u,l_i,x_i), \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом $\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) \ge 0$, $\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) \ge 0$, $\nu_i(x_i,\tilde{x}_i) \ge 0$, $\varphi_i(x_i,\tilde{x}_i) \ge 0$, $\sum_{\Omega^+(i,u,l_i,x_i)} \pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) = 1$, $\mu_{iu}(x_i) = \sum_{\Omega^-(i,u,l_i,x_i)} \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)$ – интенсивность обслуживания i-м узлом заявок типа u, когда он находится в состоянии x_i; $\nu_i(x_i) = \sum_{\Theta^+(i,u,l_i,x_i)} \nu_i(x_i,\tilde{x}_i)$ – интенсивность выхода из состояния x_i за счёт повышения номера режима функционирования i-го узла; $\varphi_i(x_i) = \sum_{\Theta^-(i,u,l_i,x_i)} \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)$ – интенсивность выхода из состояния x_i за счёт понижения номера режима функционирования i-го узла. Здесь в суммах $\Omega^+(i,u,l_i,x_i)$, $\Omega^-(i,u,l_i,x_i)$, $\Theta^+(i,u,l_i,x_i)$, $\Theta^-(i,u,l_i,x_i)$ указывают, что суммирование ведётся по $\tilde{x}_i$, принадлежащему одному из определённых множеств. Множества $\Omega^+(i,u,l_i,x_i)$, $\Omega^-(i,u,l_i,x_i)$, $\Theta^+(i,u,l_i,x_i)$, $\Theta^-(i,u,l_i,x_i)$ вводятся так же, как и в пункте 1, но с указанием номера узла.

Предполагается, что введённые параметры выбраны таким образом, что процесс $x(t)$ эргодичен. Тогда финальное распределение является единственным стационарным распределением.

Согласно предыдущему пункту, стационарное распределение состояний изолированного узла (i-го узла сети) находится по формуле

$$p_i(x_i) = \prod_{u=1}^{M} \prod_{k_u=1}^{|x_i|_u^{l_i}} \frac{\alpha_{iu}\pi_{iu}\left(y_{i,k_u-1}^{l_i}, y_{i,k_u}^{l_i}\right)}{\mu_{iu}\left(y_{i,k_u}^{l_i}, y_{i,k_u-1}^{l_i}\right)} \prod_{s=1}^{l_i} \frac{\nu_i\left(y_{i,0}^{s-1}, y_{i,0}^{s}\right)}{\varphi_i\left(y_{i,0}^{s}, y_{i,0}^{s-1}\right)} p_i(z_i), \quad (2)$$

$$x_i, z_i, y_{i,k_u}^{l_i} \in X_i, |z_i|^0 = 0.$$

Здесь z_i – такое состояние i-го узла, когда в нём отсутствуют заявки, и система находится в основном режиме работы 0.

3. Основной результат

Обозначим через $[\tilde{x}_i]$ N-мерный вектор $\tilde{x}$, у которого все координаты, кроме i-й, совпадают с координатами вектора x, а i-я координата равна $\tilde{x}_i$. Через $\left[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j\right]$ обозначим N-мерный вектор $\tilde{x}$, у которого все координаты, кроме i-й и j-й, совпадают с координатами вектора x, а i-я координата равна $\tilde{x}_i$, j-я координата равна $\tilde{x}_j$. Если $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $x(t)$ из состояния x в состояние y, $q(x)=\sum_{y\neq x} q(x,y)$ – интенсивность его выхода из состояния x, то интенсивности перехода процесса $x(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
q(x,[\tilde{x}_i])=\lambda p_{0(i,u)}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i),\ \tilde{x}_i\in\Omega^+(i,u,l_i,x_i);\\
q(x,[\tilde{x}_i])=\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)\,p_{(i,u)0}I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]},\ \tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i);\\
q(x,[\tilde{x}_i])=\nu_i(x_i,\tilde{x}_i)I_{[l_i\neq r_i]},\ \tilde{x}_i\in\Theta^+(i,u,l_i,x_i);\\
q(x,[\tilde{x}_i])=\varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)I_{[l_i\neq 0]},\ \tilde{x}_i\in\Theta^-(i,u,l_i,x_i);\\
q\left(x,\left[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j\right]\right)=\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)\,p_{(i,u)(j,v)}\pi_{jv}\left(x_j,\tilde{x}_j\right)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]},\\
\tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i),\tilde{x}_j\in\Omega^+\left(j,v,l_j,x_j\right),\ i,j=\overline{1,N}.
\end{gathered}\tag{3}$$

Для всех иных состояний y $q(x,y)$=0. Интенсивность выхода получается сложением указанных интенсивностей:

$$q(x)=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{iu}(x_i)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}+\sum_{i=1}^{N}\left[\nu_i(x_i)I_{[l_i\neq r_i]}+\varphi_i(x_i)I_{[l_i\neq 0]}\right].$$

Теорема. Если все изолированные узлы удовлетворяют условию обратимости

$$\begin{gathered}
\pi_{iu}\left(y_{i,k_u-1}^{l_i-1},y_{i,k_u}^{l_i-1}\right)\nu_i\left(y_{i,k_u}^{l_i-1},y_{i,k_u}^{l_i}\right)\mu_{iu}\left(y_{i,k_u}^{l_i},y_{i,k_u-1}^{l_i}\right)\varphi_i\left(y_{i,k_u-1}^{l_i},y_{i,k_u-1}^{l_i-1}\right)=\\
=\pi_{iu}\left(y_{i,k_u-1}^{l_i},y_{i,k_u}^{l_i}\right)\varphi_i\left(y_{i,k_u}^{l_i},y_{i,k_u}^{l_i-1}\right)\mu_{iu}\left(y_{i,k_u}^{l_i-1},y_{i,k_u-1}^{l_i-1}\right)\nu_i\left(y_{i,k_u-1}^{l_i-1},y_{i,k_u-1}^{l_i}\right),
\end{gathered}$$

то стационарное распределение сети имеет мультипликативную форму

$$p(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N),\tag{4}$$

где $p_i(x_i)$ – стационарное распределение изолированного узла, определяемое с помощью (2).

Доказательство. Для доказательства того, что $p(x)$, определённые в (4), образуют стационарное распределение марковского процесса $x(t)$, достаточно подобрать функцию

$$q^R:(X,X)\setminus\{(x,x),x\in X\}\to[0,\infty),$$

которая удовлетворяла бы соотношениям

$$p(x)q^R(x,y)=p(y)q(y,x);\tag{5}$$

$$q^R(x)=\sum_{y\neq x}q^R(x,y)=\sum_{y\neq x}q(x,y)=q(x).\tag{6}$$

Если такие $q^R(x,y)$ удастся найти, то окажется, что $q^R(x,y)$ являются инфинитезимальными интенсивностями перехода для обращенной во времени цепи Маркова $x(-t)$, а $p(x)$ – стационарными вероятностями для $x(t)$ и $x(-t)$. Положим

$$\begin{gathered}
q^R\left(x,[\tilde{x}_i]\right)=\alpha_{iu}\pi_{iu}\left(x_i,\tilde{x}_i\right)p_{(i,u)0},\ \tilde{x}_i\in\Omega^+\left(i,u,l_i,x_i\right);\\
q^R\left(x,[\tilde{x}_i]\right)=\frac{\mu_{iu}\left(x_i,\tilde{x}_i\right)}{\alpha_{iu}}\lambda p_{0(i,u)}I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]},\ \tilde{x}_i\in\Omega^-\left(i,u,l_i,x_i\right);\\
q^R\left(x,[\tilde{x}_i]\right)=\nu_i\left(x_i,\tilde{x}_i\right)I_{[l_i\neq r_i]},\ \tilde{x}_i\in\Theta^+\left(i,u,l_i,x_i\right);\\
q^R\left(x,[\tilde{x}_i]\right)=\varphi_i\left(x_i,\tilde{x}_i\right)I_{[l_i\neq 0]},\ \tilde{x}_i\in\Theta^-\left(i,u,l_i,x_i\right);\\
q^R\left(x,\left[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j\right]\right)=\frac{\mu_{iu}\left(x_i,\tilde{x}_i\right)}{\alpha_{iu}}p_{(j,v)(i,u)}\alpha_{jv}\pi_{jv}\left(x_j,\tilde{x}_j\right)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]},\\
\tilde{x}_i\in\Omega^-\left(i,u,l_i,x_i\right),\tilde{x}_j\in\Omega^+\left(j,v,l_j,x_j\right).
\end{gathered}\tag{7}$$

Для всех иных состояний y положим $q^R(x,y)=0$. Для функции $q^R(x)$ соотношение (5) выполняется, что проверяется подстановкой в него равенств (3) и (7) и использования (4). Осталось доказать (6). Складывая равенства (7), имеем

$$\begin{gathered}
q^R(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_i\in\Omega^+(i,u,l_i,x_i)}\alpha_{iu}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)p_{(i,u)0}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i)}\frac{\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)}{\alpha_{iu}}\lambda p_{0(i,u)}I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}+\\
+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\tilde{x}_i\in\Theta^+(i,u,l_i,x_i)}\nu_i(x_i,\tilde{x}_i)I_{[l_i\neq r_i]}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\tilde{x}_i\in\Theta^-(i,u,l_i,x_i)}\varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)I_{[l_i\neq 0]}+\\
+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_j\in\Omega^+(j,v,l_j,x_j)}\frac{\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)}{\alpha_{iu}}p_{(j,v)(i,u)}\alpha_{jv}\pi_{jv}\left(x_j,\tilde{x}_j\right)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}=\\
=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i)}\frac{\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)}{\alpha_{iu}}\left(\lambda p_{0(i,u)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_j\in\Omega^+(j,v,l_j,x_j)}p_{(j,v)(i,u)}\alpha_{jv}\pi_{jv}\left(x_j,\tilde{x}_j\right)\right)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}+\\
+\sum_{i=1}^{N}\nu_i(x_i)I_{[l_i\neq r_i]}+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_i)I_{[l_i\neq 0]}.
\end{gathered}$$

Используя уравнения трафика (1), получим

$$\begin{gathered}
q^R(x)=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{\tilde{x}_i\in\Omega^-(i,u,l_i,x_i)}\frac{\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)}{\alpha_{iu}}\alpha_{iu}I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}+\sum_{i=1}^{N}\nu_i(x_i)I_{[l_i\neq r_i]}+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_i)I_{[l_i\neq 0]}=\\
=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{iu}(x_i)I_{\left[|x_i|_u^{l_i}\neq 0\right]}+\sum_{i=1}^{N}\nu_i(x_i)I_{[l_i\neq r_i]}+\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_i)I_{[l_i\neq 0]}.
\end{gathered}$$

Таким образом, $q^R(x)=q(x)$ для любого состояния $x\in X$. Теорема доказана.

4. Примеры

Пример 1. Рассмотрим частный случай исследованной выше сети: открытую неоднородную сеть с многорежимными стратегиями обслуживания, заявки в которой выбираются из очереди согласно дисциплине обслуживания LCFS PR с дообслуживанием. Такая модель сети рассматривалась в [3]. Интенсивность обслуживания заявки типа u i-м экспоненциальным прибором равна $\mu_{iu}(x_i)$, где $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,n(i)}, l_i)$ – состояние i-го узла. Здесь x_{i1} – тип заявки, находящейся последней в очереди, …, $x_{i,n(i)-1}$ – тип заявки, стоящей первой в очереди, $x_{i,n(i)}$ – тип заявки, находящейся на обслуживания, l_i – режим, в котором работает i-й узел, $n(i)$ – число заявок в i-м узле. Условия обратимости принимают вид

$$\nu_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i-1\right)\mu_{i,x_{i,n(i)}}\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right)\varphi_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)-1},l_i\right)=$$
$$=\nu_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)-1},l_i-1\right)\mu_{i,x_{i,n(i)}}\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i-1\right)\varphi_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right).$$

Здесь вероятность $\pi_{iu}(x,\tilde{x})=1$.

Из уравнений обратимости, которые для данной модели сети запишутся в виде

$$\lambda\,\varepsilon_{i,x_{i,n(i)}}\,p_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)-1},l_i\right)=$$
$$=p_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right)\mu_{i,x_{i,n(i)}}\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right),$$

$$\nu_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right)p_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i\right)=$$
$$=p_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i+1\right)\varphi_i\left(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{i,n(i)},l_i+1\right),$$

находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла

$$p_i(x_i)=\lambda^{n(i)}\prod_{s=1}^{n(i)}\frac{\varepsilon_{i,x_{is}}}{\mu_{i,x_{is}}(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{is},l_i)}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\varphi_i(0,k)}p_i(0,0).$$

Стационарное распределение сети получается умножением найденных вероятностей по всем $i=\overline{1,N}$.

Пример 2. В работе [4] рассматривается открытая неоднородная сеть с многорежимным обслуживанием. Обслуживание в узлах осуществляется согласно дисциплине разделения процессора с весами.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_N(t))$, где $x_i(t)=(\overline{x}_i(t),l_i(t))=(x_{i1}(t),x_{i2}(t),\dots,x_{iM}(t),l_i(t))$ описывает состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $x_{iu}(t)$ – число заявок u-го типа в i-м узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим, в котором работает i-й узел в момент времени t. Времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для заявок u-го типа в i-м узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{iu}\dfrac{x_{iu}}{x_i}$, x_i – общее число заявок в i-м узле.

Условия обратимости принимают вид

$$\nu_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM},l_i-1)\,\varphi_i(x_{i1},\dots,x_{iu}+1,\dots,x_{iM},l_i)=$$
$$=\nu_i(x_{i1},\dots,x_{iu}+1,\dots,x_{iM},l_i-1)\,\varphi_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM},l_i).$$

Здесь вероятность $\pi_{iu}(x,\tilde{x})=1$, $\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)=\mu_{iu}\dfrac{x_{iu}+1}{x_i+1}$.

Уравнения обратимости для данной модели сети запишутся в виде

$$\alpha_{iu}p_i(x_{i1},\dots,x_{iu},\dots,x_{iM},l_i)=$$
$$\mu_{iu}\frac{x_{iu}}{x_i}p_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{iM},l_i),\ \ u=\overline{1,M},\ \ l_i=\overline{0,r_i};$$

$$\nu_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{iM},l_i)\,p_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{iM},l_i)=$$
$$=\varphi_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{iM},l_i+1)\,p_i(x_{i1},x_{i2},...,x_{iM},l_i+1),\;\; l_i=\overline{0,r_i-1}.$$

Стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла

$$p_i(x_i)=x_i!\prod_{u=1}^{M}\frac{1}{x_{iu}!}\left[\frac{\alpha_{iu}}{\mu_{iu}}\right]^{x_{iu}}\prod_{s=1}^{l_i}\frac{\nu_i(0,s-1)}{\varphi_i(0,s)}p_i(0,0).$$

Стационарное распределение сети получается умножением найденных вероятностей по всем $i=\overline{1,N}$.

Заключение

В настоящей работе исследована неоднородная сеть с экспоненциальным обслуживанием в узлах и марковской маршрутизацией. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности. Время переключения с одного режима на другой имеет показательное распределение. Переключение происходит только на соседние режимы. Установлены достаточные условия мультипликативности стационарного распределения состояний сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю.В.*, *Нуеман А.Ю.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весцi НАН Беларусi. 2001. № 3. С. 129 – 134.
2. *Малинковский Ю.В.* Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 75 – 83.
3. *Летунович Ю.Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. Гродно, 2008. С. 97 – 99.
4. *Летунович Ю.Е.* Открытые неоднородные сети с многорежимными каналами и дисциплиной обслуживания PS // Юбилейная научно-практическая конференция: материалы конф. Гомель, 2009. Ч. 4. С. 141 – 144 .

Малинковский Юрий Владимирович
Летунович Юлия Евгеньевна
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
E-mail: Malinkovsky@gsu.by; yu28031984@yandex.ru
Поступила в редакцию 8 февраля 2010 г.