

УДК 681.5

С.В.Смагин

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С НЕИЗВЕСТНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Рассматривается алгоритм синтеза оптимального экстраполятора, определяющего оценку вектора состояния на один такт вперед для дискретной линейной динамической системы с аддитивными возмущениями, содержащими неизвестную постоянную составляющую. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: дискретная линейная система, экстраполятор, неизвестные возмущения.

Известные методы фильтрации и экстраполяции базируются на алгоритмах, использующих оценки неизвестного возмущения [1 – 7]. В настоящей работе для дискретного объекта с неизвестной постоянной составляющей возмущений предлагается метод оптимальной экстраполяции, не использующий оценки неизвестного возмущения. Метод базируется на преобразовании модели и сведения к задаче линейной калмановской экстраполяции [8]. Результаты настоящей статьи обобщают [9] на случай решения задач экстраполяции.

1. Постановка задачи

Рассматривается дискретная система, которая описывается следующими разностными уравнениями:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + f + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния; $A(k)$ – $n \times n$ -матрица; f – неизвестный постоянный вектор; $q(k)$ – белая гауссовская случайная последовательность с характеристиками

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{k,j}.$$

Канал наблюдений имеет вид

$$y(k) = S(k)x(k) + v(k), \quad (2)$$

где $y(k) \in R^l$ – вектор измерений; $S(k)$ – матрица размерности $l \times n$; $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность ошибок измерений с характеристиками

$$M\{v(k)\} = 0, \quad M\{q(k)v^T(j)\} = 0, \quad M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{i,j}.$$

Случайный вектор x_0 и процесс $(q(k), v(k))$ независимы:

$$M\{x(0)\} = \bar{x}_0, \quad M\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)^T\} = P_0.$$

Для системы (1) и канала наблюдений (2) требуется построить экстраполятор, вычисляющий оценку вектора состояния на один такт вперед, не использующий оценки неизвестной постоянной составляющей возмущений.

2. Экстраполяция в дискретных системах

Для решения задачи проводится преобразование дискретной системы (1). Для этого исключается постоянная составляющая возмущений f из описания объекта посредством вычитания из уравнения (1) такого же уравнения, но со сдвигом на один такт:

$$x(k+1) = (A(k) + E_n)x(k) - A(k-1)x(k-1) + q(k) - q(k-1). \quad (3)$$

Расширение пространства состояния системы осуществляется посредством добавления к уравнению (3) тождества $x(k) = x(k)$. Тогда система представляется в векторно-матричной форме

$$X(k+1) = \bar{A}(k)X(k) + \bar{q}(k), \quad X(0) = X_0, \quad (4)$$

где $\bar{A}(k) - (2n \times 2n)$ -матрица и вектор $\bar{q}(k)$ имеют следующую блочную структуру:

$$\bar{A}(k) = \begin{pmatrix} A(k) + E_n & -A(k-1) \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q(k) - q(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вектор $X_0 = (x_0^T \ x_{-1}^T)^T$ в (4) имеет характеристики

$$M\{X(0)\} = \bar{X}_0, \quad M\{(X_0 - \bar{X}_0)(X_0 - \bar{X}_0)^T\} = \bar{P}_0.$$

Отметим, что в рассмотренной модели (4) процесс $\bar{q}(k)$ не является белой гауссовской последовательностью, процессы $\bar{q}(k)$ и $\bar{q}(k-1)$ будут коррелированы:

$$M\{\bar{q}(k)\bar{q}^T(j)\} = \begin{cases} \bar{Q}(k), & \text{если } j = k, \\ \bar{\bar{Q}}(k-1), & \text{если } j = k-1, \\ 0, & \text{если } 0 \leq j < k-1, \end{cases}$$

где
$$\bar{Q}(k) = \begin{pmatrix} Q(k) + Q(k-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{Q}}(k-1) = \begin{pmatrix} -Q(k-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим канал наблюдений для расширенной системы (4) в виде

$$y(k) = \bar{S}(k)X(k) + v(k), \quad (6)$$

где $\bar{S}(k) = (S(k) \ 0)$.

В качестве уравнения для вычисления оценки прогноза вектора состояния для расширенной системы выберем уравнение, по своей структуре совпадающее с экстраполятором Калмана:

$$\hat{X}(k+1) = \bar{A}(k)\hat{X}(k) + K(k)(y(k) - \bar{S}(k)\hat{X}(k)), \quad \hat{X}(0) = \bar{X}_0. \quad (7)$$

Учитывая (4) – (7), получим следующее уравнение для ошибки $e(k) = \hat{X}(k) - X(k)$:

$$e(k+1) = (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))e(k) + K(k)v(k) - \bar{q}(k). \quad (8)$$

Матрица $\bar{P}(k) = M\{e(k)e^T(k)\}$ определится из следующего разностного уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) = M\{e(k+1)e^T(k+1)\} = & (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))\bar{P}(k)(\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))^T + \\ & + K(k)V(k)K^T(k) + \bar{Q}(k) - (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))Q_e(k) - Q_e^T(k)(\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))^T, \end{aligned}$$

$$\bar{P}(0) = \bar{P}_0, \quad (9)$$

где $Q_e(k) = M\{e(k)\bar{q}^T(k)\}$. Для вычисления $Q_e(k)$ необходимо уравнение (8) представить в виде

$$e(k) = (\bar{A}(k-1) - K(k-1)\bar{S}(k-1))e(k-1) + K(k-1)v(k-1) - \bar{q}(k-1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_e(k) = M\{e(k)\bar{q}^T(k)\} &= (\bar{A}(k-1) - K(k-1)\bar{S}(k-1))M\{e(k-1)\bar{q}^T(k)\} + \\ &+ K(k-1)M\{v(k-1)\bar{q}^T(k)\} - M\{\bar{q}(k-1)\bar{q}^T(k)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу того, что в (10) два первых слагаемых равны нулю, получим

$$Q_e(k) = -\bar{\bar{Q}}(k).$$

Окончательно, учитывая (9), получим уравнение

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) = M\{e(k+1)e^T(k+1)\} &= (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))\bar{P}(k)(\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))^T + \\ &+ K(k)V(k)K^T(k) + \bar{Q}(k) + (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))\bar{\bar{Q}}(k) + \bar{\bar{Q}}(k)(\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k))^T, \\ \bar{P}(0) &= \bar{P}_0, \end{aligned} \quad (11)$$

Оптимизируемый критерий, характеризующий точностные характеристики экстраполятора, зададим в виде

$$J(k+1) = \text{tr}\bar{P}(k+1). \quad (12)$$

Оптимальные коэффициенты передачи фильтра $K(k)$ определяются из условия

$$\frac{dJ(k+1)}{dK(k)} = 0. \quad (13)$$

Учитывая (12) и правую часть уравнения (11), применяя правила матричного дифференцирования следа от матрицы [10], получим из условия (13) уравнение для определения матрицы $K(k)$:

$$(S(k)\bar{P}(k)S^T(k) + V(k))K(k) - (A(k)\bar{P}(k)S^T(k) + \bar{\bar{Q}}(k)S^T(k)) = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) относительно $K(k)$ дает следующую формулу:

$$K(k) = (\bar{A}(k)\bar{P}(k) + \bar{\bar{Q}}(k))\bar{S}(k)^T (\bar{S}(k)\bar{P}(k)\bar{S}(k)^T + V(k))^{-1}. \quad (15)$$

Конечный результат сформулируем в виде теоремы, учитывая блочную структуру матрицы $\bar{P}(k)$:

$$\bar{P}(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) & p_2^T(k) \\ p_2(k) & p_3(k) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

а также блочные структуры матриц $\bar{A}(k)$, $\bar{S}(k)$, $\bar{Q}(k)$, $\bar{\bar{Q}}(k)$.

Теорема. Пусть процесс с неизвестным постоянным возмущением определяется уравнениями (1), модель канала наблюдений задается соотношением (2) при переменных матрицах A, Q, V, S . Тогда оптимальный алгоритм экстраполяции определится разностными уравнениями

$$\hat{x}(k+1) = (A(k) + E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + K_1(k)(y(k) - S(k)\hat{x}(k)) \quad (17)$$

с начальными условиями для экстраполятора

$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \hat{x}(1) = M\{x(1)\} = \bar{x}_1.$$

Матрица $K_1(k)$ в (17) выражается по формуле

$$K_1(k) = [(A(k) - E_n)p_1(k) - A(k-1)p_2(k) - Q(k-1)] \times \\ \times S^T(k)(S(k)p_1(k)S(k)^T + V(k))^{-1}, \quad (18)$$

где матрица $p_1(k)$ определяется из следующей системы уравнений:

$$p_1(k+1) = (A(k) - E_n - K_1(k)S(k))p_1(k)(A(k) - E_n - K_1(k)S(k))^T - \\ - A(k-1)p_2(k)(A(k) - E_n - K_1(k)S(k))^T - (A(k) - E_n - K_1(k)S(k)) \times \\ \times p_2^T(k)A^T(k-1) + A(k-1)p_3(k)A^T(k-1) + K_1(k)V(k)K_1^T(k) + \\ - (A(k) - E_n - K_1(k)S(k))Q(k-1) - Q(k-1)(A(k) - E_n - K_1(k)S(k))^T + \\ + Q(k) + Q(k-1), \quad p_1(0) = p_{1,0}, \quad (19)$$

$$p_2(k+1) = (E_n - K_2(k)S(k))p_1(k)(A(k) - E_n - K_1(k)S(k))^T - \\ - (E_n - K_2(k)S(k))p_2^T(k)A(k-1) - (E_n - K_2(k)S(k))Q(k-1) + \\ + K_2(k)V(k)K_1^T(k), \quad p_2(0) = p_{2,0}, \quad (20)$$

$$p_3(k+1) = (E_n - K_2(k)S(k))p_1(k)(E_n - K_2(k)S(k))^T + \\ + K_2(k)V(k)K_2^T(k), \quad p_3(0) = p_{3,0}, \quad (21)$$

$$K_2(k) = p_1(k)S^T(k)(S(k)p_1(k)S(k)^T + V(k))^{-1}. \quad (22)$$

В (19) – (22) начальные условия $p_{1,0}$, $p_{2,0}$, $p_{3,0}$ являются соответствующими блоками матрицы $\bar{P}_0$.

Доказательство строится на использовании формул (7), (11), (15), (16) и на блочном представлении матрицы $K(k)$ в виде

$$K(k) = \begin{pmatrix} K_1(k) \\ K_2(k) \end{pmatrix}.$$

Замечание. Задачу экстраполяции можно также рассмотреть для следующего канала наблюдений:

$$y(k) = \bar{S}(k)X(k) + \bar{v}(k),$$

где
$$\bar{S}(k) = \begin{pmatrix} S(k) & 0 \\ 0 & S(k-1) \end{pmatrix}, \quad \bar{v}(k) = \begin{pmatrix} v(k) \\ v(k-1) \end{pmatrix}.$$

$\bar{v}(k)$ – случайная последовательность ошибок измерений с характеристиками:

$$M\{\bar{v}(k)\} = 0, \quad M\{q(k)\bar{v}^T(j)\} = 0, \\ M\{\bar{v}(k)\bar{v}^T(j)\} = \bar{V}(k)\delta_{i,j}, \quad \bar{V}(k) = \begin{pmatrix} V(k) & 0 \\ 0 & V(k-1) \end{pmatrix}.$$

3. Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим применение алгоритма экстраполяции для модели второго порядка вида (1), канала наблюдений (2) со следующими значениями параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix}; V = 0,8;$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}; x_0 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,5 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Результаты моделирования предложенного экстраполятора (17) и экстраполятора Калмана [8], не учитывающего наличие неизвестных возмущений, приведены на рис. 1.

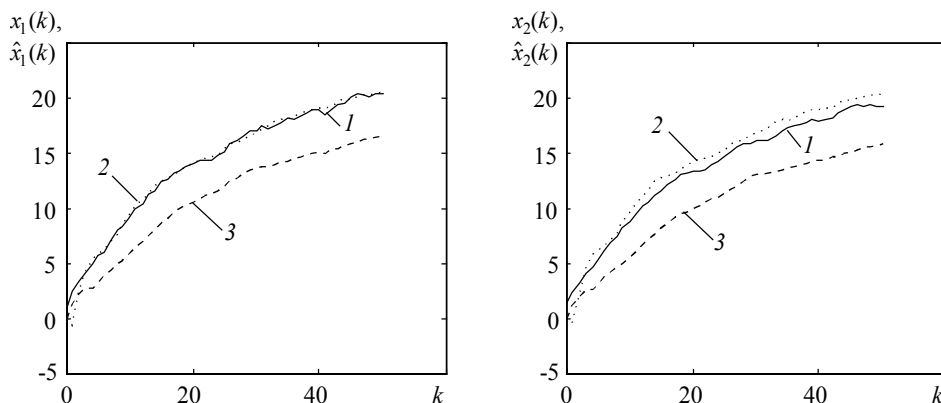


Рис. 1. Результаты сравнения (1 – реализация процесса; 2 – реализации оценок экстраполяции, построенных по алгоритму (17); 3 – оценка, построенная с помощью экстраполятора Калмана, не учитывающего наличие неизвестных возмущений)

Заключение

Разработан алгоритм синтеза дискретного оптимального экстраполятора для объекта, возмущения которого содержат неизвестную постоянную составляющую. Алгоритм построен на основе расширения пространства состояния и исключения из модели неизвестной составляющей. В отличие от классического экстраполятора Калмана, предложенный экстраполятор использует рекуррентные оценки, построенные на двух предыдущих тактах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Astrom K., Eykhoff P. System identification. A survey // Automatica. 1971. V. 7. P. 123 – 162.
2. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1969. V. AC-14. P. 359 – 367.
3. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111 – 116.
4. Hou M., Patton R. Optimal filtering for systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1998. V. AC-43. P. 445 – 449.
5. Hsieh C.-S. A unified solution to unbiased minimum-variance estimation for systems with unknown inputs // Proc. 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul. Korea. July 6 – 11, 2008. P. 14502 – 14509.

6. Hsieh C.-S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automat. Contr. 2000. V. AC-45. P. 2374 – 2378.
7. Пугачев В.С., Силин И.Н. Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1990. 630 с.
8. Kalman R.E., Bucy R. A new results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME J. Basic Engr. 1961. V. 83. P. 95 – 108.
9. Смагин С.В. Фильтрация в линейных дискретных системах с неизвестными возмущениями // Автометрия. 2009. Т. 45. № 6. С. 29 – 37.
10. Амосов А.А., Колпаков В.В. Скалярно-матричное дифференцирование и его применение к конструктивным задачам теории связи // Проблемы передачи информации. 1972. № 1. С. 3 – 15.

Смагин Сергей Валерьевич

Томский государственный университет

E-mail: ssv@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 15 декабря 2009 г.