

УДК 519.872

И.А. Ивановская, С.П. Моисеева

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ¹

В работе построена модель параллельного обслуживания заявок в системе массового обслуживания, состоящей из нескольких блоков обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. Найдено аналитическое выражение для производящей функций многомерного распределения вероятностей состояний цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в нестационарном режиме.

Ключевые слова: немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, пуассоновский поток кратных заявок.

Параллельность процессов вычислений и обработки информации является одним из основных принципов, используемых при проектировании современных компьютерных сетей. Это позволяет достигать максимальной скорости в работе и существенной экономии времени. При оценке производительности первостепенное значение имеет продолжительность вычислительных процессов. Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели массового обслуживания. Использование аппарата теории массового обслуживания позволяет построить математические модели коммутационных сетей и провести теоретические исследования параметров функционирования реальной вычислительной системы [1, с. 9 – 13; 2, с. 19 – 21].

Одним из основных принципов при проектировании современных компьютерных сетей является параллельность процессов обработки информации. Поэтому анализ математических моделей с параллельно функционирующими блоками обслуживания и общими входящими потоками имеет практическое значение [3 – 5].

1. СМО с параллельным обслуживанием двоянных заявок

Рассмотрим систему с двумя блоками обслуживания (рис. 1), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает простейший с параметром λ поток двоянных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки.

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая – во второй блок обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

Состояние системы определим вектором $\{i_1, i_2\}$, где i_k – число заявок в k -м блоке. Тогда случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$ изменения во времени состояний системы является двумерной эргодической цепью Маркова [1].

¹ Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)», проект № 4761

Обозначим $P(i, j, t) = P\{i_1(t) = i, i_2(t) = j\}$ – распределение вероятностей состояний двумерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени t .

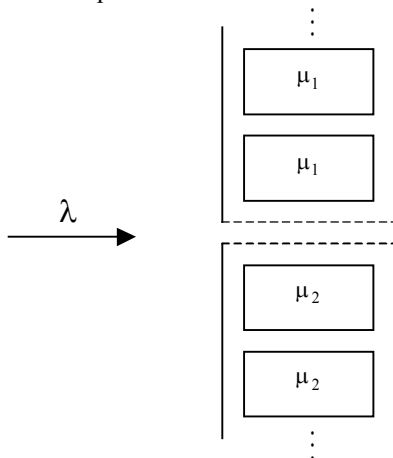


Рис. 1. СМО с параллельным обслуживанием двойных заявок

1.1. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [4]. По формуле полной вероятности запишем равенства

$$P(i, j, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - i\mu_1 \Delta t)(1 - j\mu_2 \Delta t)P(i, j, t) + \lambda \Delta t P(i-1, j-1, t) + \\ + (i+1)\mu_1 \Delta t P(i+1, j, t) + (j+1)\mu_2 \Delta t P(i, j+1, t) + o(\Delta t).$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial P(i, j, t)}{\partial t} = -(\lambda + i\mu_1 + j\mu_2)P(i, j, t) + \lambda P(i-1, j-1, t) + \\ + (i+1)\mu_1 P(i+1, j, t) + (j+1)\mu_2 P(i, j+1, t). \quad (1)$$

Определим производящую функцию двумерного распределения $P(i, j, t)$ в виде [3]

$$F(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j P(i, j, t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова (1) имеем

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = -\lambda F(x, y, t) - \mu_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} i x^i y^j P(i, j, t) - \mu_2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j y^j x^i P(i, j, t) + \\ + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x^i y^j P(i-1, j-1, t) + \mu_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (i+1) x^i y^j P(i+1, j, t) + \mu_2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) x^i y^j P(i, j+1, t),$$

откуда получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функций $F(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = & -\lambda F(x, y, t) - \mu_1 x \frac{F(x, y, t)}{\partial x} - \mu_2 y \frac{F(x, y, t)}{\partial y} + \\ & + \lambda xy F(x, y, t) + \mu_1 \frac{F(x, y, t)}{\partial x} - \mu_2 \frac{F(x, y, t)}{\partial y}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} + \mu_1(x-1) \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial x} + \mu_2(y-1) \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial y} = \lambda(xy-1)F(x, y, t). \quad (2)$$

1.2. Вид производящей функции при нестационарном функционировании СМО

Поставим задачу нахождения производящей функции при нестационарном функционировании рассматриваемой СМО.

$F(x, y, t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка.

Для нахождения начальных условий воспользуемся тем фактом, что производящая функция нестационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе $M|M|\infty$ определяется выражением [4, с. 70 – 72]:

$$F(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(i, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} (x-1)t \right\}.$$

Тогда для производящих функций одномерных маргинальных распределений имеем

$$\begin{aligned} F(x, 1, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} x^i P(i, j, t) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P(j, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1)t \right\}, \\ F(1, y, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} y^j P(i, j, t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^i P(i, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1)t \right\}, \\ F(1, 1, t) &= 1, \\ F(x, y, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем систему уравнений (2) в частных производных первого порядка [4, с. 71; 6, с. 241]:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\mu_1(x-1)} = \frac{dy}{\mu_2(y-1)} = \frac{dF}{\lambda(xy-1)F}.$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений перепишем в следующем виде:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\mu_1(x-1)} = \frac{dy}{\mu_2(y-1)} = \frac{dF}{\lambda[(x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1)]F}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Один из них найдем из уравнения

$$dt = \frac{dx}{\mu_1(x-1)}.$$

Очевидно, имеем

$$\mu_1 t = \ln(x-1) - \ln C_1,$$

откуда получаем выражения

$$x-1 = C_1 e^{\mu_1 t},$$

$$C_1 = (x-1) e^{-\mu_1 t}. \quad (4)$$

Другой первый интеграл найдем из уравнения

$$dt = \frac{dy}{\mu_2(y-1)}.$$

Имеем

$$\mu_2 t = \ln(y-1) - \ln C_2,$$

откуда получаем выражения

$$y-1 = C_2 e^{\mu_2 t},$$

$$C_2 = (y-1) e^{-\mu_2 t}. \quad (5)$$

Последний интеграл найдем из уравнения

$$\frac{dF}{\lambda F [(x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1)]} = \frac{dt}{1},$$

$$\frac{dF}{\lambda F (C_1 e^{\mu_1 t} \cdot C_2 e^{\mu_2 t} + C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t})} = \frac{dt}{1},$$

$$\frac{dF}{F} = \lambda (C_1 e^{\mu_1 t} \cdot C_2 e^{\mu_2 t} + C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}) dt,$$

$$\ln F - \ln C_3 = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} C_1 C_2 e^{(\mu_1 + \mu_2)t} + \frac{\lambda}{\mu_1} C_1 e^{\mu_1 t} + \frac{\lambda}{\mu_2} C_2 e^{\mu_2 t},$$

$$F = C_3 \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} C_1 C_2 e^{(\mu_1 + \mu_2)t} + \frac{\lambda}{\mu_1} C_1 e^{\mu_1 t} + \frac{\lambda}{\mu_2} C_2 e^{\mu_2 t} \right\}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (4), (5) для C_1 и C_2 , общее решение уравнения (6) можно записать следующим образом:

$$F(x, y, t) = \Phi((x-1)e^{-\mu_1 t}, (y-1)e^{-\mu_2 t}) \exp \left\{ \frac{\lambda(x-1)(y-1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x-1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(y-1) \right\}, \quad (7)$$

где $\Phi(x, y)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Для того чтобы найти $\Phi(x, y)$, воспользуемся начальными условиями (3):

$$F(x, y, 0) = \Phi(x-1, y-1) \cdot \exp \left\{ \frac{\lambda(x-1)(y-1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x-1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(y-1) \right\} = 1,$$

$$\Phi(x-1, y-1) = \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda(x-1)(y-1)}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}(x-1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(y-1) \right) \right\}.$$

Следовательно,

$$\Phi((x-1)e^{-\mu_1 t}, (y-1)e^{-\mu_2 t}) = \exp \left\{ -\frac{\lambda(x-1)(y-1)}{\mu_1 + \mu_2} e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} - \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1) e^{-\mu_1 t} - \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1) e^{-\mu_2 t} \right\}.$$

Подставляя полученное выражение в (7), запишем вид производящей функции $F(x, y, t)$:

$$F(x, y, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(y-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1)(1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1)(1 - e^{-\mu_2 t}) \right\}. \quad (8)$$

Из (8) можно получить основные вероятностные характеристики двумерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени.

Для этого возьмем производные соответствующих порядков.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial x} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (y-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \right) F(x, y, t), \\ \frac{\partial F(x, y, t)}{\partial y} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \right) F(x, y, t), \\ \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x^2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (y-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \right)^2 F(x, y, t), \\ \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial y^2} &= \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \right)^2 F(x, y, t), \\ \frac{\partial^2 F(x, y, t)}{\partial x \partial y} &= \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \left(\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (y-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \right] F(x, y, t), \end{aligned}$$

получаем

1) математическое ожидание числа заявок:

а) в первом блоке системы:

$$Mi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}),$$

б) во втором блоке системы:

$$Mi_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t});$$

2) дисперсия числа заявок:

а) в первом блоке системы:

$$Mi_1^2 - Mi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \right)^2,$$

б) во втором блоке системы:

$$Mi_2^2 - Mi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \right)^2;$$

3) корреляционный момент двумерной случайной величины $\{i_1, i_2\}$

$$M\{i_1 i_2\} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}).$$

Если в (8) $t \rightarrow \infty$, то получим вид производящей функции для стационарного распределения вероятностей

$$F(x, y) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(y-1) + \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1) + \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1) \right\}.$$

2. СМО с параллельным обслуживанием кратных заявок (при $k = 3$)

Рассмотрим систему с тремя блоками обслуживания (рис.2), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает простейший с параметром поток строенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают три заявки.

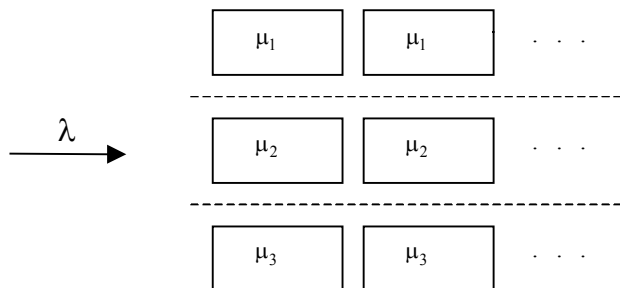


Рис. 2. СМО с параллельным обслуживанием строенных заявок

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, вторая – во второй, а третья – в третий блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1, μ_2 и μ_3 соответственно.

Состояние системы определим вектором $\{i_1, i_2, i_3\}$, где i_k – число заявок в k -м блоке. Тогда случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$, изменения во времени состояний системы является трехмерной эргодической цепью Маркова [1. С. 29 – 31].

Обозначим

$$P(i, j, k, t) = P\{i_1(t) = i, i_2(t) = j, i_3(t) = k\}$$

– распределение вероятностей состояний трехмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени t .

Ставится задача нахождения производящей функции при нестационарном функционировании рассматриваемой СМО.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(i, j, k, t)}{\partial t} = & -(\lambda + i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3)P(i, j, k, t) + (i+1)\mu_1 P(i+1, j, k, t) + \\ & + (j+1)\mu_2 P(i, j+1, k, t) + (k+1)\mu_3 P(i, j, k+1, t) + \lambda P(i-1, j-1, k-1, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Определим производящую функцию трехмерного распределения $P(i, j, k, t)$ в виде

$$F(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^i y^j z^k P(i, j, k, t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова (9) для распределений $P(i, j, k, t)$ нетрудно получить дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функций $F(x, y, z, t)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} + \mu_1(x-1) \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x} + \mu_2(y-1) \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial y} + \mu_3(z-1) \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial z} = \\ = \lambda(xyz-1)F(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Затем, проведя аналогичные выкладки так же, как в разделе 1, получим следующие результаты.

Выражение для производящей функции $F(x, y, z, t)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} (x-1)(y-1)(z-1) (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)t}) + \right. \\ + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(y-1) (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}) + \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} (y-1)(z-1) (1 - e^{-(\mu_2 + \mu_3)t}) + \\ + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3} (x-1)(z-1) (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_3)t}) + \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \\ \left. + \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1) (1 - e^{-\mu_2 t}) + \frac{\lambda}{\mu_3} (z-1) (1 - e^{-\mu_3 t}) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из полученной производящей функции (10) получим основные вероятностные характеристики трехмерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени.

1) математическое ожидание числа заявок:

а) в первом блоке системы:

$$Mi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}),$$

б) во втором блоке системы:

$$Mi_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}),$$

в) в третьем блоке системы:

$$Mi_3 = \frac{\lambda}{\mu_3} (1 - e^{-\mu_3 t});$$

2) дисперсия числа заявок:

а) в первом блоке системы:

$$Mi_1^2 - Mi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu_1} (1 - e^{-\mu_1 t}) \right)^2,$$

б) во втором блоке системы:

$$Mi_2^2 - Mi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu_2} (1 - e^{-\mu_2 t}) \right)^2,$$

в) в третьем блоке системы:

$$Mi_3^2 - Mi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu_3} (1 - e^{-\mu_3 t}) \right)^2.$$

Если рассматривать стационарный режим, то получим следующий вид производящей функции $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} (x-1)(y-1)(z-1) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} (x-1)(y-1) + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} (y-1)(z-1) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3} (x-1)(z-1) + \frac{\lambda}{\mu_1} (x-1) + \frac{\lambda}{\mu_2} (y-1) + \frac{\lambda}{\mu_3} (z-1) \right\}.$$

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены системы массового обслуживания с параллельным обслуживанием кратных заявок с двумя и тремя блоками обслуживания. Получены выражения для производящих функций и числовые характеристики цепи Маркова при нестационарном функционировании рассматриваемых СМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд., испр. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
2. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования: пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 512 с.
3. Ивановская И. А., Моисеева С.П. Математическая модель параллельного обслуживания заявок в распределенных вычислительных системах // Сб. науч. статей. Минск, 2010. Вып. 3. С.123 – 128.
4. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ. 2004. 228 с.
5. Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сб. науч. статей. Минск, 2009. Вып. 2. С.262 – 268.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Ивановская Ирина Анатольевна

Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске

Моисеева Светлана Петровна

Томский государственный университет

E-mail: irinka_asf@mail.ru; smoiseeva@mail.ru

Поступила в редакцию 24 февраля 2010 г.