

УДК 519.21

А.М. Горцев, В.Л. Зуевич

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЁРТВОГО ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний, являющегося одной из математических моделей информационных потоков событий, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Условия наблюдения за потоком таковы, что каждое наблюдаемое событие порождает период мёртвого времени, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению и не вызывают продления его периода (непродлеваемое мёртвое время). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: асинхронный дважды стохастический поток событий, апостериорная вероятность, оптимальная оценка состояний, мёртвое время.

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах, в частности, случайные потоки событий служат математическими моделями информационных потоков заявок, функционирующих в ЦСИО. Современными математическими моделями информационных потоков в ЦСИО являются дважды стохастические потоки событий: потоки, интенсивность которых случайным образом изменяется со временем, т.е. является случайным процессом. Одними из первых работ, положивших начало систематическому исследованию дважды стохастических потоков событий, были работы [1 – 3].

Режимы функционирования СМО и СеМО непосредственно зависят от значений (состояний) интенсивностей входящих потоков событий. В силу того, что состояние интенсивности дважды стохастического потока является принципиально ненаблюдаемым, возникает важная задача оценки состояния интенсивности (состояния потока) в произвольный момент времени по наблюдениям за моментами наступления событий потока. Достаточно обширная литература по оценке состояний дважды стохастических потоков приведена в [4 – 6], поэтому здесь специально не будем останавливаться на классификации дважды стохастических потоков (асинхронных, синхронных и полусинхронных) и решении задач по оценке состояний этих потоков. Подчеркнём, что большинство авторов изучает СМО и СеМО в условиях, когда все события функционирующих в СМО и СеМО потоков событий доступны наблюдению. Однако на практике возможны ситуации, при которых часть событий становится недоступной для наблюдения. Одной из причин последнего являются регистрирующие приборы [7]: наблюдаемое (зарегистрированное) событие порождает период мёртвого времени, в течение которого другие

наступившие события недоступны наблюдению (не регистрируются, теряются для СМО либо СеМО). Можно считать, что период мёртвого времени продолжается некоторое фиксированное время T . Все устройства регистрации делятся на две группы. Первую группу составляют устройства с непродлевающимся мёртвым временем, вторую – устройства с продлевающимся мёртвым временем. Одними из первых работ по оценке параметров случайных потоков событий, функционирующих в условиях мёртвого времени (как продлевающегося, так и непродлевающегося), являются работы [8 – 10].

В работах [6, 11] решена задача об оптимальной оценке состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний в условиях отсутствия мёртвого времени. Впервые постановка этой задачи и попытка её решения предпринята в [12]. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [6], решается задача об оптимальной оценке состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний в условиях его неполной наблюдаемости (при непродлеваемом мёртвом времени). Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Данный критерий обеспечивает минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [13].

1. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток событий с конечным числом состояний (далее асинхронный поток либо просто поток). Интенсивность потока – кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с n состояниями: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$). Процесс (поток) в момент времени t находится в i -м состоянии, если $\lambda(t) = \lambda_i$ ($i = \overline{1, n}$). В течение времени пребывания в i -м состоянии поток ведет себя как пуассоновский с интенсивностью λ_i ($i = \overline{1, n}$). Длительность пребывания в i -м состоянии является экспоненциально распределенной случайной величиной с функцией распределения $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ii}\tau}$, где

$\alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$); $\alpha_{ij} > 0$ ($i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$) – интенсивность перехода про-

цесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j , т.е. величины α_{ij} образуют матрицу интенсивностей (матрицу инфинитезимальных коэффициентов) переходов между состояниями $\|\alpha_{ij}\|_1^n$. Можно показать [6], что $\lambda(t)$ – транзитивный марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает время фиксированной длительности T (мёртвое время), в течение которого другие события исходного асинхронного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мёртвого времени, не вызывают продления его периода (непродлеваемое мёртвое время). По окончании мёртвого времени первое наступившее событие снова создаёт период мёртвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведён на рис. 1 для $n = 3$, где 1, 2, 3 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; штриховка – периоды мёртвого времени длительности T ; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

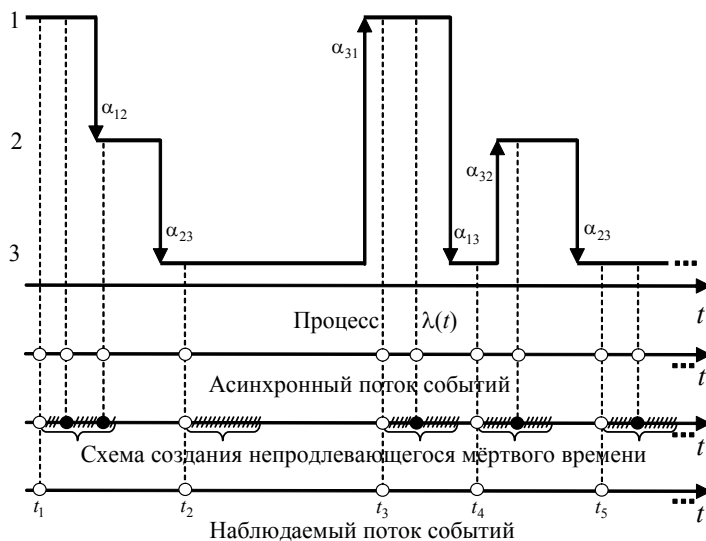


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \dots$, поэтому необходимо по наблюдениям $t_1, t_2, \dots$ оценить состояние процесса $\lambda(t)$ (потока) в момент окончания наблюдений.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t) , где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t) = \omega(\lambda_j | t_1, t_2, \dots, t_m, t)$ ($j = \overline{1, n}$) того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$ (m – количество наблюденных событий за время t), при этом $\sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) = 1$.

Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путём сравнения апостериорных вероятностей: если $\omega(\lambda_j | t) \geq \omega(\lambda_i | t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

2. Алгоритм оптимальной оценки состояний асинхронного потока

Рассмотрим интервал (t_k, t_{k+1}) ($k = 1, 2, \dots$) между двумя соседними событиями в наблюдаемом потоке. Так как моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке случайны, то длительность интервала (t_k, t_{k+1}) – случайная величина. Длительность начального интервала (t_0, t_1) – также случайная величина, так как временной момент наступления первого события наблюдаемого потока случаен. Таким образом, значение длительности интервала (t_k, t_{k+1}) есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ($k = 0, 1, \dots$). С другой стороны, так как наступившее в момент времени t_k событие

наблюдаемого потока порождает период мёртвого времени длительности T , то $\tau_k = T + \eta_k$, где η_k – значение длительности интервала между моментом окончания периода мёртвого времени и моментом t_{k+1} . Таким образом, временной интервал (t_k, t_{k+1}) разбивается на два смежных интервала: первый – $(t_k, t_k + T)$, второй – $(t_k + T, t_{k+1})$. Подчёркнём одно важное обстоятельство: так как первое наступившее после окончания периода мёртвого времени событие асинхронного потока снова порождает период мёртвого времени фиксированной длительности T , в течение которого последующие события асинхронного потока недоступны наблюдению (поток отсутствует), то условия нахождения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) на интервале $(t_k, t_k + T)$ длительности T и на интервале $(t_k + T, t_{k+1})$, значение длительности которого есть η_k , принципиально разные. Кроме того, для нахождения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) необходимо точно знать длительность T мёртвого времени либо, по крайней мере, предварительно осуществить её оценку $\hat{T}$. В противном случае отсутствие информации о длительности T мёртвого времени делает попытку строгого нахождения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) невозможной. В настоящей работе предполагается, что T известно точно.

В [6] сформулирован алгоритм расчёта апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) для случая отсутствия мёртвого времени ($T = 0$). При этом поведение $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 1, 2, \dots$) между соседними наблюденными событиями асинхронного потока, а также на полуинтервале $[t_0, t_1)$ между началом наблюдений и наблюдением первого события определяется выражением

$$\omega(\lambda_j | t) = \frac{\sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n s_{il} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $t_k \leq t < t_{k+1}$, $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0) = \sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k)$, $z_l(t_k) = \sum_{i=1}^n s_{li}^{-1} \omega(\lambda_i | t_k + 0)$,

$k = 0, 1, \dots$; ω_l ($l = \overline{1, n}$) – собственные числа матрицы $D = \|d_{il}\|_1^n$, $d_{il} = \alpha_{li}$ ($i \neq l$), $d_{ii} = \alpha_{ii} - \lambda_i$ ($i, l = \overline{1, n}$); s_{il} – элементы матрицы $S = \|s_{il}\|_1^n$, в которой l -й столбец является собственным вектором, соответствующим собственному числу ω_l ; s_{li}^{-1} ($l, i = \overline{1, n}$) – элементы матрицы S^{-1} , обратной матрице S .

В момент времени t_k (в момент наступления события асинхронного потока) апостериорная вероятность (1) претерпевает разрыв 1-го рода ($k = 1, 2, \dots$), поэтому в момент времени t_k имеет место формула пересчёта:

$$\omega(\lambda_j | t_k + 0) = \frac{\lambda_j \omega(\lambda_j | t_k - 0)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t_k - 0)} \quad (j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $\omega(\lambda_j | t_k - 0)$ вычисляется по формуле (1) в момент $t = t_k$, когда t изменяется в полуинтервале $[t_{k-1}, t_k)$, соседнем с полуинтервалом $[t_k, t_{k+1})$. В качестве начально-

го значения $\omega(\lambda_j | t_0 + 0) = \omega(\lambda_j | t_0 = 0)$ в (1) выбираются априорные финальные вероятности π_j ($j = \overline{1, n}$) состояний процесса $\lambda(t)$ в стационарном режиме ($t \rightarrow \infty$), являющиеся решением системы линейных алгебраических уравнений [6]:

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \alpha_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1. \quad (3)$$

Таким образом, вычисление апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) по формуле (1) в условиях, когда длительность мёртвого времени $T \neq 0$, справедливо на полуинтервале $[t_k + T, t_{k+1})$, значение длительности которого есть η_k . При этом начальное условие для $\omega(\lambda_j | t)$ привязывается к моменту времени $t_k + T$, т.е. в формуле (1), во-первых, нужно $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ заменить на $\omega(\lambda_j | t_k + T)$, во-вторых, $t_k + T \leq t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Формула пересчёта (2) остаётся при этом без изменения, так как она предназначена для вычисления апостериорных вероятностей в момент t_k наступления события, которое порождает мёртвое время.

Рассмотрим отрезок $[t_k, t_k + T]$, $k = 1, 2, \dots$. Так как на этом отрезке длительности T событие наблюдаемого потока имеет место в граничной точке t_k , а на самом отрезке события отсутствуют, то необходимо определить поведение апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) на отрезке $[t_k, t_k + T]$. Определим апостериорную вероятность $\omega(\lambda_j | t + \Delta t)$ того, что в момент времени $t + \Delta t$ ($t_k < t + \Delta t < t_k + T$), где Δt – достаточно малая величина, процесс $\lambda(t)$ находится в j -м состоянии ($j = \overline{1, n}$). Пусть в момент времени t процесс $\lambda(t)$ находится в j -м состоянии и на интервале $(t, t + \Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ не перешёл в i -е состояние ($i = \overline{1, n}, i \neq j$), т.е. остался в j -м состоянии. Вероятность этого события есть $\omega(\lambda_j | t)(1 + \alpha_{jj}\Delta t) + o(\Delta t)$. Пусть в момент времени t процесс $\lambda(t)$ находится в i -м ($i = \overline{1, n}$) состоянии, и на интервале $(t, t + \Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ перешёл в j -е состояние. Вероятность этого события есть $\sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij} \Delta t \omega(\lambda_i | t) + o(t)$. Другие возможности имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Тогда

$$\omega(\lambda_j | t + \Delta t) = (1 + \alpha_{jj}\Delta t)\omega(\lambda_j | t) + \Delta t \sum_{i=1, i \neq j}^n \alpha_{ij}\omega(\lambda_i | t) + o(\Delta t) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Производя в (4) необходимые преобразования, после чего переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем линейную однородную систему дифференциальных уравнений для апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$:

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\omega(\lambda_i | t) \quad (t_k \leq t \leq t_k + T, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

с граничными условиями: $\omega(\lambda_j | t = t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0)$ ($k = 1, 2, \dots$). Последнее вытекает из того, что на полуинтервале $[t_{k-1} + T, t_k)$ ($k = 2, 3, \dots$), смежном отрезку $[t_k, t_k + T]$, апостериорные вероятности рассчитываются по формуле (1), где вместо $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ стоит $\omega(\lambda_j | t_k + T)$; в точке $t = t_k$ происходит пересчёт апостериорных вероятностей по формуле (2), так что их значение в этой точке есть $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ ($j = \overline{1, n}$). Для граничного полуинтервала $[t_0, t_1)$ расчёт апостериорных вероятностей

стей $\omega(\lambda_j | t)$ производится по формуле (1) с их последующим пересчётом по формуле (2) в точке $t = t_1$.

Так как апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ для любого t удовлетворяют условию нормировки $\sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) = 1$, то выражая, например, $\omega(\lambda_n | t) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega(\lambda_j | t)$ и подставляя данное представление в (5), осуществляем понижение порядка системы (5):

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \alpha_{nj} + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{ij} - \alpha_{nj})\omega(\lambda_i | t) \quad (t_k \leq t \leq t_k + T, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Сделаем одно замечание относительно системы (6). Поскольку $\lambda(t)$ – транзитивный марковский процесс, то при $t \rightarrow \infty$ апостериорные вероятности стремятся к пределам $\omega(\lambda_j)$, не зависящим от начальных условий [14]. Тогда система (6) при $t \rightarrow \infty$ приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{nj} - \alpha_{ij})\omega(\lambda_i) = \alpha_{nj} \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad \omega(\lambda_n) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega(\lambda_j). \quad (7)$$

Полученная система линейных неоднородных алгебраических уравнений (7) идентична системе (3), так что $\omega(\lambda_j) = \pi_j \quad (j = \overline{1, n})$.

Система (6) является системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений относительно неизвестных апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n-1}$), с начальными условиями, аналогичными начальным условиям системы (5). Её решение есть сумма решений линейной однородной системы и частного решения неоднородной системы. Найдём решение однородной линейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\omega(\lambda_j | t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{ij} - \alpha_{nj})\omega(\lambda_i | t) \quad (t_k \leq t \leq t_k + T, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Пусть $a = \|a_{ji}\|_1^{n-1}$ ($a_{ji} = \alpha_{ij} - \alpha_{nj}$) – матрица коэффициентов системы (8); $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ – собственные числа матрицы a ; $A = \|A_{ji}\|_1^{n-1}$ – матрица, составленная из собственных векторов матрицы a так, что i -й столбец матрицы A соответствует собственному числу α_i ($i = \overline{1, n-1}$). Тогда общее решение системы (8) запишется в виде [15]

$$\omega(\lambda_j | t) = \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji} z_i(t_k) e^{\alpha_i t} \quad (t_k \leq t \leq t_k + T, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots),$$

где $z_i(t_k)$ ($i = \overline{1, n-1}$) – константы, которые определяются из начальных условий для неоднородной системы (6).

Частное решение неоднородной системы (6) будем искать в виде $\omega(\lambda_j | t) = B_j$ ($j = \overline{1, n-1}$). Тогда для определения неизвестных констант B_j ($j = \overline{1, n-1}$) имеем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно B_j :

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{ji} - \alpha_{ni}) B_j = -\alpha_{ni} \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

решение которой есть $B_j = \det a_j / \det a$, где

$\det a_j$ – определитель, полученный из $\det a$ заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда решение системы (6) записывается в виде

$$\omega(\lambda_j | t) = \frac{\det a_j}{\det a} + \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji} z_i(t_k) e^{\alpha_i t} \quad (t_k \leq t \leq t_k + T, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots)$$

с начальными условиями $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0)$ ($j = \overline{1, n-1}$). С учетом этих начальных условий значения констант $z_i(t_k)$ ($i = \overline{1, n-1}$) находятся как решение системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_{ji} z_i(t_k) e^{\alpha_i t_k} = \omega(\lambda_j | t_k + 0) - \frac{\det a_j}{\det a} \quad (j = \overline{1, n-1}, \quad k = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Таким образом, получен следующий результат: на отрезке $[t_k, t_k + T]$ ($k = 1, 2, \dots$) поведение апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_j | t) &= \frac{\det a_j}{\det a} + \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji} z_i(t_k) e^{\alpha_i t} \quad (j = \overline{1, n-1}), \\ \omega(\lambda_n | t) &= 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega(\lambda_j | t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $t_k \leq t \leq t_k + T$, $k = 1, 2, \dots$; $z_i(t_k)$ ($i = \overline{1, n-1}$) удовлетворяют системе (9); все остальные величины, входящие в (10), определены выше.

Подчеркнём одно важное обстоятельство. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(\lambda_j | t) = \pi_j$ при $t \rightarrow \infty$ ($j = \overline{1, n}$), что отмечено при выводе системы (7), то из (10), во-первых, следует, что все собственные числа α_i ($i = \overline{1, n-1}$) отрицательны и, во-вторых, $\pi_j = \det a_j / \det a$ ($j = \overline{1, n-1}$). Наконец, из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \omega(\lambda_j | t_k + T) &= \frac{\det a_j}{\det a} + \sum_{i=1}^{n-1} A_{ji} z_i(t_k) e^{\alpha_i(t_k + T)} \quad (j = \overline{1, n-1}), \\ \omega(\lambda_n | t_k + T) &= 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega(\lambda_j | t_k + T), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчёта апостериорной вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t :

1) в момент времени $t_0 = 0$ задаётся $\omega(\lambda_j | t_0 + 0) = \omega(\lambda_j | t_0 = 0) = \pi_j$ ($j = \overline{1, n}$) как решение системы (3);

2) по формуле (1) для $k = 0$ рассчитываются апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в любой момент времени t ($0 \leq t < t_1$), где t_1 – момент наблюдения первого события наблюдаемого потока;

3) по формуле (1) для $k = 0$ рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в момент времени t_1 : $\omega(\lambda_j | t_1) = \omega(\lambda_j | t_1 - 0)$;

4) k увеличивается на единицу и по формуле (2) для $k = 1$ производится пересчёт апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ в момент времени $t = t_1$, при этом $\omega(\lambda_j | t_1 + 0)$ ($j = \overline{1, n}$) являются начальными значениями для расчета $\omega(\lambda_j | t)$ по формуле (10);

5) по формуле (10) для $k = 1$ рассчитываются апостериорные вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в любой момент времени t ($t_1 < t < t_1 + T$);

6) по формуле (11) для $k = 1$ рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в момент времени $t = t_1 + T$, т.е. вероятности $\omega(\lambda_j | t_1 + T)$; при этом $\omega(\lambda_j | t_1 + T)$ ($j = \overline{1, n}$) являются начальными условиями для вычисления вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $k = 1$ по формуле (1), в которой $\omega(\lambda_j | t_k + 0)$ заменены на $\omega(\lambda_j | t_k + T)$, рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в любой момент времени t ($t_1 + T < t < t_2$), где t_2 – момент наблюдения второго события наблюдаемого потока;

8) по формуле (1) для $k = 1$ рассчитываются вероятности $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в момент времени $t = t_2$: $\omega(\lambda_j | t_2) = \omega(\lambda_j | t_2 - 0)$;

9) алгоритм переходит на шаг 4, после чего шаги 4 – 8 повторяются для $k = 2$ и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ ($j = \overline{1, n}$) в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $\omega(\lambda_j | t) \geq \omega(\lambda_i | t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$.

3. Результаты численных экспериментов

Поскольку значение апостериорной вероятности в момент времени t зависит от всех моментов наблюдения событий потока до момента t , а также от начальных условий, задаваемых в момент времени t_0 , найти явный вид полной (безусловной) вероятности ошибочной оценки состояния, по-видимому, невозможно. Поэтому для оценки полной вероятности ошибки был проведен ряд статистических экспериментов с использованием имитационной модели потока. Программа расчёта реализована на языке программирования C++ в виде пользовательского приложения. Первый этап расчёта предполагает имитационное моделирование асинхронного потока событий, схемы создания непродлевающегося мёртвого времени и наблюдаемого потока событий. Алгоритмы имитационного моделирования и данных схем в настоящей статье не рассматриваются, так как не содержат принципиальных трудностей. Второй этап расчёта состоит в расчёте апостериорных вероятностей, оценивании состояния потока и вычислении оценки полной вероятности ошибки $\hat{P}_0$.

Каждый эксперимент состоит из следующих шагов: 1) для заданного набора параметров асинхронного потока и заданного значения мертвого времени T осуществляется имитационное моделирование потока на отрезке времени $[0, T_m]$, где T_m – длительность времени моделирования (i -й эксперимент, $i = \overline{1, N}$); 2) с заданным интервалом дискретизации времени dt (т.е. в моменты $0, dt, 2dt, \dots$) произво-

дится расчёт вероятностей $\omega(\lambda_j | t)$ состояний процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$ по формулам (1) – (3), (10); 3) на основе полученных значений вероятностей строится оценка $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$; 4) траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ сравнивается с истинной траекторией процесса $\lambda(t)$ и осуществляется определение t_i^- – суммарной длительности интервалов времени, на которых значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с его оценкой $\hat{\lambda}(t)$; 5) для i -го эксперимента вычисляется доля ошибочных решений $\hat{p}_i = t_i^- / T_m$; 6) осуществляется повторение N раз ($i = \overline{1, N}$) шагов 1 – 5 для расчета оценки безусловной вероятности ошибки оценивания состояний процесса $\lambda(t)$ на отрезке $[0, T_m]$.

Результатом выполнения описанного алгоритма является выборка $\hat{p}_i$ ($i = \overline{1, N}$) долей ошибочных решений в N экспериментах. После этого вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибочного решения $\hat{P}_0 = (1/N) \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$ и выборочная дисперсия $\hat{D} = (1/(N-1)) \sum_{i=1}^N (\hat{p}_i - \hat{P}_0)^2$.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория (верхняя часть рис. 2) случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путём имитационного моделирования. Моделирование производилось для следующих значений параметров потока: $n = 3$; $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 0,1$; первая строка матрицы интенсивностей переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние $\|\alpha_{ij}\|_1^3$ есть $\alpha^{(1)} = (-1,8; 1; 0,8)$, вторая строка – $\alpha^{(2)} = (0,55; -1,2; 0,65)$, третья строка – $\alpha^{(3)} = (0,2; 0,4; -0,6)$, мёртвое время $T = 0,1$. Время t изменяется в пределах от 0 до T_m , где T_m – время моделирования асинхронного потока ($T_m = 5$ ед. времени). На рис. 2 (верхняя часть рис. 2) цифрами 1, 2, 3 обозначены первое, второе и третье состояния случайного процесса $\lambda(t)$. В нижней части рис. 2 приведена траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$, где цифрами 1, 2, 3 по-прежнему обозначены состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производится с интервалом дискретизации времени $dt = 0,01$. На рис. 2 (нижняя часть рис. 2) штриховкой на оси времени обозначены промежутки времени, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$. На рис. 3, 4 и 5 приведены траектории поведения апостериорных вероятностей $\omega(\lambda_1 | t)$, $\omega(\lambda_2 | t)$ и $\omega(\lambda_3 | t)$, соответствующие полученной при имитационном моделировании последовательности временных моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots$ ($\omega(\lambda_1 | t) + \omega(\lambda_2 | t) + \omega(\lambda_3 | t) = 1$).

В табл. 1 – 5 приведены численные результаты проведенных экспериментов. В первой строке каждой таблицы указаны значения мёртвого времени T , при которых проводилось моделирование асинхронного потока событий ($T = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ ед. времени). Во второй и третьей строках таблиц для каждого значения мёртвого времени T приведены численные значения $\hat{P}_0$ и $\hat{D}$ соответственно.

Результаты получены при следующих значениях параметров, общих для всех таблиц: число состояний потока $n = 3$; время моделирования $T_m = 500$ ед. времени; интервал дискретизации времени $dt = 0,01$; размер выборки (число имитаций по-

тока) $N = 100$; первая строка матрицы интенсивностей переходов случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние $\|\alpha_{ij}\|_1^3$ есть $\alpha^{(1)} = (-0,03; 0,02; 0,01)$, вторая строка – $\alpha^{(2)} = (0,025; -0,04; 0,015)$, третья строка матрицы – $\alpha^{(3)} = (0,02; 0,04; -0,06)$. Первый эксперимент (табл. 1) проводился для параметров $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 2,5$; $\lambda_3 = 1$ (при этом $\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_3)/2$). В каждом из последующих экспериментов (табл. 2 – 5) интервал между интенсивностями (λ_1, λ_3) увеличивался на 30 % по сравнению с предыдущим экспериментом, значение λ_2 выбиралось как середина интервала (λ_1, λ_3), т.е. $\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_3)/2$.

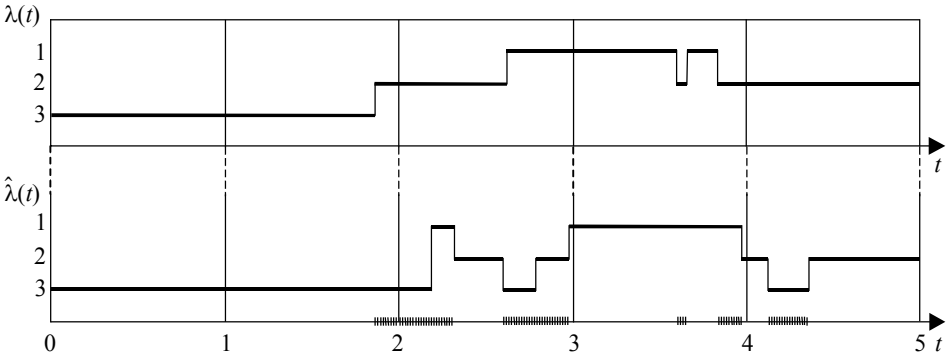


Рис. 2. Истинная траектория процесса $\lambda(t)$ (верху) и траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$ (внизу)

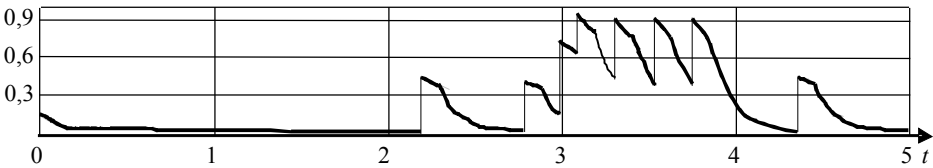


Рис. 3. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_1 | t)$

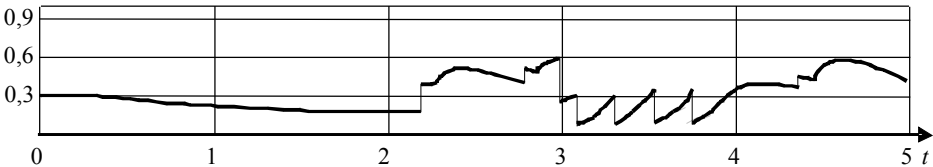


Рис. 4. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_2 | t)$

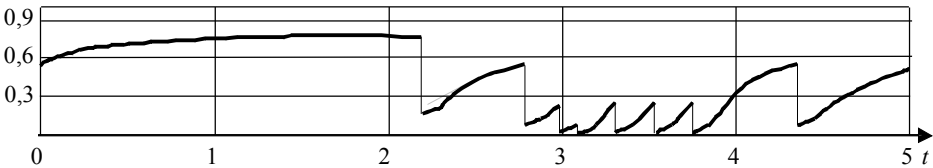


Рис. 5. Траектория апостериорной вероятности $\omega(\lambda_3 | t)$

Таблица 1

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 2,5$; $\lambda_3 = 1$)

T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\hat{P}_0$	0,202	0,235	0,278	0,299	0,321	0,325
$\hat{D}$	0,002584	0,002329	0,002797	0,003765	0,003777	0,003971

Таблица 2

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 5,2$; $\lambda_2 = 2,95$; $\lambda_3 = 0,7$)

T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\hat{P}_0$	0,139	0,182	0,211	0,235	0,262	0,276
$\hat{D}$	0,001089	0,001592	0,002043	0,002696	0,003265	0,003392

Таблица 3

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 6,76$; $\lambda_2 = 3,625$; $\lambda_3 = 0,49$)

T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\hat{P}_0$	0,102	0,151	0,179	0,199	0,219	0,232
$\hat{D}$	0,000467	0,001207	0,001614	0,00224	0,002267	0,002199

Таблица 4

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 8,788$; $\lambda_2 = 4,566$; $\lambda_3 = 0,343$)

T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\hat{P}_0$	0,08	0,13	0,153	0,184	0,199	0,226
$\hat{D}$	0,000303	0,000956	0,001739	0,001413	0,002521	0,002037

Таблица 5

Результаты статистического эксперимента ($\lambda_1 = 11,424$; $\lambda_2 = 5,832$; $\lambda_3 = 0,24$)

T	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\hat{P}_0$	0,063	0,11	0,143	0,166	0,184	0,202
$\hat{D}$	0,000277	0,00091	0,001585	0,00138	0,001846	0,002059

Анализ результатов численных экспериментов, представленных в табл. 1 – 5, показывает следующее.

1) Для фиксированных параметров потока при росте значения мёртвого времени T качество оценки состояния ухудшается ($\hat{P}_0$ и $\hat{D}$ растут), так как чем больше T , тем больше информации о потоке теряется. С ростом T темп ухудшения оценки падает, поскольку увеличение потерь информации становится относительно малым по сравнению с уже имеющимися потерями. Многочисленные эксперименты, проведённые для тех же параметров, что и эксперименты, данные по которым приведены в табл. 1 – 5, показывают, что при изменении T приблизительно в диапазоне от 15 до 20 ед. времени значения $\hat{P}_0$ и $\hat{D}$ стабилизируются, т.е. потери

информации о потоке становятся столь велики, что дальнейшее увеличение мёртвого времени не оказывает существенного влияния на качество оценок. Отметим здесь, что при $T \rightarrow \infty$ апостериорные вероятности вычисляются по формуле (10) в любой момент времени t после момента наблюдения первого события t_1 , так как если T неограниченно велико, то на отрезке времени $[t_1, T_m]$ периоды наблюдаемости, в течение которых применяется формула (1), отсутствуют. А поскольку $\lim \omega(\lambda_j | t) = \pi_j$ при $t \rightarrow \infty$ ($j = \overline{1, n}$), то вероятность принятия ошибочного решения при $T \rightarrow \infty$, $T_m \rightarrow \infty$ стремится к вероятности ошибки, получаемой при оценке состояния потока по критерию максимума финальной вероятности π_j ($j = \overline{1, n}$).

2) При фиксированном значении T с увеличением величины интервала (λ_1, λ_3) качество оценки состояния улучшается, так как чем сильнее интенсивности отличаются друг от друга, тем сильнее различается поведение потока при разных значениях интенсивностей, т.е. отследить изменение состояния становится проще. При этом чем больше значение мёртвого времени T , тем меньше темп улучшения качества оценки состояний при увеличении интервала (λ_1, λ_3) , поскольку чем больше значение мёртвого времени, тем менее увеличение интенсивностей λ_1 и λ_2 отражается на поведении потока (мёртвое время поглощает события, наступающие с большой частотой, делая различия между состояниями потока менее значимыми).

3) В целом анализ результатов экспериментов показывает, что предложенный в статье алгоритм обеспечивает приемлемую величину оценки полной вероятности принятия ошибочного решения, выборочная дисперсия оценки при этом достаточно мала.

Заключение

Предложенный в статье метод позволяет получать оптимальные оценки состояний асинхронного дважды стохастического потока с произвольным (конечным) числом состояний при непродлеваемом мёртвом времени фиксированной произвольной длительности в режиме текущего времени. Оценивание производится по критерию максимума апостериорной вероятности, который обеспечивает минимальную полную (безусловную) вероятность принятия ошибочного решения. Апостериорные вероятности получены в явном виде для любого момента времени (для периодов наблюдаемости явный вид получен в [6], для периодов мёртвого времени – в настоящей статье), что позволяет проводить их вычисление с привлечением минимально возможного количества численных методов. Полученные результаты проведённых экспериментов показывают возможность оценивания состояний асинхронного дважды стохастического потока предложенным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92 – 99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. №1. С. 55 – 61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764 – 779.
4. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщённого асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского госуниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33 – 47.

5. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского госуниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66 – 81.
6. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского госуниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44 – 65.
7. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во «Университетское», 1988. 254 с.
8. Горцев А.М., Климов И.С. Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. № 12. С. 3 – 7.
9. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание параметров знакопеременного пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1994. № 8. С. 3 – 9.
10. Горцев А.М., Климов И.С. Оценивание периода ненаблюдаемости и интенсивности пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1996. № 2. С. 8 – 11.
11. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного потока событий с конечным числом состояний // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: материалы Международной конференции. Минск: Изд-во РИВШ, 2010. С. 60 – 67.
12. Горцев А.М., Полетаев Ю.М. Оценка состояния дважды стохастического потока с произвольным числом состояний // Математические методы исследования сетей связи и сетей ЭВМ: тезисы докладов Шестой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания, Витебск, январь-февраль 1990. Минск: Изд-во Белорусского ун-та, 1990. С. 36 – 37.
13. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
14. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.
15. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

Горцев Александр Михайлович
Зуевич Владимир Леонидович
Томский государственный университет
E-mail: ZuevichV@ua.ru

Поступила в редакцию 11 апреля 2010 г.