

УДК 519.872

Т.В. Любина, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ МАРКОВСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК¹

Рассматривается система массового обслуживания с источником повторных вызовов и конфликтами заявок, управляемая динамическим протоколом доступа. Проведено исследование допредельного распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов и выполнена его численная реализация. Далее исследование этой системы проводится методом асимптотического анализа в условии большой загрузки системы, на основе которого выполнена аппроксимация допредельного распределения числа заявок в источнике повторных вызовов.

Ключевые слова: *RQ-система, динамический протокол доступа, метод асимптотического анализа, большая загрузка, квазигеометрическое распределение.*

Исследованию математических моделей компьютерных сетей связи в виде систем массового обслуживания с источником повторных вызовов посвящено большое количество работ. Анализу таких моделей посвящены работы А.А. Назарова [1 – 5], А.Н. Дудина [6 – 8], И.И. Хомичкова [9] и др. Однако задачи, посвященные исследованию RQ-систем с динамическим протоколом, остаются нерешенными.

В сетях связи наблюдаются наложения сигналов, приводящие к искажению сообщений (конфликтам заявок), поэтому конфликты заявок требуют рассмотрения моделей, выходящих за рамки классических. Для исследования таких систем применяется метод асимптотического анализа [10]. Для решения проблем повторного обращения и потери информации предлагаются различные модификации протоколов случайного множественного доступа: статические [11], динамические [12] и адаптивные [13].

В данной статье рассмотрим систему с повторными обращениями и конфликтами заявок, управляемую динамическим протоколом доступа.

1. Постановка задачи

Любая абонентская станция, сформировав свое сообщение, отправляет его на общий ресурс. Если ресурс свободен, то начинается осуществление немедленной передачи сообщения, которая заканчивается успешно, если другие сообщения не поступали. Если во время передачи некоторого сообщения поступает другое, происходит наложение сигналов, сообщения считаются искаженными и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), откуда вновь обращаются к ресурсу после случайного времени задержки [14]. Для исследования таких систем в качестве математической модели рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания (СМО) с ИПВ и конфликтами заявок, управляемую динамическим протоко-

¹ Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)», проект № 4761.

лом доступа. Такую СМО будем называть динамической RQ-системой (retrial queue) с конфликтами заявок. Задачей данной работы является исследование динамических RQ-систем с конфликтами заявок, то есть нахождение её основных вероятностно-временных характеристик.

2. Математическая модель

На вход системы поступает простейший поток с параметром λ . Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром μ . По завершении успешного обслуживания заявка покидает прибор. Если во время обслуживания некоторой заявки поступает другая, то в приборе возникает конфликт и обе заявки переходят в ИПВ. Из ИПВ обращение заявки к прибору определяется динамическим протоколом доступа, то есть после случайной задержки в ИПВ заявка с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ/i вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата, i – число заявок в ИПВ. Если прибор свободен, то заявка становится на обслуживание, если же он занят, то вновь возникает конфликт заявок (рис. 1) [15].

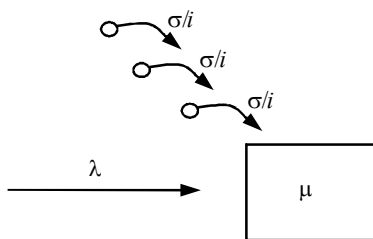


Рис. 1. Динамическая RQ-система с конфликтами заявок

Состояние системы в момент времени t определяется двумерной цепью Маркова $\{k(t), i(t)\}$, где $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят обслуживанием.} \end{cases}$$

3. Метод производящих функций

Обозначим $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P(k, i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и в источнике повторных вызовов i заявок.

Распределение вероятностей $P(k, i, t)$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{cases} P(0, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \sigma \Delta t)P(0, i, t) + \mu \Delta t P(1, i, t) + \\ \quad + \sigma \Delta t P(1, i - 1, t) + \lambda \Delta t P(1, i - 2, t) + o(\Delta t), \\ P(1, i, t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)(1 - \sigma \Delta t)P(1, i, t) + \\ \quad + \sigma \Delta t P(0, i + 1, t) + \lambda \Delta t P(0, i, t) + o(\Delta t). \end{cases}$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для $i \geq 2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P(0,i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \sigma)P(0,i,t) + \mu P(1,i,t) + \sigma P(1,i-1,t) + \lambda P(1,i-2,t), \\ \frac{\partial P(1,i,t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu + \sigma)P(1,i,t) + \sigma P(0,i+1,t) + \lambda P(0,i,t). \end{cases} \quad (1)$$

Будем полагать, что система функционирует в стационарном режиме, то есть

$$P(k,i,t) \equiv P(k,i).$$

Запишем систему (1) для стационарного распределения:

$$\begin{aligned} -\lambda P(0,0) + \mu P(1,0) &= 0, \quad i=0, \\ -(\lambda + \mu)P(1,0) + \lambda P(0,0) + \sigma P(0,1) &= 0, \quad i=0, \\ -(\lambda + \sigma)P(0,1) + \mu P(1,1) &= 0, \quad i=1, \\ -(\lambda + \sigma + \mu)P(1,1) + \lambda P(0,1) + \sigma P(0,2) &= 0, \quad i=1, \\ -(\lambda + \sigma)P(0,i) + \mu P(1,i) + \sigma P(1,i-1) + \lambda P(1,i-2) &= 0, \quad i \geq 2, \\ -(\lambda + \sigma + \mu)P(1,i) + \lambda P(0,i) + \sigma P(0,i+1) &= 0, \quad i \geq 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы решить систему (2), определим производящие функции

$$G(k,x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(k,i). \quad (3)$$

Из системы (2), с учетом равенства (3), получаем следующую систему для функций $G(k,x)$:

$$\begin{cases} -(\lambda + \sigma)G(0,x) + (\mu + \sigma x + \lambda x^2)G(1,x) = -\sigma P(0,0) + \sigma x P(1,0), \\ (\lambda x + \sigma)G(0,x) - (\mu + \sigma + \lambda)xG(1,x) = \sigma P(0,0) - \sigma x P(1,0). \end{cases} \quad (4)$$

Из полученной системы (4), обозначив

$$G(x) = G(0,x) + G(1,x) \quad (5)$$

и принимая во внимание первое уравнение системы (2), можно записать

$$G(x) = \frac{\sigma P(0,0)(\mu + \lambda - \lambda x) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} x\right)}{-\lambda^2 x^2 - (2\lambda\sigma + \lambda^2)x + \mu\sigma}.$$

Учитывая условие

$$G(1) = 1,$$

получаем

$$P(0,0) = \frac{-2\lambda(\lambda + \sigma) + \mu\sigma}{\sigma(\mu - \lambda)}, \quad (6)$$

в силу свойств вероятности должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\mu}{\sigma}}} = S, \quad (7)$$

где S – пропускная способность рассматриваемой сети связи.

Определение. Пропускной способностью сети связи называется точная верхняя граница S тех значений загрузки $\rho = \lambda/\mu$, для которых в математической модели сети связи существует стационарный режим.

Неравенство (7) определяет условие существования стационарного режима для рассматриваемой СМО.

С учётом равенства (6) производящая функция для распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ примет вид

$$G(x) = \frac{[2\lambda(\lambda + \sigma) - \mu\sigma](\mu + \lambda - \lambda x) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}x\right)}{(\mu - \lambda)[\lambda^2 x^2 + (2\lambda\sigma + \lambda^2)x - \mu\sigma]}.$$

4. Численный анализ допредельного распределения

Характеристическую функцию $H(u)$ для распределения вероятностей $P(i)$ запишем в виде

$$H(u) = G(e^{ju}),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Тогда распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяется обратным преобразованием Фурье

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ju i} H(u) du. \quad (8)$$

Для заданных значений параметров:

$$\lambda = 0,44, \mu = 1, \sigma = 5,$$

численным интегрированием (8) получим распределение вероятностей числа заявок в ИПВ $P(i)$ (табл. 1, рис. 2).

Таблица 1

Распределение вероятностей числа заявок в ИПВ, $i = 1, 2, \dots$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(i)$	0,1094	0,0190	0,0364	0,0341	0,0328	0,0314	0,0301	0,0289	0,0277
i	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$P(i)$	0,0266	0,0255	0,0245	0,0235	0,0225	0,0216	0,0207	0,0199	...

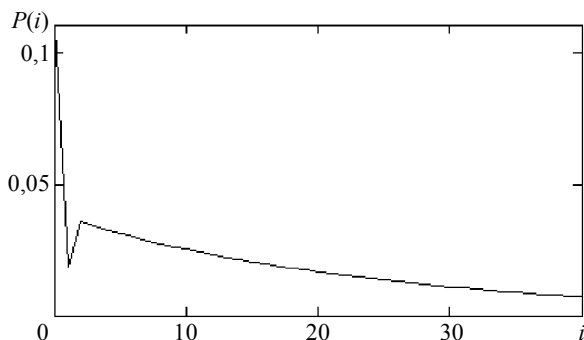


Рис. 2. Распределение вероятностей числа заявок в ИПВ

5. Метод асимптотического анализа в условии большой загрузки

Так как нахождение производящей и характеристической функций в математических моделях сетей случайного доступа является исключительной ситуацией, то требуется разработка более эффективных методов анализа таких моделей. Наиболее плодотворным в этом направлении является метод асимптотического анализа [16], изложение которого выполним для данной модели, что позволит определить область применимости асимптотических результатов их сравнением с допустимым, полученным в предыдущем разделе.

Обозначив

$$H(k, u) = \sum_i e^{ju_i} P(k, i),$$

из системы для распределения вероятностей (2) получим систему уравнений для функций $H(k, u)$ в виде

$$\begin{cases} -\left(\rho + \frac{\sigma}{\mu}\right)H(0, u) + \left(1 + \frac{\sigma e^{ju}}{\mu} + \rho e^{2ju}\right)H(1, u) = \frac{\sigma}{\mu}e^{ju}P(1, 0) - \frac{\sigma}{\mu}P(0, 0), \\ \left(\rho + \frac{\sigma}{\mu}e^{-ju}\right)H(0, u) - \left(1 + \frac{\sigma}{\mu} + \rho\right)H(1, u) = \frac{\sigma}{\mu}e^{-ju}P(0, 0) - \frac{\sigma}{\mu}P(1, 0). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\rho = \lambda/\mu$.

Обозначив двумерные векторы

$$\begin{aligned} H(u) &= \{H(0, u), H(1, u)\}, \\ P(0) &= \{P(0, 0), P(1, 0)\} \end{aligned}$$

и матрицы

$$A(ju, \rho) = \begin{bmatrix} -\left(\rho + \frac{\sigma}{\mu}\right) & \rho + \frac{\sigma}{\mu}e^{-ju} \\ 1 + \frac{\sigma}{\mu}e^{ju} + \rho e^{2ju} & -\left(1 + \frac{\sigma}{\mu} + \rho\right) \end{bmatrix}, \quad B(ju) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{\mu} & -\frac{\sigma}{\mu}e^{-ju} \\ -\frac{\sigma}{\mu}e^{ju} & \frac{\sigma}{\mu} \end{bmatrix},$$

систему уравнений (9) для функций $H(k, u)$ запишем в виде

$$H(u)A(ju, \rho) + P(0)B(ju) = 0. \quad (10)$$

Для нахождения значения величины S , а также других вероятностно-временных характеристик сети связи, уравнение (10) будем решать методом асимптотического анализа в условии большой загрузки $\rho \uparrow S$, обозначив $\varepsilon = S - \rho$ и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$.

В уравнении (10) выполним замены:

$$\rho = S - \varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad H(u) = F(w, \varepsilon), \quad P(0) = \varepsilon \Pi, \quad (11)$$

получим

$$F(w, \varepsilon)A(j\varepsilon w, S - \varepsilon) + \varepsilon \Pi B(j\varepsilon w) = 0, \quad (12)$$

где

$$A(j\varepsilon w, S - \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varepsilon w)^n}{n!} A_n(S) - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varepsilon w)^n}{n!} A'_n(S). \quad (13)$$

Теорема. Значение S пропускной способности сети связи равно значению корня уравнения

$$R(S)A_1(S)E = 0, \quad (14)$$

где вектор R определяется системой $R(S)A_0(S) = 0$ и условием нормировки $RE = 1$, а матрица $A_0(S) = A(0, S)$.

Характеристическая функция нормированного числа заявок в ИПВ имеет вид

$$\Phi(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F(w, \varepsilon)E\} = \frac{\kappa}{\kappa - jw}, \quad (15)$$

то есть является характеристической функцией экспоненциального распределения с параметром κ , где

$$\kappa = \frac{R(S)A_1'(S)E + f_2A_1(S)E}{f_1A_1(S)E + \frac{1}{2}R(S)A_2'(S)E}. \quad (16)$$

Доказательство. Доказательство теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. Обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(j\varepsilon w, S - \varepsilon) = A(0, S) = A_0(S),$$

где $A_0(S)$ определяется из равенства (13). Тогда, выполнив в (12) указанный предельный переход, получим равенство

$$F(w)A_0(S) = 0. \quad (17)$$

Из вида матрицы $A_0(S)$ следует, что ее свойства аналогичны свойствам матрицы инфинитезимальных характеристик, поэтому решение $F(w)$ однородной системы (17) линейных алгебраических уравнений можно записать в виде

$$F(w) = \Phi(w)R(S),$$

где $R(S)$ – распределение вероятностей значений цепи $k(\tau)$, определяемое системой

$$R(S)A_0(S) = 0$$

и условием нормировки $RE = 1$, а скалярная функция $\Phi(w)$ будет определена ниже.

Этап 2. Используя разложение матриц

$$A(j\varepsilon w, S - \varepsilon) = A_0(S) + j\varepsilon wA_1(S) - \varepsilon A_0'(S) + O(\varepsilon^2),$$

$$B(j\varepsilon w) = B_0 + O(\varepsilon^2),$$

уравнение (12) запишем в виде

$$F(w, \varepsilon)\{A_0(S) + j\varepsilon wA_1(S) - \varepsilon A_0'(S)\} + \varepsilon \Pi B_0 = 0. \quad (18)$$

Решение $F(w, \varepsilon)$ этого уравнения запишем в виде разложения

$$F(w, \varepsilon) = \Phi(w)R(S) + \varepsilon f(w) + O(\varepsilon^2), \quad (19)$$

подставив которое в (18), получим

$$\{\Phi(w)R(S) + \varepsilon f(w)\} \{A_0(S) + j\varepsilon w A_1(S) - \varepsilon A'_0(S)\} + \varepsilon \Pi B_0 = \\ = \Phi(w)R(S) \{A_0(S) + j\varepsilon w A_1(S) - \varepsilon A'_0(S)\} + \varepsilon f(w)A_0(S) + \varepsilon \Pi B_0 = O(\varepsilon^2).$$

Так как $R(S)A_0(S) = 0$, то для $f(w)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно записать равенство

$$f(w)A_0(S) + jw\Phi(w)R(S)A_1(S) - \Phi(w)R(S)A'_0(S) + \Pi B_0 = 0,$$

которое является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений, поэтому ее решение $f(w)$ можно представить в виде

$$f(w) = \Phi(w) \{jwf_1 - f_2\} + f_3, \quad (20)$$

в котором векторы f_1 , f_2 и f_3 являются решениями систем:

$$f_1 A_0(S) + R(S)A_1(S) = 0; \quad (21)$$

$$f_2 A_0(S) + R(S)A'_0(S) = 0; \quad (22)$$

$$f_3 A_0(S) + \Pi B_0 = 0.$$

Решение f_2 системы (22) имеет вид

$$f_2 = R'(S).$$

Чтобы существовало решение f_1 системы (21), необходимо выполнение равенства (14), которое определяет значение величины пропускной способности S .

Таким образом, (20) имеет вид

$$f(w) = \Phi(w) \{jwf_1 - R'(S)\} + f_3, \quad (23)$$

поэтому разложение (19) для $F(w, \varepsilon)$ можно записать следующим образом:

$$F(w, \varepsilon) = \Phi(w)R(S) + \varepsilon \Phi(w) \{jwf_1 - R'(S)\} + \varepsilon f_3 + O(\varepsilon^2). \quad (24)$$

Этап 3. Для нахождения функции $\Phi(w)$ просуммируем по k все уравнения системы (12), получим равенство

$$F(w, \varepsilon)A(j\varepsilon w, S - \varepsilon)E + \varepsilon \Pi B(j\varepsilon w)E = 0. \quad (25)$$

Для матриц A и B из этого равенства запишем разложения

$$A(j\varepsilon w, S - \varepsilon) = A_0(S) + j\varepsilon w A_1(S) + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} A_2(S) - \varepsilon A'_0(S) + \frac{\varepsilon^2}{2} A''_0(S) - j\varepsilon^2 w A'_1(S) + O(\varepsilon^2),$$

$$B(j\varepsilon w) = B_0 + j\varepsilon w B_1 + O(\varepsilon^2).$$

Из вида матриц $A(ju, S)$ и $B(ju)$ следует, что выполняются равенства

$$A'_0(S) = 0, \quad A_0(S)E = 0, \quad A'_1(S)E = 0, \quad B_0E = 0,$$

поэтому

$$A(j\varepsilon w, S - \varepsilon)E = j\varepsilon w A_1(S)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} A_2(S)E - j\varepsilon^2 w A'_1(S) + O(\varepsilon^3),$$

$$B(j\varepsilon w)E = j\varepsilon w B_1E + O(\varepsilon^2),$$

следовательно, равенство (25) примет вид

$$F(w, \varepsilon) \left\{ A_1(S) + \frac{j\varepsilon w}{2} A_2(S) - \varepsilon A'_1(S) \right\} E + \varepsilon \Pi B_1E = O(\varepsilon^2).$$

В него подставим разложение (24), получим равенство

$$\begin{aligned} & \{ \Phi(w)R(S) + \varepsilon \Phi(w)[jwf_1 - R'(S)] + \varepsilon f_3 \} \times \\ & \times \left\{ A_1(S)E + \frac{j\varepsilon w}{2} A_2(S)E - \varepsilon A_1'(S)E \right\} + \varepsilon \Pi B_1 E + O(\varepsilon^2) = \\ & = \Phi(w)R(S) \left\{ j\varepsilon w A_1(S)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2} A_2(S)E - j\varepsilon^2 w A_1'(S)E \right\} + \\ & + \varepsilon \{ \Phi(w)[jwf_1 - R'(S)] + f_3 \} j\varepsilon w A_1(S)E + \varepsilon \Pi j\varepsilon w B_1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Так как выполняется условие $R(S)A_1(S)E = 0$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ из последнего равенства для функции $\Phi(w)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & \Phi(w) \left\{ (jw)^2 \left[f_1 A_1(S)E + \frac{1}{2} R(S)A_2'(S)E \right] - jw [R(S)A_1'(S)E + R'(S)A_1(S)E] \right\} + \\ & + jw [f_3 A_1(S)E + \Pi B_1 E] = \\ & = jw \Phi(w) \left\{ jw \left[f_1 A_1(S)E + \frac{1}{2} R(S)A_2'(S)E \right] - R(S)A_1'(S)E - f_2 A_1(S)E \right\} + \\ & + jw [f_3 A_1(S)E + \Pi B_1 E] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическая функция $\Phi(w)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} & \Phi(w) \left\{ jw \left[f_1 A_1(S)E + \frac{1}{2} R(S)A_2'(S)E \right] - [R(S)A_1'(S)E + f_2 A_1(S)E] \right\} + \\ & + f_3 A_1(S)E + \Pi B_1 E = 0. \end{aligned}$$

Получаем

$$\Phi(w) = \frac{f_3 A_1(S)E + \Pi B_1 E}{R(S)A_1'(S)E + f_2 A_1(S)E - jw \left[f_1 A_1(S)E + \frac{1}{2} R(S)A_2'(S)E \right]}.$$

Так как $\Phi(0) = 1$, то функция $\Phi(w)$ примет вид (15), который определяет экспоненциальное распределение с параметром κ , значение которого определяется равенством (16). Теорема доказана.

6. Аппроксимация допредельного распределения

Для рассматриваемой модели получено допредельное распределение вероятностей числа заявок в ИПВ при заданных параметрах λ , μ и σ с помощью равенства (8). Также было получено выражение (15) для нахождения характеристической функции нормированного числа заявок в ИПВ, которое определяет экспоненциальное распределение с параметром κ . Остается выяснить, насколько результаты, полученные методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, близки к допредельным результатам.

Распределение вероятностей числа заявок в ИПВ будем искать в виде

$$P_1(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju i} \frac{\varepsilon \kappa}{\varepsilon \kappa - ju} du,$$

полученном в результате обратного преобразования Фурье (8) применительно к характеристической функции (15).

Для того чтобы вычислить данный интеграл, воспользуемся методами теории вычетов, а именно леммой Жордана. Получим

$$P_1(i) = \begin{cases} P_1(0), i = 0, \\ \varepsilon \kappa e^{-\varepsilon \kappa i}, i \geq 1. \end{cases} \quad (26)$$

Согласно условию нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} P_1(i) = 1$, нетрудно получить выражение для $P_1(0)$. Тогда распределение вероятностей (26) примет вид

$$P_1(i) = \begin{cases} 1 - \varepsilon \kappa \frac{e^{-\varepsilon \kappa}}{1 - e^{-\varepsilon \kappa}}, i = 0, \\ \varepsilon \kappa e^{-\varepsilon \kappa i}, i \geq 1. \end{cases}$$

Определение. Распределение вероятностей $P(i)$ будем называть квазигеометрическим распределением дефекта n , если $\exists \rho$ и C , такие, что $\forall i \geq n$

$$P(i) = C \rho^i,$$

а при $i = n - 1$

$$P(i) \neq C \rho^i.$$

В частности, можно сказать, что геометрическое распределение является квазигеометрическим распределением дефекта 0.

Таким образом, методы теории вычетов определяют аппроксимацию допредельного распределения в виде квазигеометрического распределения дефекта 1.

Результаты численных расчетов допредельного распределения $P(i)$ и квазигеометрического распределения дефекта 1 $P_1(i)$ представлены в табл. 2.

Результат численных реализаций $P(i)$ и $P_1(i)$

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$P(i)$	0,1094	0,0190	0,0364	0,0341	0,0328	0,0314	0,0301	0,0289	0,0277	0,0266	0,0255	0,0245	...
$P_1(i)$	0,0203	0,0393	0,0377	0,0362	0,0348	0,0334	0,0320	0,0308	0,0295	0,0283	0,0272	0,0261	...

Расстояние Колмогорова $\Delta_1 = 0,0891$, где $\Delta_m = \max_i \left| \sum_{n=0}^i [P(i) - P_m(i)] \right|$, позволяет сделать вывод о том, что $P_1(i)$ не достаточно точно аппроксимирует допредельное распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в ИПВ, поэтому требуется рассмотреть модификации квазигеометрического распределения вероятностей $P_1(i)$.

1. Модифицированное квазигеометрическое распределение дефекта 1 запишем в виде

$$P_2(i) = \begin{cases} P(0), i = 0, \\ (1 - P(0))(1 - e^{-\varepsilon \kappa}) e^{-\varepsilon \kappa(i-1)}, i \geq 1. \end{cases}$$

Для нахождения величины $P(0)$ рассмотрим первое из уравнений системы (1) с учетом замен (11):

$$-(S - \varepsilon)P(0, 0) + P(1, 0) = 0.$$

Получим равенство

$$SP(0,0)=P(1,0).$$

Следовательно, значение $P(0)$ определяется равенством

$$P(0)=\varepsilon \Pi=\varepsilon P(0,0) \Gamma E, \tag{27}$$

где вектор-строка Γ имеет вид

$$\Gamma=\{1, S\}.$$

Остается найти только значение $P(0,0)$. Выполнив все аналогичные действия, что и в доказательстве теоремы, получим

$$\Phi(w)=\frac{P(0,0)\left[f_3 A_1(S) E+\Gamma B_1 E\right]}{R(S) A_1'(S) E+f_2 A_1(S) E-j w\left[f_1 A_1(S) E+\frac{1}{2} R(S) A_2'(S) E\right]}.$$

И так как $\Phi(0)=1$, то

$$P(0,0)\left[f_3 A_1(S) E+\Gamma B_1 E\right]=R(S) A_1'(S) E+f_2 A_1(S) E,$$

и $P(0,0)$ принимает значение

$$P(0,0)=\frac{R(S) A_1'(S) E+f_2 A_1(S) E}{f_3 A_1(S) E+\Gamma B_1 E}.$$

Допрдельное распределение $P(i)$ и модифицированное квазигеометрическое распределение дефекта 1 $P_2(i)$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результат численных реализаций $P(i)$ и $P_2(i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$P(i)$	0,1094	0,0190	0,0364	0,0341	0,0328	0,0314	0,0301	0,0289	0,0277	0,0266	0,0255	0,0245	...
$P_2(i)$	0,1148	0,0355	0,0341	0,0327	0,0314	0,0302	0,0290	0,0278	0,0267	0,0256	0,0246	0,0236	...

2. Квазигеометрическое распределение дефекта 2 запишем в виде

$$P_3(i)=\begin{cases} P(0), i=0, \\ P(1), i=1, \\ (1-P(0)-P(1))(1-e^{-\varepsilon \kappa}) e^{-\varepsilon \kappa(i-2)}, i \geq 2, \end{cases}$$

где $P(0)$ определяется равенством (27), а $P(1)=P(0,1)+P(1,1)$. Значения $P(0,1)$ и $P(1,1)$, учитывая замены (12), определяются из второго и третьего уравнений системы (2) соответственно.

Для сравнения $P(i)$ и $P_3(i)$ воспользуемся табл. 4.

Таблица 4

Результат численных реализаций $P(i)$ и $P_3(i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$P(i)$	0,1094	0,0190	0,0364	0,0341	0,0328	0,0314	0,0301	0,0289	0,0277	0,0266	0,0255	0,0245	...
$P_3(i)$	0,1148	0,0213	0,0347	0,0333	0,0319	0,0307	0,0294	0,0283	0,0271	0,0260	0,0250	0,0240	...

Сравнив распределения $P(i)$ и $P_2(i)$ с помощью расстояния Колмогорова $\Delta_2 = 0,0220$, можно сделать вывод о том, что модифицированное квазигеометрическое распределение дефекта 1 достаточно точно аппроксимирует допредельное распределение $P(i)$. Расстояние Колмогорова между распределениями $P(i)$ и $P_3(i)$ равно $\Delta_3 = 0,0078$, следовательно, квазигеометрическое распределение $P_3(i)$ дефекта 2 более точно аппроксимирует допредельное распределение $P(i)$ вероятностей числа заявок в ИПВ.

Заключение

В работе аналитическим методом получены производящая и характеристическая функции для распределения вероятностей числа заявок в ИПВ, с помощью обратного преобразования Фурье получено допредельное распределение вероятностей числа заявок в ИПВ. Далее исследование проводилось методом асимптотического анализа при условии большой загрузки системы, в результате которого было получено выражение для нахождения характеристической функции нормированного числа заявок в ИПВ. Проведена аппроксимация допредельного распределения, в результате которой найдено квазигеометрическое распределение дефекта 2, которое наиболее точно аппроксимирует допредельное распределение вероятностей числа заявок в ИПВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.А., Цой С.А. Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73 – 85.
2. Назаров А.А., Никитина М.А. Применение условий эргодичности цепей Маркова к исследованию существования стационарных режимов в сетях связи // Автоматика и вычислительная техника. 2003. № 1. С. 59 – 66.
3. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сетей связи с протоколами «адаптивная Алоха» для конечного числа станций в условии перезагрузки // Проблемы передачи информации. 2000. № 3. С. 83 – 93.
4. Назаров А.А., Пичугин С.Б. Исследование спутниковой сети связи методом математического моделирования // Изв. вузов. Физика. 1992. № 9. С. 120 – 129.
5. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых протоколами случайного множественного доступа // Мат. моделирование. Кибернетика. Информатика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. С. 89 – 98.
6. Dudin A., Klimenok V. A Retrial BMAP/G/1 System with Linear Repeated Requests // Queuing System. 2000. V. 34. P. 222 – 227.
7. Dudin A., Klimenok V. BMAP/SM/1 Model with Markov Modulated Retrials // TOP. 1999. V. 7. No. 2. P. 267 – 278.
8. Дудин А. Н., Клименок В. И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. С. 221.
9. Хомичков И. И. Исследование моделей локальной сети с протоколом случайного множественного доступа // АиТ. 1993. № 12. С. 89 – 90.
10. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
11. Назаров А.А., Юревич Н.М. Исследование сети со статическим h-настойчивым протоколом случайного множественного доступа Алоха // Автоматика и вычислительная техника. 1995. № 1. С. 68 – 78.

12. Назаров А.А., Шохор С.Л. Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа // Мат. моделирование и теория вероятностей / под ред. И.А. Александрова и др. Томск: Пеленг, 1988. С. 233 – 241.
13. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Адаптивные сети случайного доступа / науч. ред. В.А. Силич. Томск: Дельтаплан, 2002. – 254 с.
14. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 206 с.
15. Назаров А.А., Любина Т.В. Исследование системы массового обслуживания М/М/1/ИПВ с конфликтами заявок, управляемой динамическим протоколом доступа // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (13 – 14 ноября 2009 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. Ч. 1. С. 65 – 68.
16. Любина Т.В., Назаров А.А. Исследование динамической RQ-системы с конфликтами заявок // Научное творчество молодежи: Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции (15 – 16 апреля 2010 г.). Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 57 – 61.

Любина Татьяна Викторовна

Назаров Анатолий Андреевич

Томский государственный университет

E-mail: lyubina_tv@mail.ru

Поступила в редакцию 9 апреля 2010 г.