ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 3(12)

УДК 519.24

В.П. Шуленин

ЭФФЕКТИВНЫЕ И РОБАСТНЫЕ MD-ОЦЕНКИ КРАМЕРА – МИЗЕСА

Оценки параметров, построенные методом минимума расстояний, в литературе кратко называют MD-оценками. Метод минимума расстояний был предложен Вольфовитцем [1] в 1957 году. Обширная библиография работ по MD-оценкам составлена и опубликована Парром [2]. В данной работе рассматриваются эффективные MD-оценки параметра сдвига, основанные на использовании взвешенного расстояния Крамера – Мизеса и изучаются их свойства робастности в различных супермоделях, описывающих отклонения от гауссовской модели.

Ключевые слова: *оценки параметров, метод минимума расстояний, функция влияния, робастные оценки.*

Рассмотрим вариант, когда статистическая модель $(\mathrm{X}, \Im_\theta)$ задана в параметрической форме. Здесь X обозначает выборочное пространство и $\Im_\theta = \{F : F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ – заданное параметрическое множество допустимых распределений вероятностей. Имеется выборка $X_1,...,X_n$ в виде последовательности н.о.р. случайных величин с функцией распределения $F(x,\theta)$ и с плотностью $f(x,\theta)$, $x \in R^1$, $\theta \in \Theta$. Функциональный вид распределения задан с точностью до неизвестного параметра θ (скалярного либо векторного), который принадлежит заданному параметрическому множеству Θ. Требуется построить по выборке $X_1,...,X_n$ из распределения $F(x,\theta)$ оценку неизвестного параметра $\theta \in \Theta$.

Метод минимума расстояний состоит в том, что на множестве непрерывных функций распределений $\Im$, для пары распределений $F, G \in \Im$, задается метрика (или расстояние) $\rho(F,G)$. Оценка параметра θ, полученная методом выбранного расстояния $\rho(F,G)$, определяется из условия минимума этого расстояния между эмпирической функцией распределения $F_n(x)$, построенной по выборке $X_1,...,X_n$, и функцией распределения $F_\theta(x) = F_X(x,\theta)$, принятой в модели $(\mathrm{X}, \Im_\theta)$. Таким образом, для выбранного расстояния $\rho(F,G)$, MD-оценки определяются в виде выражения $\hat{\theta} = \arg\min_\theta \{\rho(F_n, F_\theta)\}$. Для построения MD-оценок могут быть использованы различные расстояния (см. [2]). Отметим, что метод максимального правдоподобия основан на использовании расстояния вида $\rho(F_n, F_\theta) = -\int \ln f(x,\theta) dF_n(x)$. В данной работе мы рассмотрим MD-оценки, которые основаны на использовании взвешенного расстояния Крамера – Мизеса, определяемого при $G = F_n$, в виде

$$\rho_W(F_n, F_\theta) = \int [F_n(x) - F_\theta(x)]^2 W_\theta(x, F_\theta)\, dF_\theta(x)\,, \tag{1}$$

где $W_\theta = W(x, F_\theta)$ – заданная весовая функция, которая в общем случае может зависеть от ф.р. F_θ или плотности f_θ. Предполагая, что $\rho_W(F_n, F_\theta)$ дифференцируемая по параметру θ функция, обозначим её производную через $\tilde{\lambda}_{F_n}(\theta) = \partial\rho_W(F_n, F_\theta)/\partial\theta$. С учетом этого обозначения, MD-оценка θ_n параметра θ, основанная на использовании взвешенного расстояния Крамера – Мизеса вида (1), является решением уравнения $\tilde{\lambda}_{F_n}(\theta) = 0$, где

$$\tilde{\lambda}_{F_n}(\theta) = -2\int [F_n(x) - F_\theta(x)] \frac{\partial F_\theta(x)}{\partial\theta} W_\theta(x) dF_\theta(x) +$$
$$+\int [F_n(x) - F_\theta(x)]^2 \frac{\partial}{\partial\theta}[W_\theta f_\theta(x)]dx. \quad (2)$$

В данной работе рассмотрим MD-оценки параметра сдвига θ в одновыборочном варианте, то есть в этом случае $F_\theta(x) = F(x-\theta)$. Введем опорное семейство распределений в виде $\Im_0 = \{F : F_\theta(x) = F_0(x-\theta),\ \theta \in R^1\}$, где F_0 – заданное опорное распределение с плотностью f_0. Перепишем (1) в виде

$$\rho_{F_n,F_0}(\theta, W) = \int [F_n(x) - F_0(x-\theta)]^2 W(x-\theta)dx\,. \quad (3)$$

Отметим, что выбор весовой функции W в виде плотности опорного распределения, то есть в виде $W(x) = f_0(x)$, соответствует расстоянию Крамера – Мизеса, выбор весовой функции $W(x) = f_0(x)/F_0(x)(1-F_0(x))$ соответствует расстоянию Андерсона – Дарлинга (см., например, [4, 9]). Предполагая, что $\rho_{F_n,F_0}(\theta, W)$ из (3) дифференцируемая по параметру θ функция, обозначим её производную через $\lambda_{F_n}(\theta) = \partial\rho_{F_n,F_0}(\theta, W)/\partial\theta$. Уравнение $\lambda_{F_n}(\theta) = 0$ для нахождения MD-оценки записывается в виде

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2i-1}{2n} - F_0(X_{(i)} - \theta)\right] W(X_{(i)} - \theta) = 0\,, \quad (4)$$

где $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ – упорядоченная статистика выборки $X_1, ..., X_n$.

1. Асимптотическая нормальность MD-оценок

Асимптотические свойства MD-оценок изучались различными авторами (см., например, [1, 4, 6, 9]). В данной работе обсуждаются асимптотические свойства MD-оценок θ_n параметра сдвига θ, которые при заданной опорной ф.р. F_0, принятой в качестве исходной модели, и заданной весовой функции W являются решением уравнения (4). При этом различаются следующие два варианта оценивания параметра θ.

Вариант 1. Функция распределения F наблюдений $X_1, ..., X_n$ *известна*, и она совпадает с опорной функцией распределения F_0, то есть $F = F_0$ (или $F \in \Im_0$).

Вариант 2. Функция распределения F наблюдений $X_1, ..., X_n$ *неизвестна*, и она не обязательно совпадает с опорной функцией распределения F_0, то есть $F \neq F_0$ (или $F \notin \Im_0$).

Отметим, что MD-оценки θ_n параметра сдвига θ, которые являются решением уравнения (4), могут быть записаны в виде функционала от эмпирической функции распределения, то есть в виде $\theta_n = \theta(F_n)$, где функционал $\theta(F)$ определяется выражением $\min\limits_{\theta} \rho_{F,F_0}(\theta, W) = \rho_{F,F_0}(\theta(F), W)$ или, с принятым обозначением $T(F)$ для функционала, этот функционал $T(F) = \theta(F)$ задается неявно с помощью выражения вида

$$2\int [F(x+T(F)) - F_0(x)] f_0(x) W(x) dx - \int [F(x+T(F)) - F_0(x)]^2 W^{/}(x) dx = 0. \quad (5)$$

Для изучения асимптотических свойств MD-оценок $\theta_n = \theta(F_n)$ параметра сдвига θ воспользуемся подходом Мизеса (см. [9, 10]) и рассмотрим разложение вида

$$\theta(F_n) = \theta(F) + V_{1n} + R_{1n}, \quad (6)$$

где V_{1n} – аппроксимационная статистика и $R_{1n} = \theta(F_n) - \theta(F) - V_{1n}$ остаточный член разложения (6). Сначала конкретизируем аппроксимационную статистику V_{1n} и остаточный член R_{1n}. Для этого вычислим дифференциал Гато первого порядка $d_1T(F; G-F)$ функционала $T(F)$, заданного выражением (5). Пусть $F_\lambda = F + \lambda(G-F)$, $0 \le \lambda \le 1$. Заменим в формуле (5) функцию распределения F на ф.р. F_λ, в результате получим выражение

$$2\int \{F(x+T(F_\lambda)) + \lambda[G(x+T(F_\lambda)) - F(x+T(F_\lambda))] - F_0(x)\} f_0(x) W(x) dx -$$

$$- \int \{F(x+T(F_\lambda)) + \lambda[G(x+T(F_\lambda)) - F(x+T(F_\lambda))] - F_0(x)\}^2 f_0(x) W^{/}(x) dx = 0.$$

Дифференцируя данное выражение по параметру λ, полагая $\lambda = 0$, и учитывая, что $d_1T(F; G-F) = \partial T(F_\lambda)/\partial\lambda|_{\lambda=0}$ и $T(F_\lambda)|_{\lambda=0} = T(F) = \theta$, имеем

$$d_1T(F; G-F) = \frac{\int [G(x) - F(x)]\{[F(x) - F_0(x-\theta)]W^{/}(x-\theta) - f_0(x-\theta)W(x-\theta)\}dx}{\int f(x) f_0(x-\theta) W(x-\theta) dx - \int [F(x) - F_0(x-\theta)] f(x) W^{/}(x-\theta) dx}.$$

Из полученного выражения, в котором следует заменить ф.р. G на эмпирическую ф.р. F_n, получаем формулу для аппроксимационной статистики V_{1n} в виде

$$V_{1n} = d_1T(F; F_n - F) = n^{-1} \sum IF(X_i; F, F_0, W),$$

где $IF(u; F, F_0, W) = d_1T(F; \Delta_u - F)$, $0 \le u < \infty$, функция влияния для MD-оценки $\theta_n = \theta(F_n)$ параметра сдвига θ, которая при заданной опорной ф.р. F_0 и заданной весовой функции W является решением уравнения (4). Отметим, что выражение для функции влияния также следует из предыдущей формулы путем замены ф.р. G на вырожденную в точке u функцию распределения Δ_u. Полученные формулы, а также разложение (6), служат основой для доказательства асимптотической нормальности MD-оценок, являющихся решением уравнения (4). Общие условия регулярности, накладывающие ограничения на поведение хвостов ф.р. F и весовой функции W, при которых выполняется выражение $\sqrt{n}R_{1n} \to^p 0$, $n \to \infty$ и при которых MD-оценки состоятельны и асимптотически нормальны, приводятся в [4]. Кроме того, рассматриваемые здесь MD-оценки входят в семейство MD$_\alpha$-оценок, асимптотические свойства которых описаны в [6]. Для формулировки дальнейших результатов обозначим через $\Im_S$ семейство абсолютно непрерывных симметричных распределений. Выделим класс W_S положительных весовых функций, для которых предполагаем, что они дифференцируемы, являются четными функциями, то есть $W(-x)=W(x)$, и $\int\{F(x)(1-F(x))\}^p W(x+c)dx<\infty$, $c\in(-\infty,+\infty)$.

Теорема. Пусть $(F,F_0)\in\Im_S$ и $W\in W_S$. Тогда для неравенств

$$0<\sigma^2(F;F_0,W)=\int IF^2(x;F,F_0,W)dF(x)<\infty,$$

выполняется асимптотическое выражение вида

$$L\{\sqrt{n}[\theta(F_n)-\theta(F)]/\sigma(F;F_0,W)\}=N(0,1),\ n\to\infty,$$

где асимптотическая дисперсия MD-оценки с опорной ф.р. F_0 и весовой функцией W при распределении F наблюдений $X_1,...,X_n$ равна

$$D(F;F_0,W)=\sigma^2(F;F_0,W)/n$$

и функция влияния $IF(u;F,F_0,W)=-IF(-u;F,F_0,W)$ MD-оценки вычисляется по формулам

$$IF(u;F,F_0,W)=A_{F,F_0}(u;W)/B_{F,F_0}(W),\quad 0\le u<\infty; \tag{7}$$

$$A_{F,F_0}(u;W)=\int_0^u W(x)dF(x)-W(u)[F(u)-F_0(u)]; \tag{8}$$

$$B_{F,F_0}(W)=\int_{-\infty}^{\infty} f_0(x)W(x)dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-F_0(x)]W'(x)dF(x). \tag{9}$$

Доказательство этой теоремы может быть найдено в [6] и [9].

Отметим, что для первого варианта оценивания параметра θ, когда $F\in\Im_0$, функция влияния $IF(u;F,W)$, $0\le u<\infty$, определяется выражением

$$IF(u;F,W)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(x)-I[u\le x]\}W(x)dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)W(x)dx}=\frac{\int_0^u W(x)dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)W(x)dF(x)}=$$

$$=J^{-1}(F,W)\int_0^u f(x)W(x)dx,\quad 0\le u<\infty, \tag{10}$$

и асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}$ MD-оценки вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F,W)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(y)-I[u\le y]\}W(y)dF(y)\right)^2 dF(u)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)W(x)dF(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x W(y)dF(y)\right)^2 dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)W(x)dx\right)^2}. \tag{11}$$

2. Эффективные MD-оценки

Для первого варианта оценивания параметра θ, когда функция распределения F наблюдений $X_1,...,X_n$ известна и совпадает с опорной симметричной функцией распределения F_0, в классе MD-оценок существует эффективная оценка параметра θ, асимптотическая дисперсия которой равна обратной величине информации Фишера $I(f_0)$ относительно параметра сдвига θ распределения $F_0(x-\theta)$ с плотностью f_0. Эта эффективная оценка определяется весовой функцией вида

$$W^*(x) = a\,\frac{d^2\{-\ln f_0(x)\}}{dx^2}\cdot\frac{1}{f_0(x)}. \tag{12}$$

Данный результат отмечался и ранее в работах [4, 9]. В справедливости этого факта можно убедиться следующим образом. Обозначим $\psi(x) = -f'(x)/f(x)$, тогда $\psi'(x) = d^2\{-\ln f(x)\}/dx^2$ и выражение (12) перепишется с учетом того, что $F = F_0$, в виде $W(x) = a\,\psi'(x)/f(x)$. Подставляя эту весовую функцию $W \in W_S$ в формулу (11) и учитывая, что для $F \in \Im_S$ $\psi(0) = 0$, получаем

$$\sigma^2(F,W) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x W(y)dF(y)\right)^2 dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)W(x)dx\right)^2} = \frac{a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2(x)dF(x)}{a^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi'(x)dF(x)\right)^2} = \frac{I(f)}{I^2(f)} = \frac{1}{I(f)}.$$

Пример 1. Отметим, что использование формулы (12) позволяет отыскать функцию распределения F_0, при которой MD-оценка с весовой функцией $W(x) = f_0(x)$ является асимптотически эффективной оценкой параметра θ. В самом деле, полагая $W(x) = f_0(x)$ и решая дифференциальное уравнение

$$d^2\{-\ln f_0(x)\}/dx^2 = a\cdot f_0^2(x),$$

получаем плотность вида

$$f_0(x) = 2/[\pi(e^x + e^{-x})] = (1/\pi)\sec h(x), \quad x \in R^1,$$

с функцией распределения $F_0(x) = (2/\pi)\operatorname{arctg}(e^x)$, $x \in R^1$, которую называют гиперболический секанс. Отметим, что информация Фишера для параметра сдвига θ плотности $f_0(x) = (1/\pi)\sec h(x)$ – гиперболический секанс, как и для распределения Коши, равна $I(f_0) = 1/2$. Следовательно, $\sigma^2(F_0, W = f_0) = 2$. Отметим также, что функция влияния MD-оценки с весовой функцией $W \equiv 1$ при $F = F_0$ является *ограниченной* и определяется в виде

$$IF(x;F_0,W\equiv 1) = \frac{F_0-(1/2)}{\int_0^1 f_0(F_0^{-1}(t))dt} = \frac{(2/\pi)\operatorname{arctg}(e^x)-(1/2)}{(2/\pi^2)} = \pi\operatorname{arctg}(e^x) - (\pi^2/4), \ x \in R^1 .$$

Асимптотическая дисперсия MD-оценки с весовой функцией $W \equiv 1$ при $F = F_0$ совпадает с асимптотической дисперсией оценки HL Ходжеса – Лемана и для распределения $F_0(x) = (2/\pi)\operatorname{arctg}(e^x)$ вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F_0, W=1) = \frac{1}{12\left(\int_0^1 f_0(F_0^{-1}(t))dt\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{12\left((2/\pi)\int_0^1 \sin(\pi t/2)\cos(\pi t/2)dt\right)^2} = \frac{\pi^4}{48} \approx 2{,}029 = \sigma^2(F_0, HL).$$

Пример 2. Рассмотрим супермодель $\Im_S^*$ в виде конечного семейства заданных распределений, то есть $\Im_S^* = \{F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}, F_{(4)}, F_{(5)}\}$, где $F_{(1)} = \Phi$ – стандартное нормальное распределение с плотностью $f_{(1)} = \phi$, информация Фишера $I(f_{(1)}) = 1$; $F_{(2)}$ – логистическое, $I(f_{(2)}) = 1/3$; $F_{(3)}$ – Лапласа, $I(f_{(3)}) = 1$; $F_{(4)}$ – Коши, $I(f_{(2)}) = 1/2$; $F_{(5)}$ – гиперболический секанс, $I(f_{(5)}) = 1/2$. Оптимальные весовые функции вида (12) для распределений из $\Im_S^*$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Оптимальные весовые функции вида $W^*(x) = a \cdot \psi'(x)/f(x)$

$F_{(1)}$	$F_{(2)}$	$F_{(3)}$	$F_{(4)}$	$F_{(5)}$
$W_{(1)}^*(x) = 1/\phi(x)$	$W_{(2)}^*(x) \equiv 1$	$W_{(3)}^*(x) =$ $= 2e^{\lvert x\rvert}\delta(x-0)$	$W_{(4)}^*(x) = \dfrac{(1-x^2)}{(1+x^2)}$	$W_{(5)}^*(x) = \dfrac{2}{\pi}(e^x + e^{-x})^{-1}$

Отметим, что асимптотическая дисперсия MD-оценки с опорным распределением $F_0(x) = F(x)$ и весовой функцией $W(x) = 1/f(x)$ совпадает с асимптотической дисперсией выборочного среднего $\overline{X}$ и вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F, W = 1/f) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x W(y)dF(y)\right)^2 dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)W(x)dx\right)^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x (1/f(y))f(y)dy\right)^2 dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)(1/f(x))dx\right)^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = \sigma^2(F, \overline{X}).$$

Для весовой функции $W(x) = 1/\phi(x)$, где $\phi(x)$ – стандартная нормальная плотность, MD-оценка является эффективной оценкой параметра сдвига θ нормального распределения, однако она, как и выборочное среднее $\overline{X}$, имеет *неограниченную* функцию влияния $IF(x; \Phi, W = 1/\phi) = x$, $x \in R^1$, и её чувствительность к грубым ошибкам не является конечной, то есть $\gamma^*(\Phi, W = 1/\phi) = \infty$. Отметим также, что выбор весовой функции $W(x) \equiv 1$ приводит к асимптотически эффективной MD-оценке при логистической ф.р. $F_{(2)}$ (её дисперсия в данном случае совпадает с дисперсией HL-оценки), при этом абсолютная эффективность MD-оценки с весовой функцией $W(x) = f_{(2)}(x)$ равна $АЭ(F_{(2)}, W = f_{(2)}) =$

$=[3,036(1/3)]^{-1}=0,988$. Напомним, что для логистического распределения $F_{(2)}$ с плотностью $f_{(2)}$ и выполняется равенство $f_{(2)}=F_{(2)}(1-F_{(2)})$, поэтому выбор весовой функции в виде $W(x)=f_0/F_0(1-F_0)$, соответствующий MD-оценке, основанной на использовании расстояния Андерсона – Дарлинга, также приводит к эффективной оценке при логистическом распределении. Для распределения Лапласа с плотностью $f_{(3)}(x)=(1/2)\exp(-|x|)$, $x\in R^1$, функция $\psi(x)=-f'_{(3)}(x)/f_{(3)}(x)=$ $=\mathrm{sign}(x)$ и, следовательно, оптимальная весовая функция $W^*(x)=a\cdot\psi'(x)/f(x)$, определяемая формулой (12), при $a=1$ принимает вид

$$W^*_{(3)}(x)=\{\mathrm{sign}(x)\}'/f_{(3)}(x)=\delta(x-0)/f_{(3)}(x)=2e^{|x|}\,\delta(x-0)\,.$$

Используя данное выражение для оптимальной весовой функции и формулу (11), можно убедится, что асимптотическая дисперсия MD-оценки будет совпадать с асимптотической дисперсией выборочной медианы $\overline{X}_{1/2}$, которая является асимптотически эффективной оценкой параметра сдвига θ для распределения Лапласа. В самом деле, из формулы (11) при весовой функции $W(x)=\delta(x-0)/f(x)$, получаем

$$\sigma^2(F,W)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(y)-I[u\le y]\}W(y)dF(y)\right)^2dF(u)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)W(x)dF(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(y)-I[u\le y]\}\delta(y-0)dy\right)^2dF(u)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-0)dx\right)^2}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\{F(0)-I[u\le 0]\}^2dF(u)}{f^2(0)}=$$

$$=\frac{(1/4)-\int_{-\infty}^{+\infty}I[u\le 0]dF(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}I^2[u\le 0]dF(u)}{f^2(0)}=\frac{1}{4f^2(0)}=\sigma^2(F,\overline{X}_{1/2})\,.$$

Отметим, что для распределения Коши оптимальная весовая функция $W^*_{(4)}(x)=a(1-x^2)/(1+x^2)$ отрицательна вне интервала $[-1,1]$. Этот факт можно пояснить следующим образом. Из формулы (10) следует, что весовая функция W выражается через производную функции влияния в виде $W(u)=J(F,W)\,IF'(u;F,W)/f(u)$, $0\le u<\infty$. Таким образом, чтобы «уменьшить» влияние выбросов на MD-оценку, нужно, чтобы её функция влияния при больших значениях аргумента убывала и, следовательно, весовая функция должна быть *отрицательной*, что и наблюдается для оптимальной весовой функции $W^*_{(4)}(x)=a(1-x^2)/(1+x^2)$ при распределении Коши.

Пример 3. Рассмотрим семейство распределений Стьюдента $\Im_r\in\Im_S$, для которого плотность распределения $f_r(x)$ с r степенями свободы записывается в виде

$$f_r(x)=A(r)(1+(x^2/r))^{-(r+1)/2},\quad x\in R^1,\quad A(r)=\Gamma((r+1)/2)/\sqrt{r\pi}\,\Gamma(r/2)\,.$$

Используя (11), можно убедиться, что оптимальные весовые функции для распределений этого семейства вычисляются по формуле

$$W_r^*(x) = a \cdot r^{-(r+1)/2}(r+1)A^{-1}(r)(r-x^2)(r+x^2)^{(r-3)/2}.$$

Отсюда, в частности, при $r=1$ получаем оптимальную весовую функцию для распределения Коши, $W_r^*(x)|_{r=1} = a \cdot 2\pi(1-x^2)/(1+x^2) = W_{(4)}^*(x)$. Случай $r \to \infty$ соответствует нормальному распределению. Учитывая, что при $r \to \infty$ выполняются выражения $A(r) \to 1/\sqrt{2\pi}$ и $(1+(x^2/r))^{-(r+1)/2} \to e^{-x^2/2}$, из общей формулы получаем $\lim_{r\to\infty} W_r^*(x) = a \cdot \sqrt{2\pi}\, \exp(x^2/2) = a \cdot 1/\phi(x) = W_{(1)}^*(x)$.

3. Свойства робастности MD-оценок

Для изучения свойств робастности MD-оценок рассмотрим два типа супермоделей, которые описывают отклонения от гауссовской модели наблюдений. Первая супермодель $\Im_S^*$, которая использовалась в примере 2, определяется в виде конечного семейства заданных распределений, то есть $\Im_S^* = \{F_{(1)}, F_{(2)}, F_{(3)}, F_{(4)}, F_{(5)}\}$. Вторую супермодель $\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$ называют гауссовской моделью с масштабным засорением и определяют в виде

$$\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi) = \{F : F_{\varepsilon,\tau}(x) = (1-\varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\tau)\},\ 0 \le \varepsilon \le 1,\ \tau \ge 1,$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения с плотностью $\phi(x)$, ε – пропорция засорения выборки и τ – масштабный параметр засорения.

3.1. Сначала рассмотрим свойства MD-оценок в рамках супермодели $\Im_S^*$ при различных вариантах задания опорной ф.р. F_0 и весовых функций W. Для первого варианта оценивания параметра θ, когда функция распределения F известна и равна опорной функции распределения F_0, то есть $F \in \Im_0$, функция влияния MD-оценки и её асимптотическая дисперсия вычисляются по формулам (10) и (11). Рассмотрим различные варианты задания весовой функции $W \in W_S$.

А) Пусть $W(x) \equiv 1$ и $F(x) = F_0(x)$. При этих условиях MD-оценки с весовой функцией $W(x) \equiv 1$ являются B-робастными, то есть они имеют *ограниченные* функции влияния, которые определятся в виде

$$IF(x; F, W \equiv 1) = \{2F(x) - 1\}/2\int f^2(x)dx.$$

В гауссовском случае, при $F = \Phi$, функция влияния определяется выражением

$$IF(x; \Phi, W \equiv 1) = \sqrt{\pi}[2\Phi(x) - 1].$$

Чувствительность к грубым ошибкам $\gamma^*(F,T) = \sup_x |IF(x; F, T)|$ для MD-оценки с весовой функцией $W(x) \equiv 1$ равна $\gamma^*(\Phi, W \equiv 1) = \sqrt{\pi} \approx 1{,}77$.

Б) Пусть весовая функция совпадает с опорной плотностью, то есть $W(x) = f_0(x)$ и $F(x) = F_0(x)$. При этих предположениях из (11) следует, что асимптотическая дисперсия MD-оценки с опорным распределением $F_0(x) = F(x)$

и $W(x) = f(x)$ вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F, W = f) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^x f^2(y)dy\right)^2 dF(x)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^3(x)dx\right)^2}.$$

Отметим, что при гауссовском распределении, то есть при $F(x) = \Phi(x)$, и весовой функции $W(x) = \phi(x) = (1/\sqrt{2\pi})\exp\{-x^2/2\}$ из (10) получаем *ограниченную* функцию влияния MD-оценки в виде

$$IF(x; \Phi, W = \phi) = (\sqrt{3\pi}/2)\tilde{\Phi}(x) = (\sqrt{3\pi}/2)[2\Phi(x\sqrt{2}) - 1],\ x \in R^1,$$

где $\tilde{\Phi}(x)$ – функция Лапласа, определяемая выражениями

$$\tilde{\Phi}(x) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^x \exp\{-x^2\}dx, \quad \tilde{\Phi}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1,\ x \ge 0,$$

$$\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^x \exp\{-x^2/2\}dx.$$

Чувствительность к грубым ошибкам $\gamma^*(F, T)$ для MD-оценки с весовой функцией $W(x) = \phi(x)$ равна $\gamma^*(\Phi, W = \phi) = \sqrt{3\pi}/2 = 1{,}53$. В этом случае асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}$ MD-оценки равна

$$\sigma^2(\Phi, W = \phi) = 2\int_0^\infty IF^2(x; \Phi, W = \phi)\, d\Phi(x) = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \tilde{\Phi}^2(x) e^{-x^2/2} dx =$$

$$= (3/2)\,\mathrm{arctg}(2/\sqrt{5}) = 1{,}095.$$

Значения асимптотических дисперсий MD-оценок для случаев (А) и (Б) вычислены для следующих распределений: $F_{(1)}$ – нормальное, $F_{(2)}$ – логистическое, $F_{(3)}$ – Лапласа, $F_{(4)}$ – Коши, $F_{(5)}$ – гиперболический секанс. Численные расчеты по полученным формулам при различных весовых функциях приведены в табл. 2.

Таблица 2

Асимптотические дисперсии $\sqrt{n}$ MD-оценок для супермодели $\Im_S^*$ при $F_{(i)} \in \Im_0$, $i = 1,\ldots,5$

Весовая функция	$F_{(1)} = \Phi$	$F_{(2)}$	$F_{(3)}$	$F_{(4)}$	$F_{(5)}$
$W \equiv 1$	1,047 (0,96)	3,000 (1,00)	1,333 (0,75)	3,287 (0,61)	2,029 (0,98)
$W_{(i)}(x) = f_{(i)}(x)$	1,095 (0,91)	3,036 (0,99)	1,200 (0,83)	2,573 (0,78)	2,000 (1,00)
$W_{(i)}(x) = f_{(i)}/F_{(i)}(1 - F_{(i)})$	1,035 (0,97)	3,000 (1,00)	1,262 (0,79)	-	-

В данной таблице в круглых скобках приведены значения абсолютных эффективностей MD-оценок, которые вычислены по формуле $AЭ(F, W) = [\sigma^2(F, W)I(f)]^{-1}$. Отметим, что для распределений с «тяжелыми хвостами» (Коши и Лапласа) абсолютная эффективность MD-оценок в большей степени зависит от выбора весовой функции *W*. Весовые функции $W \equiv 1$ и

$W_{(2)}(x) = f_{(2)} / F_{(2)}(1 - F_{(2)})$, оптимальные для логистического распределения $F_{(2)}$, весовая функция $W_{(5)}(x) = f_{(5)}(x)$, оптимальная для распределения $F_{(5)}$, – гиперболический секанс.

3.2. Рассмотрим теперь второй вариант, когда $F \neq F_0$, $F \in \Im_S^*$. В этом случае асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}$ MD-оценок вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F, F_0, W \equiv 1) = \frac{2\int_0^{\infty} [F_0(u) - (1/2)]^2 \, dF(u)}{\left(\int f_0(x) f(x) dx\right)^2}, \quad F \in \Im_S^*. \tag{13}$$

Численные значения асимптотических дисперсий $\sqrt{n}$ MD-оценок для $F \in \Im_S^*$ и весовой функции $W \equiv 1$, вычисленные по формуле (13), приведены в табл. 3.

Таблица 3

Асимптотические дисперсии $\sqrt{n}$ MD-оценок $\hat{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(F_0 = F_{(i)}, W \equiv 1)$, $i = 1,...,5$, для $F \in \Im_S^*$

$\hat{\theta} \setminus F$	$F_{(1)}$	$F_{(2)}$	$F_{(3)}$	$F_{(4)}$	$F_{(5)}$	$d(\hat{\theta}, \Im_S^*)$
$\hat{\theta}_{(1)}$	1,047 (0,96)	3,051 (0,98)	1,383 (0,72)	2,911 (0,69)	2,008 (0,99)	0,42
$\hat{\theta}_{(2)}$	1,016 (0,98)	3,000 (1,00)	1,524 (0,66)	3,679 (0,54)	2,069 (0,97)	0,57
$\hat{\theta}_{(3)}$	1,059 (0,94)	3,048 (0,98)	1,333 (0,75)	2,957 (0,68)	2,006 (0,99)	0,41
$\hat{\theta}_{(4)}$	1,046 (0,96)	3,025 (0,99)	1,385 (0,72)	3,290 (0,61)	2,017 (0,99)	0,48
$\hat{\theta}_{(5)}$	1,031 (0,97)	3,011 (0,99)	1,439 (0,70)	3,276 (0,61)	2,029 (0,98)	0,49

Отметим, что в табл. 3 в круглых скобках приведены абсолютные эффективности оценок, вычисленные по формуле $AЭ(F, \hat{\theta}) = \{\sigma^2(F, F_0, W \equiv 1) I(f)\}^{-1}$. В крайнем правом столбце таблицы приведены дефекты оценок в супермодели $\Im_S^*$, вычисленные по формулам (14).

Для второго варианта оценивания параметра θ, когда $F \neq F_0$ и функция распределения наблюдений F одна из супермодели $\Im_S^*$, то есть $F_j = F_{(j)}$, $(j,i) = 1,...,5$, а весовая функция W равна опорной плотности, то есть $W_i(x) = f_{(i)}(x)$, $i = 1,...,5$, в таблице (4) приведены численные значения асимптотических дисперсий MD-оценок, вычисленные по формулам

$$\sigma^2(F_{(j)}, F_{(i)}, W_i = f_{(i)}) = \frac{2\int_0^{\infty} \left(\int_0^u f_{(i)}(x) f_j(x) dx \; - f_{(i)}(u)[F_j(u) - F_{(i)}(u)] \right)^2 dF_j(u)}{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(i)}^2(x) f_j(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)\, f_{(i)}^{/}(x) [F_j(x) - F_{(i)}(x)] dx \right)^2},$$

$$(j,i) = 1,...,5 .$$

Таблица 4

Асимптотические дисперсии $\sqrt{n}$ MD-оценок $\tilde{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(F_0 = F_{(i)}, W = f_{(i)})$, $i = 1,...,5$, для $F \in \Im_S^*$

$\hat{\theta} \setminus F$	$F_{(1)}$	$F_{(2)}$	$F_{(3)}$	$F_{(4)}$	$F_{(5)}$	$d(\tilde{\theta}, \Im_S^*)$
$\tilde{\theta}_{(1)}$	1,095 (0,91)	3,093 (0,97)	1,273 (0,79)	2,351 (0,85)	2,019 (0,99)	0,28
$\tilde{\theta}_{(2)}$	1,024 (0,98)	3,036 (0,99)	1,447 (0,69)	2,901 (0,69)	2,021 (0,99)	0,44
$\tilde{\theta}_{(3)}$	1,127 (0,89)	3,319 (0,90)	1,200 (0,83)	2,354 (0,85)	2,036 (0,98)	**0,27**
$\tilde{\theta}_{(4)}$	1,070 (0,94)	3,152 (0,95)	1,301 (0,77)	2,573 (0,78)	2,003 (0,99)	0,33
$\tilde{\theta}_{(5)}$	1,055 (0,95)	3,132 (0,96)	2,573 (0,78)	2,577 (0,78)	2,000 (1,00)	0,32

Отметим, что в этой таблице в круглых скобках также приведены абсолютные эффективности оценок, вычисленные по формуле $AЭ(F, \tilde{\theta}_{(i)}) = \{\sigma^2(F, F_0, W = f_{(i)}) I(f_{(i)})\}^{-1}$ $i = 1,..., 5$. При изучении свойств робастности сравниваемых оценок $\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_k$ параметра сдвига θ в рамках заданной супермодели $\Im$, состоящей из конечного набора симметричных распределений $\Im = \{F_1,...,F_r\}$, изучают поведение дефективностей оценок на плоскости двух распределений (см. [9]). По оси абсцисс обычно откладывают дефективность для базовой (идеальной модели, обычно гауссовской), а по оси ординат откладывают дефективность для альтернативной модели, входящей в супермодель $\Im = \{F_1,...,F_r\}$. Для заданного распределения $F \in \Im$ дефект оценки $\hat{\theta}$ параметра θ определяется в виде $DE(F, \hat{\theta}) = 1 - AЭ(F, \hat{\theta})$. На рис. 1 приведены дефекты оценок параметра θ на «плоскости двух распределений Гаусса – Коши». В крайнем правом столбце табл. (4) приведены дефекты оценок $\tilde{\theta}_{(1)},...,\tilde{\theta}_{(5)}$ в рамках супермодели $\Im_S^*$, вычисленные по формулам

$$d(\tilde{\theta}_{(i)}, \Im_S^*) = \left(\sum_{j=1}^{5} [1 - \{\sigma^2(F_{(j)}, \tilde{\theta}_{(i)}) I(f_{(j)})\}^{-1}]^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{5} [1 - AЭ(F_{(j)}, \tilde{\theta}_{(i)})]^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1,..., 5. \tag{14}$$

Согласно этому критерию, среди сравниваемых оценок $\tilde{\theta}_{(1)},...,\tilde{\theta}_{(5)}$ в супермодели $\Im_S^*$, предпочтение следует отдать MD-оценке $\tilde{\theta}_{(3)}$ с опорным распределением Лапласа, то есть $F_0 = F_{(3)}$ и весовой функцией равной опорной плотности, то есть $W(x) = f_{(3)}(x) = (1/2)e^{-|x|}$, $x \in R^1$, так как значение $d(\tilde{\theta}_{(3)}, \Im_S^*) = 0,27$ является наименьшим среди значений правого столбца табл. 4. Этот вывод сохраняется и при сравнении оценок $\tilde{\theta}_{(1)},...,\tilde{\theta}_{(5)}$ с MD-оценками $\hat{\theta}_{(1)},...,\hat{\theta}_{(5)}$, для которых весовая функция $W \equiv 1$, так как для этих оценок $\hat{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(F_0 = F_{(i)}, W \equiv 1)$, $i = 1,...,5$, минимальное значение $d(\hat{\theta}_{(3)}, \Im_S^*) = \min\{d(\hat{\theta}_{(i)}, \Im_S^*), i = 1,...,5\} = 0,41$ (см. правый столбец табл. 3). Заметим, что для оценки Ходжеса–Лемана $d(HL,\Im_S^*)=0,47$; для $\tilde{X}_\alpha$-винзоризованного среднего $d(\tilde{X}_{0,45},\Im_S^*)=0,41$; для выборочной медианы $d(\overline{X}_{1/2},\Im_S^*)=0,51$; для выборочного среднего $d(\overline{X},\Im_S^*)=1,14$. Отметим также, что «практически» таким же преимуществом обладает и MD-оценка $\tilde{\theta}_{(1)}$ с опорным нормальным распределением , то есть $F_0=F_{(1)}=\Phi$ и весовой функцией $W(x)=(1/\sqrt{2\pi})\exp\{-x^2/2\}$, $x\in R^1$, так как для этой оценки $d(\tilde{\theta}_{(1)},\Im_S^*)=0,28$ (см. правый столбец табл. 4).

На рис. 1 наглядно видны преимущества MD-оценок (они концентрируются ближе к началу координат) перед семейством $\tilde{X}_\alpha$-винзоризованных средних и семейством HL_α -оценок Ходжеса–Лемана.

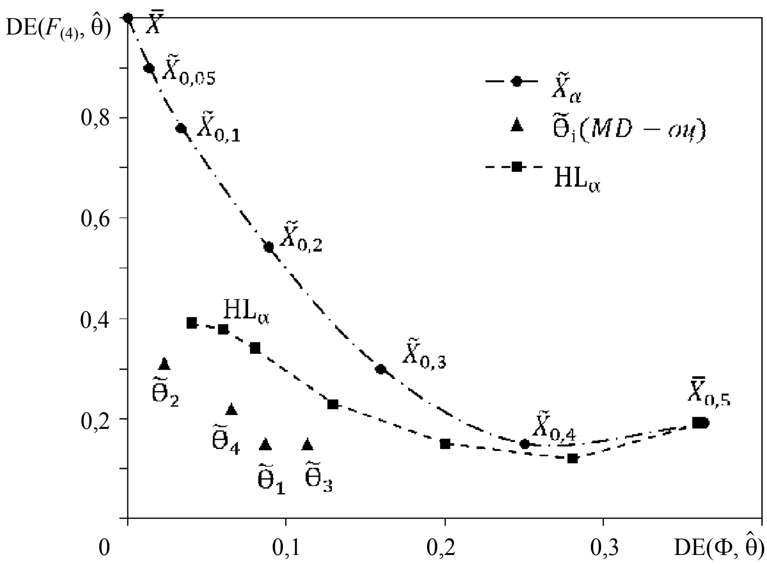

Рис. 1. Дефекты оценок для распределений Гаусса – Коши

3.3. Рассмотрим гауссовскую модель с масштабным засорением $\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$. В качестве опорного распределения выберем нормальное распределение, то есть $F_0=\Phi$, а распределение F наблюдений $X_1,...,X_n$ характеризуется нормальным распределением с масштабным засорением, то есть $F\in\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$. Для принятых предположений асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}$ MD-оценки при $W(x)\equiv 1$ вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F_{\varepsilon,\tau},\Phi,W\equiv 1)=\frac{2\int_0^{+\infty}[\Phi(x)-(1/2)]^2[(1-\varepsilon)\phi(x)+(\varepsilon/\tau)\phi(x/\tau)]dx}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)[(1-\varepsilon)\phi(x)+(\varepsilon/\tau)\phi(x/\tau)]dx\right)^2}=$$

$$=\frac{[\pi(1-\varepsilon)/6]+[\varepsilon\,\mathrm{arctg}(\tau^2/\sqrt{2\tau^2+1})]}{\{[(1-\varepsilon)/\sqrt{2}]+(\varepsilon/\sqrt{\tau^2+1})\}^2}.$$

Для весовой функции $W(x)=f_0(x)=\phi(x)$ асимптотическая дисперсия $\sqrt{n}$ MD-оценки вычисляется по формуле

$$\sigma^2(F_{\varepsilon,\tau},\Phi,W=\phi)=\frac{2\int_0^{\infty}\left(\int_0^{u}\phi(x)f_{\varepsilon,\tau}(x)dx-\phi(u)[F_{\varepsilon,\tau}(u)-\Phi(u)]\right)^2 dF_{\varepsilon,\tau}(u)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\phi^2(x)dF_{\varepsilon,\tau}(x)-\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(x)[F_{\varepsilon,\tau}(x)-\Phi(x)]dF_{\varepsilon,\tau}(x)\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\cdot\tilde{B}^2(\varepsilon,\tau)}\sum_{i=1}^{20}A_i(\varepsilon,\tau),$$

где $\tilde{B}(\varepsilon,\tau)$ и $A_i(\varepsilon,\tau)$, $i=1,...,20$, заданные функции параметров ε и τ. Численные значения асимптотических дисперсий MD-оценок для $F\in\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$ при различных весовых функциях приведены в табл. 5. На рис. 2 приведены дефекты $\overline{X}_\alpha$-оценок и MD-оценки с весовой функцией $W(x)\equiv 1$ (она отмечена звездочкой). На рис. 3 приведены абсолютные эффективности оценок для $F\in\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$ при $\tau=3$. Из рис. 3 наглядно видно, что MD-оценка с опорной функцией $W(x)=\phi(x)$, также как и оценка Ходжеса – Лемана, обеспечивают высокую абсолютную эффективность при изменении пропорции засорения ε, $0\le\varepsilon\le 0,3$. При этом абсолютная эффективность для выборочного среднего $\overline{X}$ резко падает, а для выборочной медианы $\overline{X}_{1/2}$ она медленно растет, оставаясь на низком уровне.

Таблица 5

Асимптотические дисперсии MD-оценок для $F\notin\Im_0$, $F=F_{\varepsilon,\tau}$, $F_0=\Phi$

W, $\tau\setminus\varepsilon$	0,00	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$\tau=3$	1,047 (0,95)	1,071 (0,96)	1,171 (0,97)	1,307 (0,97)	1,458 (0,95)	1,625 (0,94)	1,811 (0,93)	2,019 (0,93)
$W\equiv 1$, 5	1,047 (0,95)	1,078 (0,95)	1,210 (0,93)	1,395 (0,90)	1,607 (0,86)	1,851 (0,83)	2,132 (0,80)	2,459 (0,78)
$\tau=3$	1,095 (0,91)	1,117 (0,92)	1,209 (0,93)	1,333 (0,94)	1,470 (0,95)	1,620 (0,95)	1,786 (0,95)	1,972 (0,96)
$W=\phi$, 5	1,095 (0,91)	1,122 (0,92)	1,237 (0,91)	1,393 (0,90)	1,562 (0,89)	1,749 (0,88)	1,956 (0,87)	2,187 (0,87)

В этой таблице в скобках приведены абсолютные эффективности MD-оценок, вычисленные по формуле $AЭ(F_{\varepsilon,\tau},\hat{\theta})=\{\sigma^2(F_{\varepsilon,\tau},W)I(f_{\varepsilon,\tau})\}^{-1}$, где $I(f_{\varepsilon,\tau})$ – информация Фишера относительно параметра сдвига распределений из супермодели $\Im_{\varepsilon,\tau}(\Phi)$.

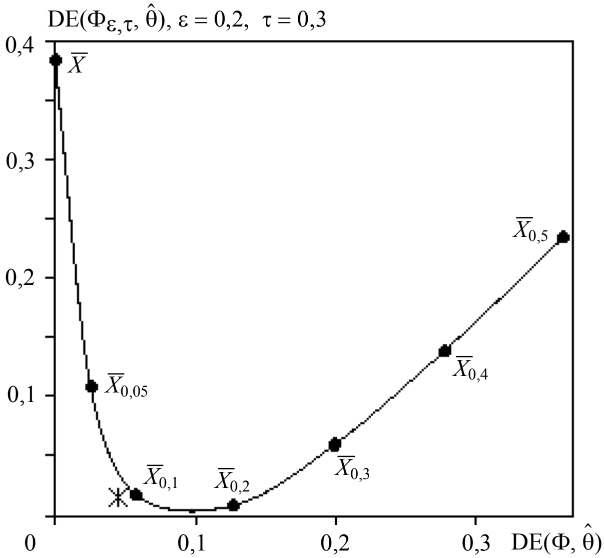

Рис. 2. Дефекты оценок в плоскости двух распределений

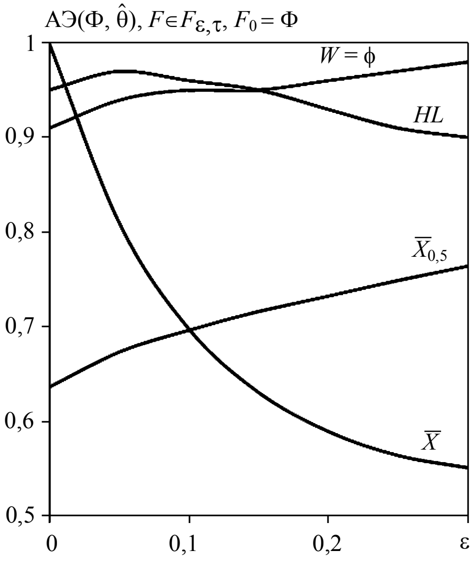

Рис. 3. Абсолютная эффективность оценок

Заключение

В работе изучены асимптотические свойства MD-оценок параметра сдвига θ, основанные на использовании взвешенного расстояния Крамера – Мизеса. Показано, что эти оценки B-робастны, то есть их функции влияния ограничены и, следовательно, MD-оценки «защищены» от наличия выбросов в выборке. Для случая, когда $F \in \Im_0$, приведены оптимальные весовые функции, при которых MD-оценки асимптотически эффективны. Для гауссовской модели с масштабным засорением (при $\tau = 3$) абсолютная эффективность MD-оценок с весовой функцией $W \equiv 1$ не опускается ниже 0,93 при $0 \le \varepsilon \le 0,3$, и при этом она возрастает с 0,91 до 0,98 для весовой функции $W = \phi$.

Подводя итог, отметим, что существуют тесные связи MD-оценок параметра сдвига θ с другими робастными *M*, *L* и *R*-оценками параметра сдвига θ, (см. работы [5, 9]). Семейство MD-оценок включает в себя в частных случаях многие известные оцени параметра сдвига θ. В частности, оценку Ходжеса – Лемана, выборочные среднее и медиану. Отметим также, что приведенные асимптотические результаты являются вполне приемлемой аппроксимацией свойств MD-оценок при конечных объемах выборки $n \ge 20$. Это подтверждают многочисленные результаты моделирования, полученные методом статистических испытаний. Изучение свойств эффективности и робастности MD-оценок открывают (для случая, когда $F \notin \Im_0$) возможности использовать адаптивный подход при выборе опорного распределения F_0 и весовой функции W в рамках заданной супермодели, основываясь на выборочных оценках функционалов, определяющих «степень затянутости хвостов» распределений (см. работу [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolfowitz J.* The minimum distance method // Ann. Math. Statist. 1957. V. 28. P. 75 – 88.
2. *Parr W.C.* Minimum distance estimation: a bibliography // Comm. Statist. 1981. A10. P. 1205 – 1224.
3. *Bickel P. J.* Another look at robustness: a review of reviews and some new development // Scand. J. Statist. Theory and App1. 1976. V. 3. P. 145 – 168.
4. *Boos D.D.* Minimum distance estimators for location and goodness of fit // J. Amer. Statist. Assoc. 1981. V. 76. No. 375. P. 663 – 670.
5. *Shulenin V.P.*, *Tarasenko F.P.* Connections of MD-estimates with classes of robust estimates of location parameter // 12th Prague Conf. on Inform. Theory. August 29. September 2, 1994. P. 220 – 223.
6. *Шуленин В.П.* Асимптотические свойства и робастность MD-оценок // Теория вероятностей и её применение. 1992. Т. 37. Вып. 4. С. 816 – 818.
7. *Шуленин В.П.* Границы эффективности оценок, построенных методом минимума расстояния Крамера – Мизеса // Изв. вузов. Физика. 1995. № 9. С. 84 – 89.
8. *Серых А.П.*, *Шуленин В.П.* Робастные и непараметрические алгоритмы обработки данных физических экспериментов // Изв. вузов. Физика. 1993. № 10. С. 128 – 136.
9. *Шуленин В.П.* Введение в робастную статистику. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
10. *Шуленин В.П.* Свойства адаптивных оценок Ходжеса – Лемана в асимптотике и при конечных объемах выборки // Вестник Томского госуниверситета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 96 – 112.
11. *Serfling R.J.* Approximation theorems of mathematical statistics. N.Y.: Wiley, 1980. 371 p.

Шуленин Валерий Петрович
Томский государственный университет
E-mail: shvp@mail.tsu.ru
Поступила в редакцию 23 марта 2010 г.