ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(13)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5

В.В. Домбровский, Т.Ю. Объедко

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИМИСЯ РЕЖИМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ОБЪЕМЫ ТОРГОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Рассматривается модель управления инвестиционным портфелем в дискретном времени при скачкообразном изменении параметров рисковых финансовых активов с учетом явных ограничений на объемы торговых операций. Параметры изменяются в соответствии с эволюцией однородной марковской цепи. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных.

Ключевые слова: *инвестиционный портфель, управление с прогнозирующей моделью, ограничения, марковские скачки, мультипликативные шумы.*

Проблема оптимального управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из наиболее актуальных в финансовой инженерии. Особый интерес представляет задача управления ИП на финансовом рынке с переключающимися режимами [1 – 6]. При этом предполагается, что параметры уравнений, описывающих доходности рисковых активов, меняются скачкообразно в соответствии со случайной сменой режимов функционирования, характерных для реальных финансовых рынков.

В [1, 2] рассматривается задача управления ИП на скачкообразном финансовом рынке без учета явных ограничений на объемы торговых операций. На реальных рынках существуют жесткие ограничения на объемы вложений (куплипродажи) и займов финансовых инструментов.

Задача динамического управления ИП с учетом явных ограничений рассматривалась в работах [7, 8]. В [7] эволюция цен рисковых активов описывается дискретизованной версией модели типа геометрического броуновского движения со случайными независимыми параметрами, в [8] доходности описываются моделью авторегрессии. В этих работах предлагается использовать стратегии управления с прогнозирующей моделью (со скользящим горизонтом инвестирования) [9]. Такой подход позволяет достаточно просто учитывать явные ограничения на управляющие переменные – объемы вложений и займов. Синтез стратегий управления с прогнозированием сводится к последовательности задач квадратичного программирования.

В настоящей работе рассматривается задача управления ИП при ограничениях на финансовом рынке с переключающимися режимами. Параметры рисковых активов меняются в соответствии с эволюцией однородной марковской цепи с конечным пространством ненаблюдаемых состояний и известной матрицей переходных вероятностей. Получены уравнения синтеза стратегий управления ИП с прогнозирующей моделью с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов. Приведены результаты численного моделирования с использованием реальных данных.

1. Постановка задачи и описание модели ИП

Рассмотрим ИП, состоящий из n видов рисковых финансовых активов (обыкновенных акций) и одного безрискового финансового актива (банковский счет или надежные облигации). Капитал, помещенный в i-й рисковый актив в момент времени k, равен $u_i(k)$ ($i = 1, 2,..., n$); в безрисковый $u_0(k)$. Тогда общий объем вложений (капитал портфеля) в момент времени k будет

$$V(k)=\sum_{i=1}^{n}u_i(k)+u_0(k)\,. \tag{1}$$

Отметим, что если $u_i(k) < 0$ ($i = 1, 2, ..., n$), то это означает участие в операции «продажа без покрытия» на сумму $|u_i(k)|$; если $u_0(k)<0$, то это означает заем капитала в размере $|u_0(k)|$ по безрисковой ставке r. В момент времени $k + 1$ капитал портфеля

$$V(k+1)=\sum_{i=1}^{n}[1+\eta_i(k+1)]u_i(k)+[1+r]u_0(k)\,, \tag{2}$$

где $\eta_i(k+1)$ – ставка доходности рисковых вложений на интервале $[k, k + 1]$ (случайная величина), r – неслучайная доходность безрисковых вложений.

Используя (1), уравнение (2) преобразуем к виду

$$V(k+1)=[1+r]V(k)+\sum_{i=1}^{n}[\eta_i(k+1)-r]u_i(k)\,, \tag{3}$$

при этом $u_0(k)=V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)$.

При управлении портфелем учитываются следующие ограничения:

$$u_i^{\min}(k)\le u_i(k)\le u_i^{\max}(k),\quad i=\overline{1,n}\,; \tag{4}$$

$$u_0^{\min}(k)\le V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)\le u_0^{\max}(k)\,. \tag{5}$$

Если нижняя граница $u_i^{\min}(k)<0$, $i=1,2,\ldots,n$, то для рискового актива i-го вида допустимо участие в операции «продажа без покрытия» на сумму не более $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k)\ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$, то операции «продажа без покрытия» для рискового актива i-го вида запрещены; $u_0^{\max}(k)\ge 0$ определяет максимальный размер капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив, $u_i^{\max}(k)$, $i=1,2,\ldots,n$, определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковый актив i-го вида; $u_0^{\min}(k)\le 0$, величина $|u_0^{\min}(k)|$ определяет максимальный размер займа безрискового актива. Отметим, что величины $u_i^{\min}(k)$, $u_i^{\max}(k)$, $i=0,1,\ldots,n$, на практике часто зависят от общего капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i'V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \gamma_i''V(k)$, где γ_i', γ_i'' – постоянные коэффициенты.

Необходимо определить стратегию управления портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля с доходностью μ_0, эволюция которого описывается уравнением

$$V_0(k+1) = [1+\mu_0]V_0(k), \tag{6}$$

в начальный момент времени $V_0(0)=V(0)$.

Для описания эволюции доходностей рисковых активов используем разностную аппроксимацию уравнений геометрического (экономического) броуновского движения со скачкообразно меняющимися параметрами [2,3]:

$$\eta_i\left[\alpha(k),k\right] = \mu_i\left[\alpha(k),k\right] + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\left[\alpha(k),k\right]\omega_j(k), \tag{7}$$

где $\alpha(k)$ ($k = 0,1,2\ldots$) – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu\}$, известной матрицей переходных вероятностей

$$P = \left[P_{ij}\right],\ i,j \in \{1,2,...,\nu\},$$

$$P_{ji} = P\left\{\alpha(k+1) = \alpha_j \left|\alpha(k) = \alpha_i\right.\right\}, \sum_{j=1}^{\nu} P_{ji} = 1,$$

и известным начальным распределением:

$$p_i = P\{\alpha(0) = i\},\ i = 1,2,...,\nu;\ \sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1.$$

$\omega_j(k)$ – независимые между собой дискретные белые шумы с нулевым средним и единичной дисперсией; последовательности $\omega_j(k)$ и $\alpha_j(k)$ независимы; $\mu_i[\alpha(k),k]$ – ожидаемая доходность i-го рискового вложения; $\sigma_{ij}[\alpha(k),k]$ – элементы матрицы волатильности $\sigma[\alpha(k),k]$, $\sigma[\alpha(k),k]\sigma^T[\alpha(k),k]\geq 0$.

Причем

$$\mu_i\left[\alpha(k),k\right] \in \left\{\mu_i^{(1)},\mu_i^{(2)},...,\mu_i^{(\nu)}\right\}, \sigma\left[\alpha(k),k\right] \in \left\{\sigma^{(1)},\sigma^{(2)},...,\sigma^{(\nu)}\right\},$$

где $\sigma^{(l)}=[\sigma_{ij}^{(l)}]$, $i,j=1,2,\ldots,n$, $l=1,\ldots,\nu$. Предполагается также, что состояние марковской цепи в момент времени k не доступно наблюдению.

2. Определение оптимальной стратегии управления

Для управления портфелем используем стратегии с прогнозирующей моделью. Критерий качества управления (функция риска) имеет вид

$$J(k+m/k) = M\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(V(k+i) - V^0(k+i)\right)^2\rho(k,i) + \right.$$
$$\left. +u^T(k+i-1/k)R(k+i-1)u(k+i-1/k)\rho(k,i-1) \big/ V(k),V_0(k)\right\}, \tag{8}$$

где m – горизонт прогноза, $u(k+i/k)=[u_1(k+i/k), \ldots,u_n(k+i/k)]^T$, $R(k)>0$, $\rho(k,i)>0$ – весовые коэффициенты. Весовые коэффициенты $\rho(k,i)$ можно выбирать различными способами. Если $\rho(k,i)=1$, то минимизируется сумма квадратов абсолютных отклонений от намеченной траектории; если $\rho(k,i)=[V^0(k+i)]^{-2}$, то минимизируется сумма квадратов относительных отклонений от намеченной траектории; можно также использовать дисконтирующие множители: $\rho(k,i)=[1+\beta]^{-2i}$, где β – ставка дисконтирования.

Таким образом, на каждом шаге k имеем задачу минимизации критерия (8) со скользящим горизонтом управления по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k)$, ..., $u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени k, при ограничениях (4), (5). В качестве управления в момент времени k берем $u(k)=u(k/k)$. Тем самым получаем управление $u(k)$ как функцию состояний управляемого и эталонного портфелей, т.е. управление с обратной связью. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Теорема. Пусть динамика ИП описывается уравнением (3) с моделью доходностей (7) и ограничениями (4),(5). Тогда оптимальная стратегия прогнозирующего управления, минимизирующая критерий (8) со скользящим горизонтом m определяется уравнением

$$u(k)=\begin{bmatrix} I_n & 0_n & \cdots & 0_n \end{bmatrix} U(k), \qquad (9)$$

где I_n – единичная матрица размерности n, 0_n – квадратная нулевая матрица размерности n, $U(k)=[u^T(k/k), \ldots, u^T(k+m-1/k)]^T$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием

$$Y(k+m/k)=2x^T(k)G(k)U(k)+U^T(k)H(k)U(k) \qquad (10)$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k)\le \bar{S}(k)U(k)\le U_{\max}(k), \qquad (11)$$

где
$$x(k)=\begin{bmatrix} V(k) & V_0(k)\end{bmatrix}^T;$$

$$U_{\min}(k)=[u^T{}_{\min}(k), 0_{n+1\times 1}, \ldots, 0_{n+1\times 1}]^T,\ U_{\max}(k)=[u^T{}_{\max}(k), 0_{n+1\times 1}, \ldots, 0_{n+1\times 1}]^T;$$

$$u_{\min}(k)=\begin{bmatrix} u_1^{\min}(k) \\ u_2^{\min}(k) \\ \cdots \\ u_n^{\min}(k) \\ u_0^{\min}(k)-V(k)\end{bmatrix},\quad u_{\max}(k)=\begin{bmatrix} u_1^{\max}(k) \\ u_2^{\max}(k) \\ \cdots \\ u_n^{\max}(k) \\ u_0^{\max}(k)-V(k)\end{bmatrix};$$

$\bar{S}(k)$, $H(k)$, $G(k)$ – блочные матрицы вида

$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \cdots & H_{1m}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \cdots & H_{2m}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \cdots & H_{mm}(k)\end{bmatrix}; \qquad (12)$$

$$G(k)=\begin{bmatrix} G_1(k) & G_2(k) & \cdots & G_m(k)\end{bmatrix}; \qquad (13)$$

$$\bar{S}(k)=\mathrm{diag}(S(k), 0_{n+1\times n}, \ldots, 0_{n+1\times n}),$$

блоки которых определяются следующими соотношениями:

$$H_{tt}(k)=R_2(k,t-1)+\sum_{s=0}^{n}\left\{\sum_{q=1}^{\nu}(B_s^{(q)}(k+t))^T Q(m-t)B_s^{(q)}(k+t)p_q(k+t)\right\}; \qquad (14)$$

$$H_{tf}(k)=\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_0^{(q)}(k+t))^T(A^{(f-t)})^T Q(m-f)B_0^{(r)}(k+t)P_{rq}^{(f-t)}p_q(k+t),\ t<f; \qquad (15)$$

$$H_{tf}(k)=H_{ft}{}^{T}(k),\ \ t>f; \tag{16}$$

$$G_t(k)=(\mathrm{A}^t)^T Q(m-t)\sum_{q=1}^{\nu} B_0{}^{(q)}(k+t)p_q(k+t)\,; \tag{17}$$

$$S(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -1 & -1 & \cdots & -1\end{bmatrix};$$

$$Q(t)=A^T Q(t-1)A+R_1(k,m-t),\ \ t=\overline{1,m}\,; \tag{18}$$

$$Q(0)=R_1(k,m), \tag{19}$$

где $$A=\mathrm{diag}(1+r,1+\mu_0),\ \ B_0{}^{(q)}(k)=\begin{bmatrix}\mu_1{}^{(q)}-r & \mu_2{}^{(q)}-r & \mu_n{}^{(q)}-r\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_j{}^{(q)}(k)=\begin{bmatrix}\sigma_{1j}{}^{(q)} & \sigma_{2j}{}^{(q)} & \sigma_{nj}{}^{(q)}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},(j=\overline{1,n}),(q=\overline{1,\nu}),$$

$$R_1(k,t)=\rho(k,t)\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},R_2(k,t)=\rho(k,t)R(k,t)\,,$$

$P_{rq}{}^{f-t}$ – элемент матрицы P^{f-t}.

Доказательство. С учетом (7) представим уравнения динамики реального и эталонного портфелей (3), (6) в матричном виде:

$$x(k+1)=Ax(k)+\left[B_0[\alpha(k+1),k+1]+\sum_{j=1}^{n} B_j[\alpha(k+1),k+1]\omega_j(k+1)\right]u(k)\,, \tag{20}$$

где $$x(k)=\begin{bmatrix}V(k)\\ V^0(k)\end{bmatrix},\ \ u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\ \dots\\ u_n(k)\end{bmatrix},\ \ A=\mathrm{diag}(1+r,1+\mu_0),$$

$$B_0\left[\alpha(k),k\right]=\begin{bmatrix}\mu_1\left[\alpha(k),k\right]-r & \mu_2\left[\alpha(k),k\right]-r & \mu_n\left[\alpha(k),k\right]-r\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_j\left[\alpha(k),k\right]=\begin{bmatrix}\sigma_{1j}\left[\alpha(k),k\right] & \sigma_{2j}\left[\alpha(k),k\right] & \sigma_{nj}\left[\alpha(k),k\right]\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \ j=\overline{1,n}.$$

Критерий (9) перепишем следующим образом:

$$J(k+m/k)=M\left\{\sum_{i=1}^{m} x^T(k+i)R_1(k,i)x(k+i)+u^T(k+i-1/k)R_2(k,i-1)u(k+i-1/k)\Big/x(k)\right\}. \tag{21}$$

Цепь Маркова с дискретным временем допускает следующее представление в пространстве состояний [10]:

$$\theta(k+1)=P\theta(k)+\upsilon(k+1), \tag{22}$$

где $\theta(k)=[\delta(\alpha(k),1),\ \dots,\delta(\alpha(k),\nu)]^T$, $\delta(\alpha(k),j)$ – функция Кронекера, $j=1,\ \dots\nu$; υ – мартингал разность с характеристиками

$$M\{\upsilon(k+1)\}=0\,; \tag{23}$$

$$C(k+1)=M\{\,\upsilon(k+1)\;\upsilon^T(k+1)\}=\mathrm{diag}(PM\{\theta(k)\})-P\mathrm{diag}(M\{\theta(k)\})P^T\,.$$

При этом

$$L_1(k)=M\{\theta(k)\}=P^k p(0)=p(k)\,; \tag{24}$$

$$L_2(k)=M\{\theta(k)\theta^T(k)\}=\mathrm{diag}(p(k)), \tag{25}$$

где $p(0)=[p_1,p_2,\ldots,p_\nu]^T$ – начальное распределение состояний цепи Маркова, $p(k)=[p_1(k),p_2(k),\ldots,p_\nu(k)]^T$ – распределение состояний цепи в момент времени k.

С учетом (22) систему (20) можно представить в следующем виде:

$$x(k+1)=Ax(k)+\left[B_0[\theta(k+1),k+1]+\sum_{j=1}^{n}B_j[\theta(k+1),k+1]\omega_j(k+1)\right]u(k)\,, \tag{26}$$

где
$$B_j[\theta(k),k]=\sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k)B_j^{(i)}(k),(j=\overline{0,n})\,. \tag{27}$$

Здесь $\theta_i(k)$, $i=1,2,\ldots,\nu$, – компоненты вектора $\theta(k)$, $\{B_j^{(i)}\}$, $j=0,\ldots,n$, $i=1,\ldots,\nu$, – множество значений матрицы $B_j[\theta(k),k]$.

Выражая последовательно все $x(k+i)$, $i=1,2,\ldots,m$, через $x(k)$ с использованием уравнения системы (26) и подставляя результат в критерий (21), получим

$$J(k+m/k)=x^T(k)A^TQ(m-1)Ax(k)+ \tag{28}$$

$$+2x^T(k)A^T\sum_{i=1}^{m}(A^{i-1})^TQ(m-i)M\{B_0[\theta(k+i),k+i]\}u(k+i-1/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{s=0}^{n}M\left\{B_s^T[\theta(k+i),k+i]Q(m-i)B_s[\theta(k+i),k+i]\right\}+R_2(k,i-1)\right\}u(k+i-1/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}u^T(k+i-1/k)M\left\{B_0^T[\theta(k+i),k+i](A^{j-i})^TQ(m-j)B_0[\theta(k+j),k+j]\right\}u(k+j-1/k).$$

С учетом (23) – (25), (27) определим математические ожидания, входящие в (28):

$$M\{B_0[\theta(k+i),k+i]\}=\sum_{q=1}^{\nu}\left[E_qL_1(k+i)\right]B_0^{(q)}(k+i)=\sum_{q=1}^{\nu}B_0^{(q)}(k+i)p_q(k+i)\,; \tag{29}$$

$$M\left\{B_s^T[\theta(k+i),k+i]Q(m-i)B_s[\theta(k+i),k+i]\right\}=$$

$$=\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_s^{(q)}(k+i))^T\left[E_rL_2(k+i)E_q^T\right]Q(m-i)B_s^{(r)}(k+i)=$$

$$=\sum_{q=1}^{\nu}(B_s^{(q)}(k+i))^TQ(m-i)B_s^{(r)}(k+i)p_q(k+i)\,; \tag{30}$$

$$M\left\{B_0^T[\theta(k+i),k+i](A^{(j-i)})^TQ(m-j)B_0[\theta(k+j),k+j]\right\}=$$

$$=\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_0^{(q)}(k+i))^T\left[E_rM\left\{\theta(k+j)\theta^T(k+i)\right\}E_q^T\right]Q(m-j)B_0^{(r)}(k+j), \tag{31}$$

где $E_q = [0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$, $q = \overline{1,\nu}$, $j = \overline{i+1,m}$. Определим $M\{\theta(k+j)\theta^T(k+i)\}$ для $j=i+1,\ldots,m$:

$$M\left\{\theta(k+j)\theta^T(k+i)\right\} = M\left\{\theta(k+i+(j-i))\theta^T(k+i)\right\} =$$

$$= M\left\{\left(P^{j-i}\theta(k+j) + \sum_{l=0}^{j-i-1} P^l \upsilon(k+j-l)\right)\theta^T(k+i)\right\} =$$

$$= P^{j-i} M\left\{\theta(k+i)\theta^T(k+i)\right\} = P^{j-i} L_2(k+i).$$

Тогда (31) примет вид

$$M\left\{B_0{}^T[\theta(k+i),k+i](A^{(j-i)})^T Q(m-j)B_0[\theta(k+j),k+j]\right\} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_0{}^{(q)}(k+i))^T\left[E_r P^{j-i} L_2(k+i) E_q{}^T\right](A^{j-i})^T Q(m-j) B_0{}^{(r)}(k+j) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_0{}^{(q)}(k+i))^T (A^{j-i})^T Q(m-j) B_0{}^{(r)}(k+j) P_{rq}{}^{j-i} p_q(k+i), (j = \overline{i+1,m}). \quad (32)$$

С учетом (29), (30), (32) критерий (28) перепишем в виде

$$J(k+m/k) = x^T(k)A^T Q(m-1)Ax(k) + \quad (33)$$

$$+2x^T(k)A^T \sum_{i=1}^{m}(A^{i-1})^T Q(m-i)\left\{\sum_{q=1}^{\nu} B_0{}^{(q)}(k+i)p_q(k+i)\right\}u(k+i-1/k) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{s=0}^{n}\sum_{q=1}^{\nu}(B_s{}^{(q)}(k+i))^T Q(m-i) B_s{}^{(r)}(k+i)p_q(k+i) + R_2(k,i-1)\right\}u(k+i-1/k) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}(B_0^{(q)}(k+i))^T (A^{j-i})^T Q(m-j) B_0^{(r)}(k+j) P_{rq}{}^{j-i} p_q(k+i)\right\}u(k+j-1/k),$$

где $p_q(k)$ – q-й элемент вектора $p(k)$, P_{rq}^{j-i} – элемент (r,q) матрицы P^{j-i}.

Выражение (33) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k) = x^T(k)A^T Q(m-1)Ax(k) + 2x^T(k)G(k)U(k) + U^T(k)H(k)U(k), \quad (34)$$

где матрицы $H(k)$,$G(k)$ имеют вид (12) – (19).

Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (34) при ограничениях (4), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (10) при ограничениях (11).

3. Численное моделирование

Определим стратегию управления портфелем ценных бумаг, состоящим из пяти рисковых активов, торгующихся на российском фондовом рынке, а именно: ОАО «Сбербанк России», ОАО «Газпром», ОАО «ГМК “Норильский никель”», ОАО «Банк ВТБ», ОАО «Нефтяная компания “Лукойл”», банковского счета с доходностью $r = 0,\ 00004$. Период инвестирования: с 28.10.2007 г. по 15.05.2008 г. продолжительностью $T = 200$ торговых сессий.

Известно, что финансовый рынок может находиться в состояниях с низкой и высокой волатильностью. Основываясь на анализе доходностей рисковых активов, будем предполагать, что первое состояние характеризуется следующими параметрами активов: $\sigma_{11}^{(1)}$=0,01; $\sigma_{22}^{(1)}$=0,02; $\sigma_{33}^{(1)}$=0,01; $\sigma_{44}^{(1)}$=0,01; $\sigma_{55}^{(1)}$=0,02; второе состояние: $\sigma_{11}^{(2)}$=0,04; $\sigma_{22}^{(2)}$=0,03; $\sigma_{33}^{(2)}$=0,04; $\sigma_{44}^{(2)}$=0,04; $\sigma_{55}^{(2)}$=0,03. Предполагается также, что $\sigma_{ij}^{(1)}= \sigma_{ij}^{(2)}=0$ при $i\neq j$, $i, j=1,\ldots,5$. Индикаторами смены режимов рынка могут служить финансовые индексы. Оценка матрицы переходных вероятностей, характеризующей смену режимов финансового рынка, получена методом максимального правдоподобия [11] по выборке объемом $N = 100$ значений индекса ММВБ за период, предшествующий периоду инвестирования.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Оценки средней доходности на каждом k-м шаге ($k = 1,2,\ldots, T$) производятся методом простой скользящей средней с периодом, равным 13.

Операции «продажи без покрытия» не запрещены, $\gamma_i' = -0,6$, $\gamma_i''=3$, $i=1,\ldots,5$, $\gamma_0'=3$. Доходность эталонного портфеля $\mu_0=0,003$. Весовые коэффициенты $R=\mathrm{diag}(10^{-4},\ldots,10^{-4})$, $\rho(k,i)=1$. В начальный момент времени капитал ИП $V(0)=V_0(0)=1$, горизонт прогноза $m = 20$.

Рис. 1 иллюстрирует динамику доходностей рисковых финансовых активов (по оси абсцисс указаны номера временных интервалов, а по оси ординат – величины доходностей).

На рис. 2 показаны: изменение капитала $V_0(k)$ эталонного портфеля (линия *1*), изменение капитала управляемого портфеля $V(k)$ (линия *2*), (по оси абсцисс указаны номера временных интервалов, а по оси ординат – капиталы портфелей). На рис. 3 показана динамика капитала, вложенного в каждый рисковый финансовый актив: линия *1* – капитал $u_1(k)$, вложенный в акции ОАО «Сбербанк России», линия *2* – капитал $u_2(k)$, вложенный в акции ОАО «Газпром» (по оси абсцисс указаны номера временных интервалов, а по оси ординат – суммы вложений).

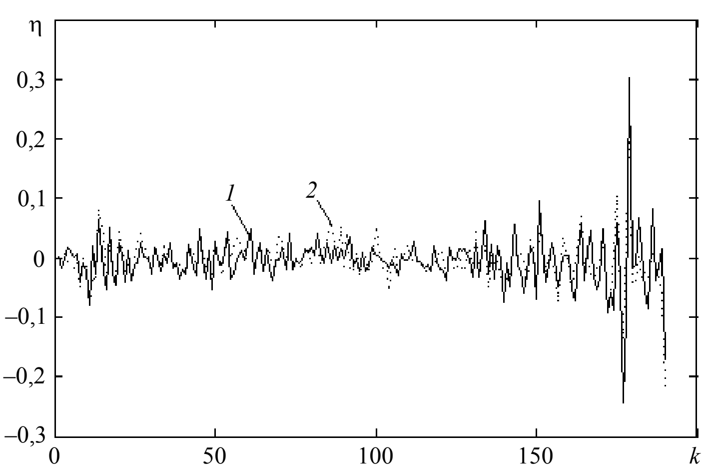

Рис. 1. Динамика доходностей рисковых активов (линия *1* – доходность акции ОАО «Сбербанк России», линия *2* – доходность акции ОАО «Газпром»)

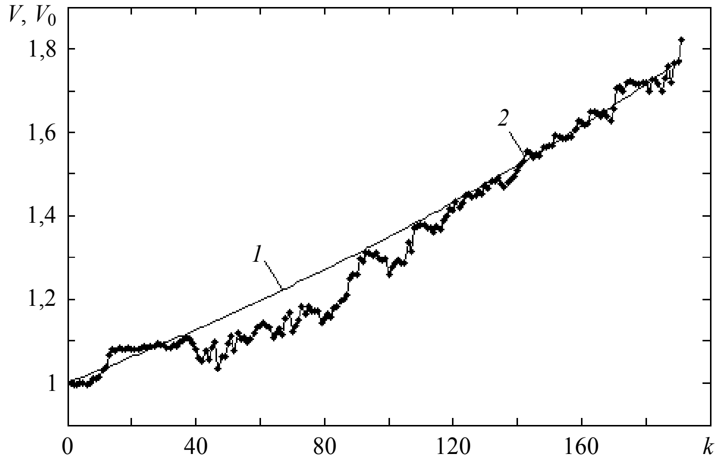

Рис. 2. Динамика портфеля (линия *1* – капитал эталонного портфеля, линия *2* – капитал управляемого портфеля)

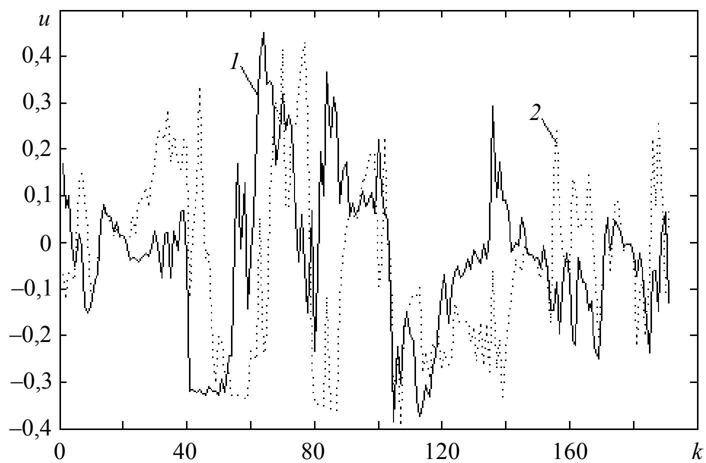

Рис. 3. Динамика управляющих воздействий (линия *1* – $u_1(k)$, линия *2* – $u_2(k)$)

Из рис. 2 видно, что капитал управляемого инвестиционного портфеля достаточно хорошо отслеживает рост капитала эталонного портфеля за счет перераспределения средств между рисковыми и безрисковыми вложениями с привлечением заемных средств.

Заключение

В работе предложен подход к управлению инвестиционным портфелем в дискретном времени на финансовом рынке с переключающимися режимами. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой доходностью. Структура ИП описывается разностным стохастическим уравнением со случайными параметрами, скачкообразно меняющимися в соответствии с эволюцией марковской цепи с конечным фазовым пространством состояний.

Синтезированы стратегии управления с прогнозирующей моделью при условии, что состояние марковской цепи не наблюдается, и с учетом явных ограничений на объемы торговых операций.

Численное моделирование подтверждает работоспособность и эффективность данного подхода к управлению ИП на реальном финансовом рынке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов Е.С.*, *Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем при случайном скачкообразном изменении волатильностей финансовых активов// АиТ. 2003. № 7. С. 77–86.
2. *Гальперин В.А.*, *Домбровский В.В.*, *Федосов Е.Н.* Динамическое управление инвестиционным портфелем на диффузионно-скачкообразном финансовом рынке с переключающимися режимами // АиТ. 2005. № 5. С. 175–189.
3. *Yin G.*, *Zhou X.Y.* Markowitz mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-time models to their continuous-time limits // IEEE Transactions Automat.Control. March 2004. V. 39. No. 3. P. 349–360.
4. *Bäuerle N.*, *Rieder U.* Portfolio optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. V. 49. No. 3. P. 442–447.
5. *Billio M.*, *Pelizzon L.* Value-at-Risk:a multivariate switching regime approach // J. Empirical Finance. 2000. No. 7. P. 531–554.
6. *Elliott R.J.*, *Van der Hoek J.* An Application of Hidden Markov Models to Asset Allocation Problems // Finance and Stochastics. 1997. No. 1. P. 229–238.
7. *Домбровский В.В.*, *Домбровский Д.В.*, *Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // АиТ. 2005. № 5. С. 84–97.
8. *Домбровский В.В.*, *Домбровский Д.В.*, *Ляшенко Е.А.* Управление с прогнозирующей моделью системами со случайными зависимыми параметрами при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // АиТ. 2006. № 12. С. 71–85.
9. *Rawlings J.* Tutorial: Model predictive control technology // Proc. Amer. Control Conf. San Diego. California. June 1999. P. 662–676.
10. *Aggoun L*, *Elliott R.J.* Measure Theory and Filtering. N.Y.: Cambridge University Press, 2004.
11. *Ли Ц.*, *Джадж Д.*, *Зельнер А.* Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М.: Статистика, 1997.

Домбровский Владимир Валентинович
Объедко Татьяна Юрьевна
Томский государственный университет
E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru; tani4kin@mail.ru

Поступила в редакцию 4 мая 2010 г.