

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.865

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОГО ВРЕМЕНИ
ДО РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ДВАЖДЫ
СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ¹

Найдена производящая функция условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат и малой нагрузке страховой премии.

Ключевые слова: *условное время до разорения, вероятность разорения, дважды стохастический поток, нагрузка страховой премии*

В [1] было получено выражение для вероятности разорения страховой компании на бесконечном временном интервале при дважды стохастическом потоке страховых выплат и малой нагрузке страховой премии. Однако более исчерпывающей характеристикой деятельности компании является распределение условного времени до ее разорения при условии, что разорение происходит [2]. Через распределение условного времени до разорения может быть выражена, в частности, вероятность разорения на конечном временном интервале. В настоящей работе находится распределение условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат и малой нагрузке страховой премии.

1. Математическая модель страховой компании

Как и в [1], будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$ [3]. Переход из состояния в состояние задаётся матрицей инфинитезимальных характеристик $Q = [q_{ij}]$ ранга $n-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$P_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j, \quad (1)$$

$$P_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

где $q_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = 0. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009 – 2010 годы), проект № 4761.

Обозначим $P_i(t) = P\{\lambda(t) = \lambda_i\}, i = \overline{1, n}$. Если управляющая цепь является неразложимой, то существуют финальные вероятности

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t),$$

которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n q_{ji} \pi_j = 0; \quad (3)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1. \quad (4)$$

Обозначим через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат в стационарном режиме

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i. \quad (5)$$

Будем считать далее, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и вторым моментом $M\{x^2\} = a_2$.

Наконец, в соответствии с классической моделью страховой компании [4] будем считать, что страховые премии поступают непрерывно во времени с постоянной скоростью c , так что за время Δt приращение капитала за счет страховых премий равно $c\Delta t$. Пусть $\bar{S}(t)$ – средний капитал компании в момент времени t . Как показано в [1], при $t \gg 1$

$$\bar{S}(t) = S(0) + (c - \lambda_0 a)t. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что при $t \gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$c = (1 + \theta)\lambda_0 a, \quad (7)$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разорвется. Параметр θ , как и в классической модели, – нагрузка страховой премии.

2. Производящие функции условного времени

Пусть $(\Omega, F, F = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ – вероятностное пространство, на котором определены траектории процесса $S(t)$ изменения капитала компании. Пусть в начальный момент времени капитал компании равен s и значение интенсивности $\lambda(t) = \lambda_i$. Разобьем все возможные траектории процесса $S(t)$, выходящие из этой точки на два класса: $\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_i(s)\}$ – траектории, приводящие к разорению, и $\{S_\omega(t), \omega \in \bar{\Omega}_i(s)\}$ – траектории, приводящие к выживанию. Пусть $t_i(s, \omega)$ – время до разорения на траектории, приводящей к разорению. Обозначим

$$\Phi_i(s, u) = \int_{\Omega_i(s)} e^{-ut_i(s, \omega)} P(d\omega) \quad (8)$$

$$\text{и пусть} \quad P_i(s) = \int_{\Omega_i(s)} P(d\omega) \quad (9)$$

– вероятность разорения на бесконечном интервале при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивность потока равна λ_i . Тогда

$$\varphi_i(s, u) \varphi_i(s, u) = \frac{\Phi_i(s, u)}{P_i(s)} \quad (10)$$

есть производящая функция моментов условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивность потока равна λ_i .

Функции $\Phi_i(s, u)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi_i(s, 0) = P_i(s), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_i(s, u) = 0, \quad (11)$$

второе из которых вытекает из того, что при $s \rightarrow \infty$ область интегрирования в (8) $\Omega_i(s) \rightarrow \emptyset$.

Пусть $F_i(t, s)$ – функция распределения условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивность потока равна λ_i . Если $P_i(s, t)$ – вероятность разорения страховой компании за время t , то

$$P_i(s, t) = F_i(s, t) P_i(s),$$

так как для разорения за время, не превосходящее t , компания должна разориться и время до разорения должно быть не больше чем t . Поэтому определение любой из вероятностей $P_i(s, t)$ или $F_i(t, s)$ определяет и вторую вероятность.

Для вывода уравнений, которым должны удовлетворять функции $\Phi_i(s, u)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. За время Δt капитал компании изменится на величину Δs и

$$t_i(s, \omega) = \Delta t + t_j(s, \omega), \quad (12)$$

где номер j соответствует значению интенсивности $\lambda(t)$ в момент времени $t + \Delta t$.

Усредняя соотношение (12), будем иметь

$$\Phi_i(s, u) = e^{-u\Delta t} M_{\Delta s, j} \{ \Phi_j(s + \Delta s, u) \}. \quad (13)$$

При принятой модели за время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1 - \lambda_i \Delta t)(1 + q_{ii} \Delta t) + o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется, страховые выплаты не производятся.
2. С вероятностью $\lambda_i \Delta t \psi(x) dx (1 + q_{ii} \Delta t) + o(\Delta t)$ интенсивность потока не меняется и производится случайная страховая выплата размера x .
3. С вероятностью $(1 - \lambda_i \Delta t) q_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ происходит изменение интенсивности потока с λ_i на λ_j , страховая выплата не производится.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим из (13)

$$\Phi_i(s, u) = e^{-u\Delta t} \left[(1 - (\lambda_i - q_{ii})\Delta t) \Phi_i(s + c\Delta t, u) + \lambda_i \Delta t \int_0^s \Phi_i(s + c\Delta t - x) \psi(x) dx + \right. \\ \left. + \lambda_i \Delta t \int_s^\infty \psi(x) dx + \sum_{i \neq j} q_{ij} \Delta t \Phi_j(s + c\Delta t, u) \right] + o(\Delta t),$$

где учтено, что при $s < 0$ $t_i(s, \omega) = 0$. Считая функции $\Phi_i(s, u)$ дифференцируемыми и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$c \frac{\partial \Phi_i(s, u)}{\partial s} = (\lambda_i + u) \Phi_i(s, u) - \sum_{j=1}^n q_{ij} \Phi_j(s, u) - \lambda_i \int_0^s \Phi_i(s - x, u) \psi(x) dx - \\ - \lambda_i \int_s^\infty \psi(x) dx. \quad (14)$$

Получить точное решение систем уравнений (14) не удастся. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (14) будем искать в виде

$$\Phi_i(s, u) = A(u, \theta) f_i\left(\frac{\theta s}{1 + \theta}, \frac{u}{\theta^2}, \theta\right), \quad (15)$$

где $A(u, \theta)$ и $f_i(z, u, \theta)$ – некоторые пока не определенные функции. В силу произвольности функции $A(u, \theta)$ можно считать, что

$$\sum_{i=1}^n \pi_i f_i(0, u, \theta) = 1. \quad (16)$$

Также будем считать, что функции $f_i(z, u, \theta)$ по крайней мере дважды дифференцируемы по z и равномерно непрерывны по u и θ , а также, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} A(\theta^2 u, \theta) \neq 0.$$

Подставляя (15) в уравнения (14) и сделав замену переменной $\frac{\theta}{1 + \theta} s = z$,

$\frac{u}{\theta^2} = v$ получим уравнения относительно функций $f_i(z, v, \theta)$

$$\lambda_0 \theta \dot{f}_i(z, v, \theta) = (\lambda_i + \theta^2 v) f_i(z, v, \theta) - \sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(z, v, \theta) - \\ - \lambda_i \int_0^\infty f_i\left(z - \frac{\theta}{1 + \theta} x, v, \theta\right) \psi(x) dx + r(\theta), \quad (17)$$

где

$$r(\theta) = \lambda_i \int_{\frac{z(1+\theta)}{\theta}}^\infty \Phi_i\left(\frac{z(1+\theta)}{\theta} - x, \theta^2 v\right) \psi(x) dx - \frac{\lambda_i}{A(\theta^2 v, \theta)} \int_{\frac{z(1+\theta)}{\theta}}^\infty \psi(x) dx. \quad (18)$$

Можно показать, что при сделанных предположениях $r(\theta) = o(\theta^2)$.

Обозначим

$$f_i(z, v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_i(z, v, \theta). \quad (19)$$

Переходя в (17) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} f_j(z, v) = 0. \quad (20)$$

Так как по условию $\text{Rang}[q_{ij}] = n-1$, то из сравнения систем уравнений (2) и (20) получаем, что

$$f_i(z, v) = f(z, v) \quad \forall i, \quad (21)$$

где $f(z, v)$ – неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде

$$f_i(z, v, \theta) = f(z, v) + B_i(z, v)\theta + o(\theta). \quad (22)$$

Подставляя разложения (22) в уравнения (17), раскладывая $f\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ и $B_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ , получим, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, что

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} B_j(z, v) = (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{f}(z, v). \quad (23)$$

Так как одновременно $\sum_{i=1}^n \pi_i q_{ij} = 0$ и $\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) = 0$, то система уравнений (23) совместна и имеет ранг $(n-1)$, как и система уравнений (3).

Пусть матрица $R = [R_{ij}] = [q_{ij}]^{-1}$, $i, j = \overline{1, n-1}$. Тогда решение системы (23) имеет вид [1]

$$B_k(z, v) = B_n(z, v) + \sum_{j=1}^{n-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a \dot{f}(z, v). \quad (24)$$

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде

$$f_i(z, v, \theta) = f(z, v) + B_i(z, v)\theta + C_i(z, v)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (25)$$

Подставляя разложения (25) в уравнения (17), раскладывая $f\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$, $B_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ и $C_i\left(z - \frac{\theta}{1+\theta}x, v\right)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ и учитывая (23),

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} C_j(z, v) - (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{B}_i(z, v) + \lambda_i \frac{a_2}{2} \ddot{f}(z, v) + \lambda_i a \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0. \quad (26)$$

Умножая соотношения (26) на π_i , суммируя и учитывая (4), будем иметь

$$-\sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \dot{B}_i(z, v) + \lambda_0 \frac{a_2}{2} \ddot{f}(z, v) + \lambda_0 a \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0. \quad (27)$$

Учитывая (24), из (27) получим

$$A_1 \ddot{f}(z, v) + A_2 \dot{f}(z, v) - v f(z, v) = 0, \quad (28)$$

$$\text{где} \quad A_1 = \frac{\lambda_0 a_2}{2} - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_0) \pi_i \sum_{j=1}^{n-1} R_{ij} (\lambda_j - \lambda_0), \quad A_2 = \lambda_0 a. \quad (29)$$

Откуда

$$f(z, v) = U_1(v) e^{X_1(v)z} + U_2(v) e^{X_2(v)z},$$

$$\text{где} \quad X_1(v) = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1}, \quad X_2(v) = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1} \quad (30)$$

– корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (28).

Будем считать, что $A_1 > 0$. Можно показать, что это условие выполняется по крайней мере при $n = 1, 3$. Так как $\Phi_i(s, u)/P_i(s)$ – производящая функция, то $|\Phi_i(s, u)/P_i(s)| \leq 1$. Реu и, следовательно, $\text{Re} v > 0$. Отсюда следует, что $f(z, v) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Поэтому $U_2(v) = 0$. Наконец, из условия (16) получаем, что $U_1(v) = 1$. Таким образом,

$$f(z, v) = e^{-\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1v}}{2A_1} z} \quad (31)$$

$$\text{и} \quad \Phi_i(s, u) = A(u, \theta) e^{X_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right) \frac{\theta}{1+\theta} s} + O(\theta). \quad (32)$$

При выводе соотношения (32) неявно предполагалось, что в уравнениях (14) $s \neq 0$. Для определения функции $A(u, \theta)$ рассмотрим теперь уравнения (14) при $s = 0$. Умножая уравнения системы (14) на π_i и складывая уравнения, при $s = 0$ будем иметь

$$c \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{\partial \Phi_i(0, u)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \pi_i (\lambda_i + u) \Phi_i(0, u) - \lambda_0. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражения (32), получим, что

$$A(u, \theta) = \lambda_0 \left[\lambda_0 + u - \lambda_0 a \theta X_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right) \right]^{-1}. \quad (34)$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$\Phi_i(s, u) = \lambda_0 \left[\lambda_0 + u - \lambda_0 a \theta X_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right) \right]^{-1} e^{X_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right) \frac{\theta}{1+\theta} s} + O(\theta). \quad (35)$$

Из соотношений (35) и (9) получаем теперь выражение для вероятностей разорения на бесконечном интервале:

$$P_i(s) = \left[1 + \frac{aA_2}{A_1} \theta \right]^{-1} e^{-\frac{\theta A_2}{(1+\theta)A_1} s} + O(\theta). \quad (36)$$

Пусть $n=1$ и $\psi(s) = \frac{1}{a} e^{-\frac{s}{a}}$ – показательное распределение. Так как при этом $A_1 = \lambda_0 a^2$, $A_2 = \lambda_0 a$, то выражение (32) принимает вид

$$P(s) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta s}{(1+\theta)a}}.$$

Построенная аппроксимация приводит, таким образом, в этом случае к истинной вероятности разорения [2].

Моменты условного времени до разорения определяются соотношениями

$$t_i^k(s) = \frac{(-1)^k}{P_i(s)} \frac{\partial^k \Phi_i(s, u)}{\partial u^k} \Big|_{u=0}. \quad (37)$$

Вычисляя производные, получим, что при $\theta \ll 1$ среднее значение условного времени

$$t_i^1(s) = \frac{s+a}{\lambda_0 a \theta} + O(1). \quad (38)$$

а дисперсия условного времени

$$D_i(s) = \frac{2A_1(s+a)}{\theta^3 A_2^3} + O(1). \quad (39)$$

Отметим, что выражение (38) является точным при $n=1$ и показательном распределении выплат [2].

3. Плотность распределения условного времени при нулевом начальном капитале

Из соотношений (35) и (36) вытекает, что производящая функция условного времени до разорения (10) при нулевом начальном капитале

$$\varphi_i(0, u) = \frac{1+2\alpha}{\lambda_0 \beta} \frac{1}{\chi + p + \sqrt{p}} + O(\theta),$$

где
$$p = \frac{u}{\lambda_0^2 \beta} + \frac{\alpha^2}{\lambda_0^2 \beta^2}, \quad \alpha = \frac{aA_2 \theta}{2A_1}, \quad \beta = \frac{a^2}{A_1}, \quad \chi = \frac{\lambda_0 (1+\alpha) \beta - \alpha^2}{\lambda_0^2 \beta^2}.$$

Плотность распределения условного времени до разорения при нулевом начальном капитале $g_i(t, 0)$ определится как обратное преобразование Лапласа от $\varphi_i(0, u)$. Или

$$g_i(t, 0) = \frac{\lambda_0^2 (1+2\alpha) \sqrt{\beta}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\lambda_0 \beta x + 2\alpha(t-x))^2}{4\beta(t-x)} - \lambda_0 x} dx + O(\theta). \quad (40)$$

При $n = 1$ и экспоненциальном распределении страховых выплат выражение (40) принимает вид

$$g(t, 0) = \frac{\lambda\sqrt{\lambda}(1+\theta)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\lambda x - \frac{\lambda(x+\theta(t-x))^2}{4(t-x)}} dx + O(\theta). \quad (41)$$

Истинная плотность распределения $p(t, 0)$ в случае экспоненциального распределения страховых выплат имеет вид [2]

$$p(t, 0) = \sqrt{1+\theta} e^{-\lambda(2+\theta)t} I_1 \left(2\lambda\sqrt{1+\theta}t \right),$$

где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого порядка. Зависимость плотностей распределения $g_i(t, 0)$ и $p(t, 0)$ от t приведена на рис. 1. Параметр $\theta = 0,5$.

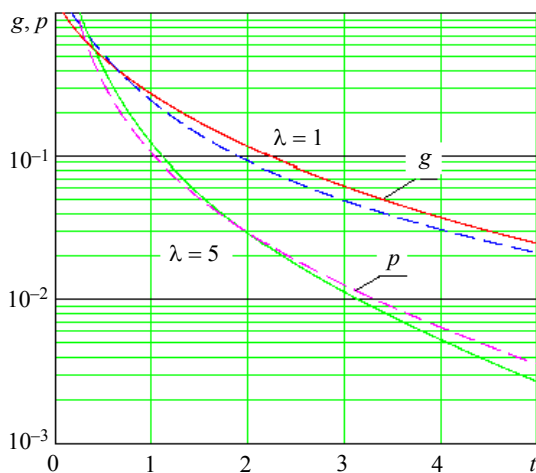


Рис. 1

4. Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале

Будем теперь считать, что при $\theta \rightarrow 0$ начальный капитал компании $s \rightarrow \infty$ согласованно с уменьшением θ . Более точно, будем считать, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta s(\theta) = \infty, \text{ но } \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{\frac{3}{2}} s(\theta) = 0. \text{ Обозначим}$$

$$m = \frac{1}{\theta A_2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2A_1}{A_2}}$$

и введем величину

$$z = \frac{t - ms}{\sigma\sqrt{s}}.$$

Производящая функция величины z

$$\varphi_{i,z}(u, s) = e^{\frac{m}{\sigma}\sqrt{su}} \varphi_i\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{s}}, s\right)$$

или

$$\varphi_{i,z}(u, z) = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{aA_2}{A_1}\theta\right) \exp\left\{\gamma u\sqrt{\theta s} + \frac{2\gamma^2\theta s}{1+\theta} + X_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{s}}\right) \frac{\theta s}{1+\theta}\right\}}{\lambda_0 + \frac{u}{\sigma\sqrt{s}} - \lambda_0 a\theta X_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{s}}\right)} + O(\theta). \quad (42)$$

Далее,

$$\begin{aligned} X_1\left(\frac{u}{\theta^2\sigma\sqrt{s}}\right) &= -\gamma^2 - \gamma^2 \sqrt{1 + 2\frac{u}{\gamma\sqrt{\theta s}}} = \\ &= -\gamma^2 \left[2 + \frac{u}{\gamma\sqrt{\theta s}} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{\gamma^2\theta s} + \frac{1}{2} \frac{u^3}{\gamma^3\theta s\sqrt{\theta s}} + o\left(\frac{1}{\theta s\sqrt{\theta s}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя разложение (43) в выражение (42) и переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi_{i,z}(u, s) = e^{\frac{u^2}{2}}.$$

Таким образом при $\theta \ll 1$ и $\theta s \gg 1$ случайная величина z имеет асимптотически нормальное распределение.

Заключение

В работе найдена производящая функция условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат и дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Предложенная методика может быть использована для анализа других моделей страхования при условии, что нагрузка страховой премии считается малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ливищ К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастическом потоке страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1 (10). С. 66–77.
2. Глухова Е.В., Змеев О.А., Ливищ К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во ТГУ, 2004. 180 с.
3. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. С. 67–73.
4. Panjer H.Y., Willmont G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.

Ливищ Климентий Исаакович

Томский государственный университет

Бублик Яна Сергеевна

Филиал Кемеровского государственного университета в г. Анжеро-Судженске

E-mail: kim47@mail.ru yana@asf.ru

Поступила в редакцию 7 июня 2010 г.