

УДК 537.874.6

А.Г. Дмитренко, С.А. Пономарева

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЙЯНИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ШАРОВОМ СЕГМЕНТЕ

Методом вспомогательных источников в резонансной частотной области решена задача электромагнитного рассеяния на идеально проводящем шаровом сегменте. Кратко описана разработанная компьютерная программа. Приведены результаты численных расчетов, характеризующие влияние радиуса и высоты шарового сегмента на бистатические сечения рассеяния.

Ключевые слова: метод вспомогательных источников, электромагнитное рассеяние, шаровой сегмент, сечения рассеяния.

Решение задачи электромагнитного рассеяния на идеально проводящей сфере хорошо известно [1]. Оно получено строгим методом (методом разделения переменных) и часто используется в качестве эталонного решения. Однако это нельзя сказать о задаче рассеяния на идеально проводящем шаровом сегменте. До настоящего времени в литературе отсутствуют результаты, касающиеся характеристик электромагнитного рассеяния таких сегментов. Это объясняется тем, что поверхность шарового сегмента не совпадает ни с одной из координатных поверхностей известных систем координат. Для решения задачи электромагнитного рассеяния на подобных телах могут быть применены только численные методы.

В настоящее время в распоряжении исследователей электромагнитных процессов имеется достаточно широкий набор численных методов [2]. Однако в последние годы для математического моделирования электромагнитного рассеяния на телах различной физической природы все большее распространение получает метод вспомогательных источников. Это объясняется идейной простотой метода, а также возможностью контроля точности полученного решения по критерию невязки граничных условий.

В данной статье один из вариантов метода вспомогательных источников, предложенный ранее в работах [3 – 4], использован для моделирования электромагнитного рассеяния на идеально проводящем шаровом сегменте. Даны математическая формулировка задачи и краткое описание возможностей разработанной компьютерной программы для расчета компонент рассеянного поля. Приведены результаты численных расчетов, характеризующие влияние радиуса и высоты шарового сегмента на бистатические сечения рассеяния.

1. Формулировка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. В однородной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_e и μ_e расположен идеально проводящий шаровой сегмент радиуса R и высоты h , ограниченный поверхностью S . Сегмент располагается в декартовой системе координат с центром в центре шара, частью которого он является, таким образом, что основание сегмента параллельно плоскости XU . Сегмент возбуждается стационарным электромагнитным полем

$\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется определить поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$, рассеянное этим телом.

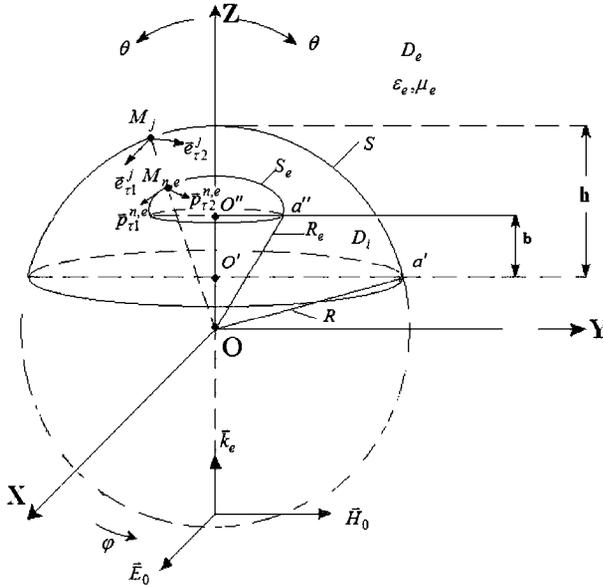


Рис. 1. Геометрия задачи

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\text{rot } \vec{E}_e = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \text{ rot } \vec{H}_e = -i\omega\varepsilon_e \vec{E}_e \text{ в } D_e; \quad (1)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_e = -\vec{n} \times \vec{E}_0 \text{ на } S; \quad (2)$$

$$\{\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e; \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e\} \times \vec{R} / R + \{\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e; -\sqrt{\varepsilon_e} \vec{E}_e\} = O(R^{-1}), R \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности сегмента S , $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторное произведение.

2. Модель рассеянного поля

Модель рассеянного поля строится следующим образом. Аналогично тому, как это сделано в работе [3], введем внутри рассеивающего сегмента вспомогательный сегмент с поверхностью S_e радиуса $K_e R$ ($K_e < 1$), основание которого расположено на расстоянии b от основания рассеивающего сегмента. Выберем на S_e конечную совокупность точек $\{M_{n,e}\}_{n=1}^N$, и в каждой точке $M_{n,e}$ разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами $\vec{p}_{\tau 1}^{n,e} = p_{\tau 1}^{n,e} \vec{e}_{\tau 1}^{n,e}$, $\vec{p}_{\tau 2}^{n,e} = p_{\tau 2}^{n,e} \vec{e}_{\tau 2}^{n,e}$, ориентированными вдоль единичных направлений $\vec{e}_{\tau 1}^{n,e}$, $\vec{e}_{\tau 2}^{n,e}$, выбранных в плоскости, касательной к S_e в точке $M_{n,e}$, и излучающих в однородную среду с параметрами ε_e, μ_e .

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\vec{E}_e, \vec{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\vec{E}_e(M) = \frac{i\omega}{k_e^2} \sum_{n=1}^N \text{rot rot } \vec{\Pi}_{n,e}, \quad \vec{H}_e(M) = \frac{1}{\mu_e} \sum_{n=1}^N \text{rot } \vec{\Pi}_{n,e},$$

$$\vec{\Pi}_{n,e} = \Psi_e(M, M_{n,e})(p_{\tau 1}^{n,e} \vec{e}_{\tau 1}^{n,e} + p_{\tau 2}^{n,e} \vec{e}_{\tau 2}^{n,e}), \quad M \in D_e. \quad (4)$$

Здесь $\Psi_e(M, M_{n,e}) = \exp\{ik_e R_{MM_{n,e}}\} / 4\pi R_{MM_{n,e}}$, $k_e = \omega(\varepsilon_e \mu_e)^{1/2}$, $R_{MM_{n,e}}$ – расстояние от точки $M_{n,e}$ на S_e до точки M в D_e ; $p_{\tau 1}^{n,e}$, $p_{\tau 2}^{n,e}$, $n = 1, 2, \dots, N$, – неизвестные постоянные (дипольные моменты); N – это число точек размещения диполей на вспомогательной поверхности S_e .

Поле (4) удовлетворяет уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3) в области D_e . Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать значения дипольных моментов $p_{\tau 1}^{n,e}$, $p_{\tau 2}^{n,e}$. Используем для этого метод коллокаций. Пусть M_j , $j = 1, 2, \dots, L$, – точки коллокации на поверхности сегмента S ; L – число точек коллокации. Тогда для определения неизвестных $p_{\tau 1}^{n,e}$, $p_{\tau 2}^{n,e}$ получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\vec{n}^j \times \vec{E}_e^j = -\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j, \quad j = 1, 2, \dots, L, \quad (5)$$

где \vec{n}^j , \vec{E}_e^j , \vec{E}_0^j – значения векторов нормали и электрических компонент рассеянного (4) и возбуждающего полей в точке j на поверхности рассеивателя S .

Решение системы (5) определяется путем минимизации функции

$$\Phi = \sum_{j=1}^L \left| \vec{n}^j \times (\vec{E}_e^j + \vec{E}_0^j) \right|^2. \quad (6)$$

После решения задачи минимизации (определения неизвестных дипольных моментов $p_{\tau 1}^{n,e}$, $p_{\tau 2}^{n,e}$, $n = 1, 2, \dots, N$) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из (4). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне имеем

$$E_{e,\theta}(M) = (\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\varphi}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2});$$

$$E_{e,\varphi}(M) = -(\mu_e / \varepsilon_e)^{1/2} H_{e,\theta}(M) = (\exp(ik_e R) / k_e R) D_\varphi(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \quad (7)$$

где компоненты диаграммы рассеяния $D_\theta(\theta, \varphi)$ и $D_\varphi(\theta, \varphi)$ определяются выражениями

$$D_\theta(\theta, \varphi) = \frac{i\omega k_e}{4\pi} \sum_{n=1}^N G_{n,e}(\theta, \varphi) \{ (\cos\theta \cos\varphi \cos\alpha_1^{n,e} + \cos\theta \sin\varphi \cos\beta_1^{n,e} - \sin\theta \cos\gamma_1^{n,e}) p_{\tau 1}^{n,e} +$$

$$+ (\cos\theta \cos\varphi \cos\alpha_2^{n,e} + \cos\theta \sin\varphi \cos\beta_2^{n,e} - \sin\theta \cos\gamma_2^{n,e}) p_{\tau 2}^{n,e} \},$$

$$D_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{iwk_e}{4\pi} \sum_{n=1}^N G_{n,e}(\theta, \varphi) \{ (-\sin \varphi \cos \alpha_1^{n,e} + \cos \varphi \cos \beta_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + (-\sin \varphi \cos \alpha_2^{n,e} + \cos \varphi \cos \beta_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e} \}; \quad (8)$$

$$G_{n,e}(\theta, \varphi) = \exp \{ -ik_e (\sin \theta \cos \varphi x_{n,e} + \sin \theta \sin \varphi y_{n,e} + \cos \theta z_{n,e}) \},$$

в которых $\cos \alpha_1^{n,e}, \cos \beta_1^{n,e}, \cos \gamma_1^{n,e}$ и $\cos \alpha_2^{n,e}, \cos \beta_2^{n,e}, \cos \gamma_2^{n,e}$ – направляющие косинусы единичных векторов $\vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$ и $\vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$; $x_{n,e}, y_{n,e}, z_{n,e}$ – декартовы координаты точки $M_{n,e}$; θ и φ – общепринятые угловые сферические координаты точки наблюдения M .

Контроль точности модели (4) осуществляется путем вычисления относительного значения функции (6) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации:

$$\Delta = (\Phi' / \Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{j=1}^{L'} |\vec{n}^j \times \vec{E}_0^j|^2, \quad (9)$$

где Φ' – значение функции (6) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек; L' – число промежуточных точек.

3. Численные результаты

На основании изложенной выше модели создана программа для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Входными величинами программы являются возбуждающее поле $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\}$, радиус R шарового сегмента, его высота h , а также параметры метода: K_e, b, N и L . Минимизация функции (6) осуществляется методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функции (6) на каждой из 10 последовательных итераций не превышает заданного значения 10^{-4} .

Разработанная программа использована для расчета бистатистических сечений рассеяния

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 (|E_{e,\theta}(\theta, \varphi)|^2 + |E_{e,\varphi}(\theta, \varphi)|^2) / |\vec{E}_0|^2 \quad (10)$$

различных шаровых сегментов с целью исследования влияния на эти характеристики радиуса и высоты сегмента.

Некоторые результаты представлены на рис. 2 – 5.

Рис. 2 и 3 характеризуют бистатистические сечения рассеяния шаровых сегментов радиуса $R = 0,8\lambda$, имеющих различную высоту h . Сегменты возбуждаются плоской волной единичной амплитуды, падающей вдоль оси Z , с вектором \vec{E}_0 , ориентированным вдоль оси X . Рис. 2 представляет сечения рассеяния в E -плоскости, рис. 3 – в H -плоскости. E -плоскость – это плоскость, в которой расположены векторы \vec{k}_e и \vec{E}_0 падающей волны (состоит из полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$); H -плоскость – плоскость, в которой расположены векторы \vec{k}_e и \vec{H}_0 (со-

стоит из полуплоскостей $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$). Так как диаграммы рассеяния в E и H -плоскостях симметричны относительно оси Z , приведены сечения рассеяния только в полуплоскостях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. По оси абсцисс отложены значения угла θ , по оси ординат – нормированные на квадрат длины волны значения сечения рассеяния, выраженные в децибелах. Кривые 1 на рис. 2 и 3 – это бистатистические сечения рассеяния полусферы ($h=R$), кривые 2 – бистатистические сечения сегмента высотой $h=0,8R$, кривые 3 – бистатистические сечения рассеяния сегмента высотой $h=0,6R$. При получении этих результатов параметр K_e , определяющий радиус вспомогательного сегмента, выбран равным 0,7, расстояние b между основаниями вспомогательного и рассеивающего сегментов выбран равным $0,2R$, число N точек расположения диполей на вспомогательном сегменте выбрано равным 150 (100 точек на боковой поверхности и 50 на основании), а число L точек коллокации на поверхности рассеивающего сегмента выбрано равным 300 (200 точек на боковой поверхности и 100 точек на основании).

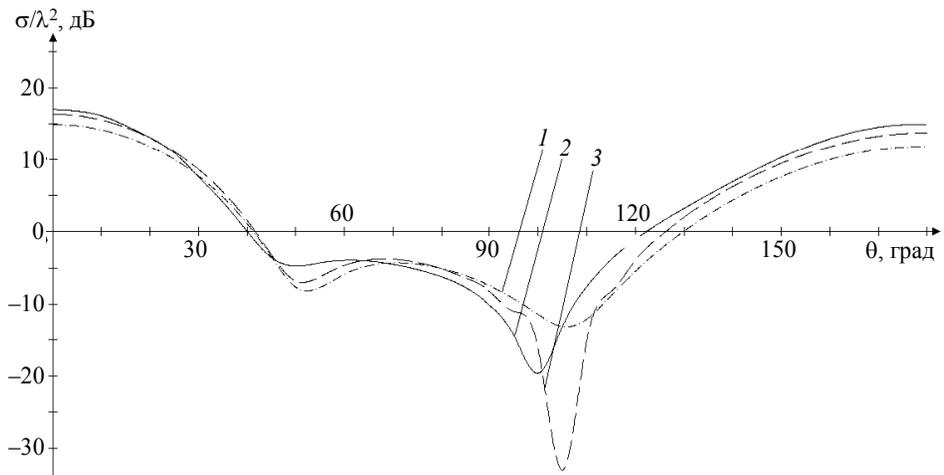


Рис. 2. Бистатистические сечения рассеяния в E -плоскости шаровых сегментов радиуса $R = 0,8\lambda$

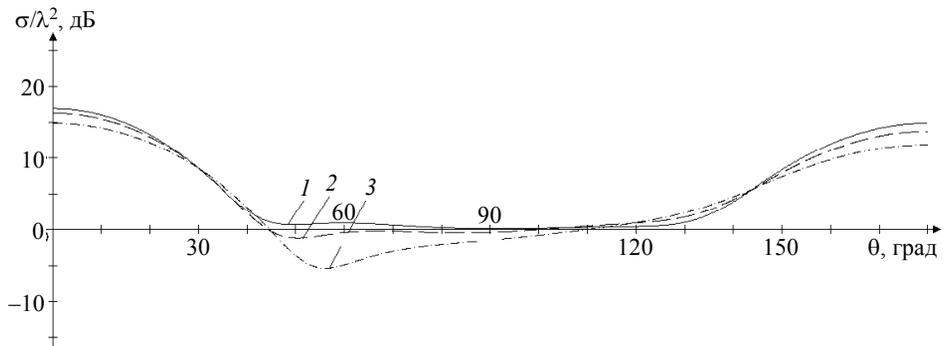


Рис. 3. Бистатистические сечения рассеяния в H -плоскости шаровых сегментов радиуса $R = 0,8\lambda$

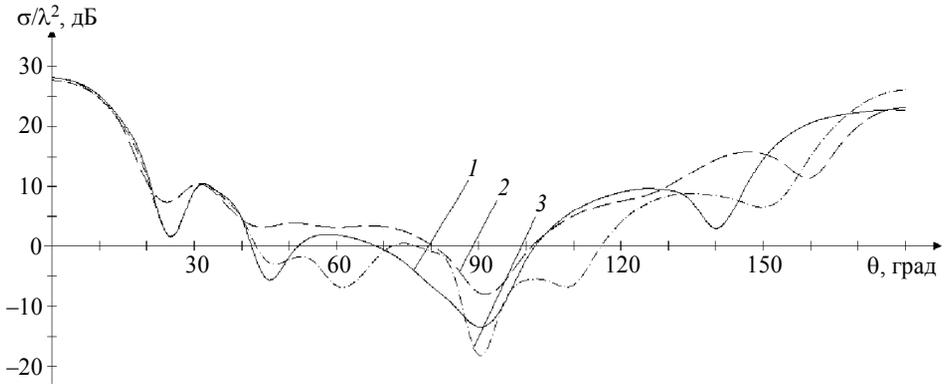


Рис. 4. Бистатические сечения рассеяния в E -плоскости шаровых сегментов радиуса $R = 1,6\lambda$.

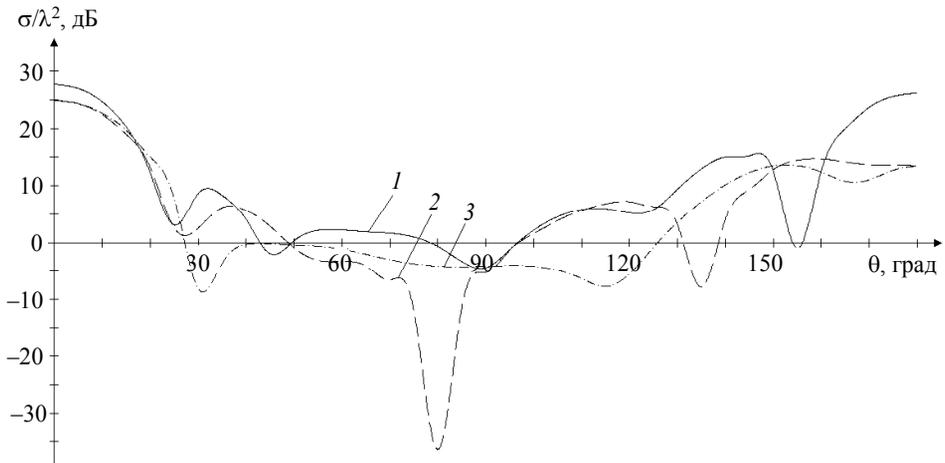


Рис. 5. Бистатические сечения рассеяния в H -плоскости шаровых сегментов радиуса $R = 1,6\lambda$.

На рис. 4 и 5 представлены аналогичные результаты для шаровых сегментов радиуса $R = 1,6\lambda$. Кривые 1 на этих рисунках – бистатические сечения рассеяния полусферы ($h=R$), кривые 2 – бистатические сечения сегмента высотой $h=0,8R$, кривые 3 – бистатические сечения рассеяния сегмента высотой $h=0,5R$. Параметры метода выбраны такими же, как при получении результатов, представленных на рис. 2 и 3.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. В направлениях, прилегающих к направлению прямого рассеяния ($\theta = 0^\circ$), сечения рассеяния в наименьшей степени зависят от высоты шарового сегмента, при этом имеет место тенденция увеличения сечения рассеяния при увеличении радиуса сегмента. Для сегментов радиусом $R \sim \lambda$ сечения рассеяния в боковых направлениях ($40^\circ < \theta < 120^\circ$) существенно меньше, чем в направлениях, прилегающих к направлениям прямого и обратного рассеяния. При дальнейшем увеличении радиуса сегмента характер диаграмм рассеяния существенно усложняется и предсказать

величину рассеяния и его зависимость от высоты шарового сегмента без проведения расчетов затруднительно.

Заключение

Таким образом, в данной работе методом вспомогательных источников построен численный алгоритм решения задачи электромагнитного рассеяния на идеально проводящем шаровом сегменте. Алгоритм реализован как компьютерная программа для расчета компонент рассеянного поля. Приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие влияние радиуса и высоты шарового сегмента на бистатистические сечения рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
2. Kahnert F.M. Numerical methods in electromagnetic scattering theory // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2003. V. 79–80. P. 775–824.
3. Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И. Об одной модификации метода неортогональных рядов для решения задачи электромагнитного рассеяния на произвольных гладких идеально проводящих телах // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. № 3. С. 449–455.
4. Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И. К развитию одного численного метода решения трехмерных векторных задач рассеяния // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 2. С. 438–441.

Дмитренко Анатолий Григорьевич
Пономарева Светлана Александровна
Томский государственный университет
E-mail: dmitr@fpmk.tsu.ru st5114@mail.ru

Поступила в редакцию 4 июня 2010 г.