ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.865

У.В. Андреева, Н.С. Демин

ЭКЗОТИЧЕСКИЙ ОПЦИОН ПРОДАЖИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ВЫПЛАТЫ ПО ОПЦИОНУ И НАЛИЧИЕМ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ ПО РИСКОВОМУ АКТИВУ

В данной работе приводится решение задачи хеджирования для одного вида экзотических опционов продажи европейского типа с ограничением выплаты по опциону и наличием выплаты дивидендов по рисковому активу. Получены формулы, определяющие стоимость опциона, портфель (хеджирующую стратегию) и соответствующий ему капитал. Рассматриваются свойства решения.

Ключевые слова: *финансовый рынок*, *опцион*, *платежная функция*, *капитал*, *портфель*, *хеджирование.*

Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по оговоренной цене, а продавец за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению [1 – 4]. В первом случае имеем опцион купли (call option), а во втором – опцион продажи (put option). Если платежные обязательства характеризуются только ценой базисного актива в фиксированный момент исполнения опциона (спотовая цена – sport price) и ценой исполнения контракта (страйковая цена – striking price), то такие опционы являются стандартными опционами европейского типа. Развитие рынка опционных контрактов потребовало более сложных платежных обязательств, учитывающих как желание эмитента ограничить выплаты по опционам, так и желание покупателя опциона иметь гарантированный доход. Платежные функции с дополнительными условиями породили класс экзотических опционов (exotic options) [5-7]. В обзорной работе [5], написанной по материалам иностранной научной печати, отмечается, что хотя на западных финансовых рынках, особенно на внебиржевых, в настоящее время имеют хождение несколько десятков экзотических опционов, теория этих опционов является малоразработанной и контракты по ним заключаются на основе эвристических соображений и опыта работы дилеров с корректировкой классических формул Блэка – Шоулса [8] и Кокса – Росса – Рубинштейна [9], определяющих цены стандартных опционов соответственно в диффузионной и биномиальной моделях. В данной работе рассматривается опцион продажи на диффузионном (B,S)-рынке с ограничением выплат, который дает преимущество продавцу опциона.

Используемые обозначения

$\boldsymbol{P}\{.\}$ – вероятность события; $E\{.\}$ – математическое ожидание; $N\{a;b\}$ – нормальная (гауссовская) плотность с параметрами a и b; a^{+}=max$\{a;0\}$;

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy\,,\ \varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}. \qquad (1)$$

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega,F,\boldsymbol{F}=(F_t)_{t\geq 0},\boldsymbol{P})$ [1 – 3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение фиксированного интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями [1 – 3]

$$dS_t=S_t(\mu dt+\sigma dW_t)\,,\ dB_t=rB_t dt\,, \qquad (2)$$

где первое уравнение есть стохастическое дифференциальное уравнение Ито, W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma>0,\ r>0,\ \mu\in R=(-\infty,+\infty),\ S_0>0,\ B_0>0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu)=S_0\exp\left\{(\mu-(\sigma^2/2))t+\sigma W_t\right\}\ ,\ B_t=B_0\exp\{rt\}\,. \qquad (3)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде

$$X_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t\,, \qquad (4)$$

где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ есть пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора (стратегию инвестирования). Аналогично [10] предполагается, что за обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом δ, таким, что $0\leq\delta<r$, т.е. $dD_t=\delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+dD_t\,.$$

Так как

$$dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t\,,$$

то $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=0$ в стандартной задаче [1 – 3]. Тогда из (2) и (4) следует, что капитал определяется уравнением

$$dX_t=rX_t dt+\sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}\,,$$

где согласно теореме Гирсанова [1 – 3] процесс $W_t^{\mu-r+\delta}=W_t+((\mu-r+\delta)/\sigma)t$ является винеровским относительно меры $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$, такой, что

$$d\boldsymbol{P}_t^{\mu-r+\delta}=Z_t^{\mu-r+\delta}d\boldsymbol{P}_t\,; \qquad (5)$$

$$Z_t^{\mu-r+\delta}=\exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \qquad (6)$$

Так как $\mathrm{Law}(W^{\mu-r+\delta} \,|\, \boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}) = \mathrm{Law}(W \,|\, \boldsymbol{P})$, то [1, 2]

$$\mathrm{Law}\left(S_0 \exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t^{\mu-r+\delta}\right\}; t\le T \,\Big|\, \boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}\right) =$$
$$= \mathrm{Law}\left(S_0 \exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t\right\}; t\le T \,\Big|\, \boldsymbol{P}\right).$$

Таким образом, $\mathrm{Law}\left(S(\mu,r,\delta) \,\middle|\, \boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}\right) = \mathrm{Law}(S(r,\delta) \,|\, \boldsymbol{P})$, т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(\mu,r,\delta) = S_t(\mu,r,\delta)\left((r-\delta)dt+\sigma dW_t^{\mu-r+\delta}\right), \tag{7}$$

относительно $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)\left((r-\delta)dt+\sigma dW_t\right), \tag{8}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$. Это означает, что мера $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$, определяемая в виде (5), (6), является рискнейтральной (мартингальной) мерой [1 – 4].

Ставится задача: таким образом управлять капиталом, т.е. сформировать портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$, чтобы соответствующий ему капитал $X_t^* = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t$ обеспечил выполнение платежного обязательства $X_T^* = f_T$ относительно платежной функции

$$f_T = f_T^{\min}(S_T) = \min\left\{(K_1 - S_T)^+, K_2\right\}, \tag{9}$$

где $K_1 > K_2 > 0$, а также найти стоимость опциона $P_T^{\min} = X_0^{\min}$ и рассмотреть ее свойства.

Согласно платежному обязательству (9), если $S_T < K_1$, то продавец опциона получает выплату в размере $\Delta = K_1 - S_T$, если $S_T > K_1 - K_2$, и в размере $\Delta = K_2$, если $S_T \le K_1 - K_2$.

Замечание 1. Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором – к уменьшению цены опциона относительно стандартного опциона с платежной функцией $f_T(S_T) = (K_1 - S_T)^+$. Очевидно, что опционы с платежной функцией $f_T^{\min}(S_T)$ соответствуют платежным обязательствам в пользу продавца опциона, так как ограничивают выплату величиной K_2.

2. Основные результаты

Далее всюду

$$z_0(t) = \frac{\ln\dfrac{K_1}{S_t} - (r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad z_1(t) = \frac{\ln\dfrac{K_1-K_2}{S_t} - (r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_2(t)=\frac{\ln\frac{K_1}{S_t}-(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad z_3(t)=\frac{\ln\frac{K_1-K_2}{S_t}-(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\qquad(10)$$

а z_0,z_1,z_2,z_3 определяются формулами (10) при t=0.

Теорема 1. Для опциона продажи с платежной функцией вида (9) стоимость опциона $P_T^{\min}$, капитал $X_t^{\min}$ и портфель $\pi_t^{\min}=(\gamma_t^{\min},\beta_t^{\min})$ определяются формулами

$$P_T^{\min}=K_1e^{-rT}[\Phi(z_0)-\Phi(z_1)]+K_2e^{-rT}\Phi(z_1)-S_0e^{-\delta T}[\Phi(z_2)-\Phi(z_3)];\qquad(11)$$

$$X_t^{\min}=K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(z_0(t))-\Phi(z_1(t))]+$$
$$+K_2e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t))-S_te^{-\delta(T-t)}[\Phi(z_2(t))-\Phi(z_3(t))];\qquad(12)$$

$$\gamma_t^{\min}=-e^{-\delta(T-t)}[\Phi(z_2(t))-\Phi(z_3(t))];\qquad(13)$$

$$\beta_t^{\min}=(K_1/B_t)e^{-r(T-t)}[\Phi(z_0(t))-\Phi(z_1(t))]+(K_2/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)).\qquad(14)$$

Доказательство. Согласно общей теории платежных обязательств, на полных безарбитражных рынках [1 – 3]

$$X_t^{\min}=e^{-r(T-t)}E^*\{f_T\,|F_t\},\ \gamma_t^{\min}=\left.\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial s}\right|_{s=S_t},\ \beta_t^{\min}=\frac{X_t^{\min}-\gamma_t^{\min}S_t}{B_t},\qquad(15)$$

где E^* усреднение по рискнейтральной (мартингальной) мере $\boldsymbol{P}^*$, а $P_T^{\min}=X_0^{\min}$. Так как, согласно (5) и (6), $\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$, то с учетом (3), (6) и (9),

$$X_t^{\min}=e^{-r(T-t)}E^*\left\{\min\left\{(K_1-S_T)^+,K_2\right\}|F_t\right\}=e^{-r(T-t)}E\left\{Z_{T-t}^{\mu-r+\delta}\min\{(K_1-S_T)^+,K_2\}|F_t\right\}=$$
$$=e^{-r(T-t)}E\left\{\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)[W_T-W_t]-\frac{(T-t)}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\min\left\{\left(K_1-S_t\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma[W_T-W_t]\right\}\right)^+,K_2\right\}|S_t\right\}.$$

Так как $\xi(T,t)=[W_T-W_t]\sim N\{0;T-t\}$, то

$$X_t^{\min}=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T-t}-\frac{(T-t)}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\min\left\{\left(K_1-S_t\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma x\sqrt{T-t}\right\}\right)^+,K_2\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx=$$
$$=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\alpha x-\frac{\alpha^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\times$$
$$\times\min\left\{\left(K_1-S_t\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,(x+\alpha)\right\}\right)^+,K_2\right\}dx,$$

где $\alpha=[(\mu-r+\delta)/\sigma]\sqrt{T-t}$. Делая замену переменных $z=x+\alpha$, получаем

$$X_t^{\min} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \min\left\{\left(K_1 - S_t \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\right\}\right)^+, K_2\right\} dz\,. \quad (16)$$

Очевидно, что

$$\min\left\{\left(K_1 - S_t \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\right\}\right)^+, K_2\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } K_1 - S_t \exp\{\cdot\} < 0; \\ K_1 - S_t \exp\{\cdot\}, \text{если } 0 < K_1 - S_t \exp\{\cdot\} < K_2; \\ K_2, \text{если } K_1 - S_t \exp\{\cdot\} \ge K_2. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда из (16) и (17) следует, что

$$X_t^{\min} = \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{z_0(t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1(t)} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz -$$

$$-\frac{S_t e^{-\delta(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1(t)}^{z_0(t)} \exp\left\{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}\right\} dz\,, \quad (18)$$

где $z_0(t)$ и $z_1(t)$ являются корнями соответственно уравнений

$$S_t \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\right\} = K_1,$$

$$S_t \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + z\sigma\sqrt{T-t}\right\} = K_1 - K_2$$

и имеют вид (10). Замена переменных $x = z - \sigma\sqrt{T-t}$ в третьем интеграле в (18) с учетом того, что $z_0(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_2(t)$, $z_1(t) - \sigma\sqrt{T-t} = z_3(t)$, а также свойств

$$\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_a^b \exp\left\{-x^2/2\right\} dx = \Phi(b) - \Phi(a)\,,\ \Phi(x) + \Phi(-x) = 1\,,\ \Phi(\infty) = 1\,, \quad (19)$$

приводит к (12), а (11) следует из того, что $P_T^{\min} = X_0^{\min}$ [1-3].

Так как

$$\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} b^2(s)\right\} \frac{\partial b(s)}{\partial s},\quad \frac{\partial\Phi(-b(s))}{\partial s} = -\frac{\partial\Phi(b(s))}{\partial s}, \quad (20)$$

то дифференцирование (12) по s с учетом (20) дает, что

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial s} = -e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi(z_2(t)) - \Phi(z_3(t))\right] + \psi\,; \quad (21)$$

$$\psi = \psi_1 - \psi_2\,; \quad (22)$$

$$\psi_1 = K_1 e^{-r(T-t)} \frac{\partial\Phi(z_0(t))}{\partial s} - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial\Phi(z_2(t))}{\partial s}; \quad (23)$$

$$\psi_2 = (K_1 - K_2) e^{-r(T-t)} \frac{\partial\Phi(z_1(t))}{\partial s} - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial\Phi(z_3(t))}{\partial s}\,. \quad (24)$$

Использование (20) с учетом (10) дает, что

$$\frac{\partial\Phi(z_i(t))}{\partial s}=-\frac{\exp\left\{-z_i^2(t)/2\right\}}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\,,\ i=\overline{0;3}\,. \tag{25}$$

Так как, согласно (10), $z_2(t)=z_0(t)-\sigma\sqrt{T-t}$, $z_3(t)=z_1(t)-\sigma\sqrt{T-t}$, то из (25) следует, что

$$\frac{\partial\Phi(z_2(t))}{\partial s}=-\frac{K_1}{s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{z_0^2(t)}{2}\right\}\exp\{-(r-\delta)(T-t)\}\,,$$

$$\frac{\partial\Phi(z_3(t))}{\partial s}=-\frac{(K_1-K_2)}{s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{z_1^2(t)}{2}\right\}\exp\{-(r-\delta)(T-t\}\,. \tag{26}$$

Использование (25) и (26) в (23) и (24) дает, что $\psi_1=0$ и $\psi_2=0$, т.е. согласно (22) $\psi=0$. Тогда (13) следует из (15) и (21), а (14) – из (15), (12) и (13). Теорема 1 доказана.

3. Свойства

Пусть по определению $\left(P_T^{\min}\right)^{\alpha}=\partial P_T^{\min}/\partial\alpha$ есть коэффициент чувствительности, определяющий зависимость стоимости опциона от параметра α.

Теорема 2. Коэффициенты чувствительности, определяющие зависимость стоимости опциона от начальной цены S_0 базисного актива, от цены исполнения опциона K_1 и от величины K_2, ограничивающей выплаты по опциону, определяются формулами

$$\left(P_T^{\min}\right)^{S_0}=-e^{-\delta T}\left[\Phi(z_2)-\Phi(z_3)\right],$$

$$\left(P_T^{\min}\right)^{K_1}=e^{-rT}\left[\Phi(z_0)-\Phi(z_1)\right],\ \left(P_T^{\min}\right)^{K_2}=e^{-rT}\Phi(z_1)\,, \tag{27}$$

и при этом

$$\left(P_T^{\min}\right)^{S_0}<0\,,\ \left(P_T^{\min}\right)^{K_1}>0\,,\ \left(P_T^{\min}\right)^{K_2}>0\,, \tag{28}$$

т.е. по K_1 и K_2 стоимость опциона является возрастающей, а по S_0 – убывающей функцией.

Формулы (27) следуют из (11) в результате дифференцирования по S_0, K_1 и K_2 с использованием (10), (20), (25) и (26), а свойства (28) следуют очевидным образом из (27) с учетом того, что $\Phi(x)>0$, $\varphi(y)>0$ (см. (1)), функция $\Phi(x)$ является монотонно возрастающей от $\Phi(-\infty)=0$ до $\Phi(+\infty)=1$ со свойством $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, а $z_0>z_1$ и $z_2>z_3$.

Экономическая интерпретация свойств (28) заключается в следующем. Убывание стоимости опциона с возрастанием начальной цены базисного актива S_0 объясняется тем, что при этом в среднем возрастает S_T, что приводит к увеличению вероятности не предъявления опциона к исполнению, а за увеличение риска следует меньше платить. Поскольку при увеличении K_1 увеличивается вероятность предъявления опциона к исполнению и величина выплаты, то этим объясняется увеличение цены опциона, так как за увеличение дохода и уменьшение риска следует больше платить. Увеличением дохода объясняется и рост цены опциона с ростом K_2.

Замечание 2. Из (9) следует, что

$$\lim_{K_2 \to K_1} f_T^{\min}(S_T) = f_T(S_T) = (K_1 - S_T)^+, \tag{29}$$

где $f_T(S_T)$ есть платежная функция стандартного опциона продажи [1 – 4].

Следствие 1. Пусть $P_T, X_t, \gamma_t, \beta_t$ есть пределы $P_T^{\min}, X_t^{\min}, \gamma_t^{\min}, \beta_t^{\min}$ при $K_2 \to K_1$. Тогда

$$P_T = K_1 e^{-rT}\Phi(z_0) - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_2); \tag{30}$$

$$X_t = K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(z_0(t)) - S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_2(t)); \tag{31}$$

$$\gamma_t = -e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_2(t)),\ \beta_t = (K_1/B_t)e^{-r(T-t)}\Phi(z_0(t)). \tag{32}$$

Так как $z_1 = z_3 = -\infty$ при $K_2 = K_1$, а $\Phi(-\infty) = 0$, то формулы (30) – (32) следуют из (11) – (14). Данный результат представляет собой полное решение задачи хеджирования для стандартного опциона продажи при наличии выплат дивидендов. В случае $\delta = 0$, когда выплаты дивидендов отсутствуют, формула (30) переходит в формулу Блэка – Шоулса для опциона продажи [8].

Следствие 2. Величина $\Delta P_T = P_T - P_T^{\min}$, равная разности между стоимостью стандартного опциона продажи P_T и стоимостью экзотического опциона продажи $P_T^{\min}$, определяется формулой

$$\Delta P_T = (K_1 - K_2)e^{-rT}\Phi(z_1) - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_3) \tag{33}$$

и при этом

$$\Delta P_T > 0,\ P_T > P_T^{\min}, \tag{34}$$

т.е. стоимость стандартного опциона больше стоимости экзотического опциона.

Формула (33) следует из (11), (30). Свойство $P_T > P_T^{\min}$ следует из того, что согласно (28), $P_T^{\min}$ является возрастающей функцией K_2 и при этом, согласно следствию 1, $\lim P_T^{\min} = P_T$ при $K_2 \uparrow K_1$.

Экономическая интерпретация свойства (34) заключается в следующем. Поскольку в случае стандартных опционов с платежной функцией вида (29) отсутствуют ограничения на величину выплаты по опциону, то $P_T^{\min} < P_T$, так как за наличие ограничений, уменьшающих величину возможного дохода, следует меньше платить.

На рис. 1 представлены зависимости $P_T^{\min}$ и P_T от коэффициента волатильности σ, вычисленные при $K_1 = S_0 = 1$, $r = 0{,}05$, $T = 5$, $\delta = 0{,}01$, $K_2 = K_2^1 = 0{,}1$, $K_2 = K_2^2 = 0{,}4$, $K_2 = K_2^3 = 0{,}7$. Взаимное расположение кривых отражает свойство (34) относительно K_2, а также свойство $P_T^{\min} \to P_T$ при $K_2 \uparrow K_1$. Проведенные вычисления также подтвердили свойства возрастания стоимости опциона по K_1 и убывания по S_0, т.е. свойства (28) относительно S_0 и K_1.

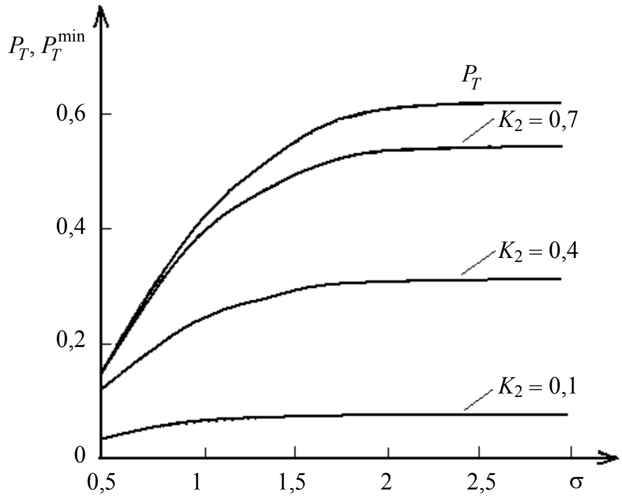

Рис. 1. Зависимость $P_T^{\min}$ при различных значениях K_2 и P_T от σ

Согласно [1, 2], отрицательные значения составляющих минимального портфеля (минимального хеджа) $\pi_t^* = (\gamma_t^*, \beta_t^*)$, капитал которого (см. (4)) $X_t^* = \beta_t^* B_t + \gamma_t^* S_t$ обеспечивает выполнение платежного обязательства $X_T^* = f_T$, означают взятие соответствующего актива в долг, причем в соответствии с принципом безарбитражности в долг оба актива одновременно не могут браться. Анализ формул (13), (14) и (32) дает

$$\gamma_t^{\min} < 0,\ \gamma_t < 0,\ \beta_t^{\min} > 0,\ \beta_t > 0. \tag{35}$$

Таким образом, для опционов продажи акции берутся в долг и являются пассивом, а банковский счет в долг браться не может и является активом капитала $X_t^{\min}$. Тогда из (4) следует

$$\beta_T^{\min} B_T = X_T^{\min} + \left|\gamma_T^{\min}\right| S_T = f_T^{\min} + \left|\gamma_T^{\min}\right| S_T. \tag{36}$$

Следовательно, в момент T предъявления экзотического опциона продажи с платежной функцией (9) к исполнению капитал $\beta_T^{\min} B_T$, содержащийся на банковском счете, расходуется на выплату по опциону, равную $f_T^{\min}$, и на возврат акционного долга, равного $\left|\gamma_T^{\min}\right| S_T$. Согласно (35), подобным свойством обладает и стандартный опцион продажи.

Заключение

Проведено исследование одного вида экзотических опционов продажи с ограничением выплат для продавца опциона в диффузионной модели (B,S) – финансового рынка при наличии выплаты дивидендов по рисковым активам. Получены формулы, определяющие стоимость опциона, а также эволюцию во времени капитала и портфеля (теорема 1). Исследованы зависимости цены опциона от начальной цены базисного актива, от цены исполнения и от величины, ограничивающей выплаты (теорема 2). Исследована связь между решениями задач для экзотического и стандартного опционов (следствия 1, 2). Дана содержательная интерпретация свойств решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80–129.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. 1017 с.
3. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001. 253 с.
4. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
5. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. 2002. № 15. С. 53–57; № 16. С. 61–64; № 17. С. 68–73.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance working paper. 1991. Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991. No. 220. 43 p.
7. *Zhang P.G.* An introduction to exotic options // Europ. Financial Manag. 1995. V. 1. No. 1. P. 87–95.
8. *Black F.*, *Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy. 1973. V. 81. No. 3. P. 637–659.
9. *Cox J.C.*, *Ross R.A.*, *Rubinstein M.* Option pricing: a simplified approach // J. Financial Economics. 1979. V. 7. No. 3. P. 229–263.
10. *Шепп Л.А.*, *Ширяев А.Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 130–148.

Андреева Ульяна Викторовна
Демин Николай Серапионович
Томский государственный университет
E-mail: egi@sibmail.com dyomin@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 10 апреля 2010 г.