УДК 519.2

Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков

ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ARCH(p)[1]

Предложена последовательная процедура оценивания параметров процесса ARCH(p), основанная на методе наименьших квадратов. Выбор весовых коэффициентов и правила остановки гарантирует точность оценивания. Исследованы асимптотические свойства оценки. Работоспособность процедуры подтверждена численным моделированием.

Ключевые слова: *процесс ARCH(p), метод наименьших квадратов, гарантированное оценивание.*

Процессы с условной неоднородностью (ARCH- и GARCH-модели) находят широкое применение при обработке эконометрических данных, например при описании волатильности финансовых индексов. Задача оценивания параметров таких моделей является сложной задачей, поскольку эти процессы являются существенно нелинейными. Особый интерес представляет построение оценок, обладающих гарантированным среднеквадратическим уклонением. Возможность построения таких оценок появляется при переходе к последовательным планам оценивания. В данной работе предлагается метод получения оценок неизвестных параметров процесса ARCH(p) и исследуются их асимптотические свойства.

1. Постановка задачи

Рассматривается случайный процесс ARCH(p)

$$x_l = \sigma_l \varepsilon_l;$$
$$\sigma_l^2 = \lambda_0 + \lambda_1 x_{l-1}^2 + \ldots + \lambda_p x_{l-p}^2. \qquad (1)$$

Здесь $\{\varepsilon_l\}_{l\geq 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Параметры $\Lambda = [\lambda_0, \ldots, \lambda_p]$ неизвестны. Ставится задача по наблюдениям за процессом $\{x_l\}$ оценить вектор неизвестных параметров Λ с гарантированной точностью.

2. Последовательная оценка параметров

Для процесса (1) при $p = 1$ в [1] была предложена гарантированная последовательная процедура гарантированного оценивания параметров, основанная на идее, предложенной в [2] для классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией. Модифицируем процедуру для процесса произвольного порядка. Представим процесс (1) в виде

$$x_l^2 = \sigma_l^2 + \sigma_l^2(\varepsilon_l^2 - 1).$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-08-00595-а.

Введем обозначения $B^2 = M(\varepsilon_l^2 - 1)^2$, $\eta_l = (\varepsilon_l^2 - 1)/B$ и, учитывая (1), получим

$$x_l^2 = \lambda_0 + \lambda_1 x_{l-1}^2 + \ldots + \lambda_p x_{l-p}^2 + \left(\lambda_0 + \lambda_1 x_{l-1}^2 + \ldots + \lambda_p x_{l-p}^2\right) B\eta_l. \qquad (2)$$

Здесь $\{\eta_l\}_{l\ge 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\eta_l = 0$, $M\eta_l^2 = 1$. Процесс (2) является процессом авторегрессии первого порядка, дисперсия шумов которого $\left(\lambda_0 + \lambda_1 x_{l-1}^2 + \ldots + \lambda_p x_{l-p}^2\right)^2 B^2$ неизвестна и, более того, не ограничена сверху. Преобразуем далее процесс (2). Введем обозначения

$$y_{l-1}^2 = \max\left\{1, x_{l-1}^2, \ldots, x_{l-p}^2\right\}, \quad z_l = \frac{x_l^2}{y_{l-1}^2}, \quad a_{l-1} = \left[\frac{1}{y_{l-1}^2}, \frac{x_{l-1}^2}{y_{l-1}^2}, \ldots, \frac{x_{l-p}^2}{y_{l-1}^2}\right]^T. \qquad (3)$$

Перейдем теперь к случайному процессу $\{z_l\}$ вида

$$z_l = \Lambda a_{l-1} + \Lambda a_{l-1} B\eta_l. \qquad (4)$$

Так как $\Lambda a_{l-1} \le \lambda_0 + \ldots + \lambda_p$, данный процесс обладает ограниченной дисперсией шумов.

Поставим задачу оценки вектора параметров Λ процесса (4). Используем для построения оценки модифицированный метод наименьших квадратов. Оценка параметров строится в два этапа.

На первом этапе на интервале $[p+1, n]$ вычисляется статистика Γ_n, затем она используется для компенсации неизвестной дисперсии помех. Для определения вида Γ_n преобразуем процесс (2). Введем обозначения

$$\tilde{y}_{l-1}^2 = \min\left\{1, x_{l-1}^2, \ldots, x_{l-p}^2\right\}, \quad \tilde{x}_l^2 = \frac{x_l^2}{\tilde{y}_{l-1}^2}, \quad \tilde{a}_{l-1} = \left[\frac{1}{\tilde{y}_{l-1}^2}, \frac{x_{l-1}^2}{\tilde{y}_{l-1}^2}, \ldots, \frac{x_{l-p}^2}{\tilde{y}_{l-1}^2}\right]^T.$$

В этом определении требуется, чтобы наблюдения $x_{l-1}, \ldots, x_{l-p}$ на промежутке $[1, n]$ были отличны от нуля, иначе можно выбрать первый промежуток, для которого верно это условие. Случайный процесс $\left\{\tilde{x}_l^2\right\}$ имеет вид

$$\tilde{x}_l^2 = \Lambda \tilde{a}_{l-1} \varepsilon_l^2. \qquad (5)$$

Очевидно, что $\Lambda \tilde{a}_{l-1} \ge \lambda_0 + \ldots + \lambda_p$. Тогда Γ_n можно выбрать в одной из двух форм:

$$\begin{aligned} &a)\quad \Gamma_n = C_n \left(\sum_{l=p+1}^{n} \tilde{x}_l^2\right)^2, \quad C_n = B^2 M \left(\sum_{l=p+1}^{n} \varepsilon_l^2\right)^{-2}; \\ &b)\quad \Gamma_n = C_n \sum_{l=p+1}^{n} \tilde{x}_l^4, \quad C_n = B^2 M \left(\sum_{l=p+1}^{n} \varepsilon_l^4\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Плотность распределения шумов $\{\varepsilon_l\}$ должна быть такова, чтобы существовала константа C_n в (6). Типы таких плотностей рассмотрены в [2].

Пример. Если случайные величины $\{\varepsilon_l\}_{l\geq 1}$ имеют стандартное нормальное распределение и множитель Γ_n выбирается в форме $a)$, то сумма $\sum\limits_{l=p+1}^{n}\varepsilon_l^2$ имеет распределение хи-квадрат с $n-p$ степенями свободы и $B^2=2$. Тогда константа C_n имеет вид

$$C_n=\frac{2}{2^{(n-p)/2}\Gamma((n-p)/2)}\int\limits_0^{+\infty}x^{(n-p)/2-3}e^{-x/2}dx=$$
$$=\frac{2}{4\Gamma((n-p)/2)}\Gamma((n-p)/2-2)=\frac{2}{(n-p-2)(n-p-4)}$$

и определена для $n-p\geq 5$.

Из соотношений (6) следует, что

$$M\frac{1}{\Gamma_n}\leq\frac{1}{B^2\left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)^2}. \tag{7}$$

На втором этапе строится собственно оценка параметров, которая имеет вид

$$\Lambda^*(H)=\left(\sum_{l=n+1}^{\tau}v_l z_{l+1}a_l^T\right)A^{-1}(\tau),\quad A(k)=\sum_{l=n+1}^{k}v_l a_l a_l^T, \tag{8}$$

где τ – случайный момент остановки, определяемый следующим образом:

$$\tau=\min\{k\geq n+1:\quad \nu_{\min}(k)\geq H\}, \tag{9}$$

$\nu_{\min}(k)$ – минимальное собственное значение матрицы $A(k)$. Определим веса v_l. Пусть m – минимальное значение *k*, при котором матрица $A(n+k)$ не вырождена. На интервале $[n+1,n+m-1]$ веса имеют вид

$$v_l=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma_n a_l^T a_l}}, & \text{если } a_l \text{ линейно независим с } \{a_{n+1},...,a_{l-1}\};\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{10}$$

На интервале $[n+m,\tau-1]$ веса v_l определяются из условия

$$\frac{\nu_{\min}(k)}{\Gamma_n}=\sum_{l=n+m}^{k}v_l^2 a_l^T a_l. \tag{11}$$

Вес в момент τ определяется из условий

$$\frac{\nu_{\min}(\tau)}{\Gamma_n}\geq\sum_{l=n+m}^{\tau}v_l^2 a_l^T a_l,\quad \nu_{\min}(\tau)=H. \tag{12}$$

Теорема 1. Если существует константа C_n в (6), то момент остановки $\tau(H)$ конечен почти наверное, среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения параметров оценивается сверху величиной

$$M\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2\leq\frac{H+p}{H^2}. \tag{13}$$

Доказательство. Согласно [2], момент остановки $\tau(H)$ (9) конечен почти наверное, если

$$\sum_{l=1}^{\infty} v_l^2 a_l^T a_l = \infty \text{ п.н.} \tag{14}$$

Для сходимости почти наверное ряда в (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие [3]

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left\{\sum_{l=k}^{\infty} v_l^2 a_l^T a_l \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Так как $a_l^T a_l > 1$, это условие может выполняться только при $v_l \to 0$ по вероятности. Перепишем уравнение для определения весовых коэффициентов (11) в виде [4]

$$\frac{\nu_{\min}(k)}{\Gamma_n} = \frac{1}{\Gamma_n} \min_{x:\|x\|=1} x^T \left(A(k-1) + v_k a_k a_k^T\right) x = \frac{\nu_{\min}(k-1)}{\Gamma_n} + v_k^2 a_k^T a_k .$$

Отсюда получаем, что для собственного вектора $b_k : \|b_k\| = 1$ матрицы $A(k)$, соответствующего собственному значению $\nu_{\min}(k)$, верно

$$v_k^2 \Gamma_n a_k^T a_k - v_k \left(a_k^T b_k\right)^2 - \left(b_k^T A(k-1) b_k - \nu_{\min}(k-1)\right) = 0 .$$

Решая квадратное уравнение, получаем, что оно имеет два корня, один из которых не положителен, а второй – не отрицателен. Коэффициент v_k равен большему корню и имеет вид

$$v_k = \frac{\left(a_k^T b_k\right)^2 + \sqrt{\left(a_k^T b_k\right)^4 + 4\Gamma_n a_k^T a_k \left(b_k{}^T A(k-1) b_k - \nu_{\min}(k-1)\right)}}{2\Gamma_n a_k^T a_k} \geq \frac{\left(a_k^T b_k\right)^2}{\Gamma_n a_k^T a_k}. \tag{15}$$

Из соотношения (15) видно, что $v_k \to 0$, если косинус угла между векторами b_k и a_k стремится к нулю, т.е. когда вектор наблюдений a_k ортогонален собственному вектору матрицы $A(k)$. Учитывая, что при $v_k \to 0$ матрица $A(k)$ меняется незначительно и малые изменения матрицы приводят к малым изменениям собственных векторов [4], то a_k в этом случае стремится к определенному вектору, что противоречит (1) – (3).

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров. Используя (4), неравенство Коши – Буняковского, соотношение $\| A(k) \| \geq \nu_{\min}(k)$ и (12), получаем

$$M\left\|\Lambda^*(H) - \Lambda\right\|^2 = M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} \left(\Lambda v_l a_l a_l^T B \eta_{l+1}\right) A^{-1}(\tau)\right\|^2 \leq$$

$$\leq M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} \left(\Lambda v_l a_l a_l^T B \eta_{l+1}\right)\right\|^2 \left\|A^{-1}(\tau)\right\|^2 \leq \frac{1}{H^2} M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} \Lambda v_l a_l a_l^T B \eta_{l+1}\right\|^2. \tag{16}$$

Рассмотрим второй множитель, учтем, что $\Lambda a_l \leq \lambda_0 + \ldots + \lambda_p$.

$$M\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} \Lambda v_l a_l a_l^T B\eta_{l+1}\right\|^2 \le$$

$$\le \left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)^2 B^2\left(M\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 + 2M\sum_{l=n+2}^{\tau}\sum_{k=n+1}^{l-1} v_k v_l a_k^T a_l \eta_{k+1}\eta_{l+1}\right). \qquad (17)$$

Оценим первое слагаемое. Для этого введем усеченный момент остановки $\tau(N)=\min\{\tau, N\}$. Очевидно, что $\tau(N)\to\tau$ при $N\to\infty$. Рассмотрим случайную величину

$$\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2,$$

отличающуюся от суммы в первом слагаемом в (17) только верхним пределом. Пусть $F_l=\sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l)$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_l\}$, тогда τ, определенный в (9) – марковский момент относительно $\{F_l\}$. Используя свойства условных математических ожиданий, получаем

$$M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 = M\sum_{l=n+1}^{N} v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\le\tau}\eta_{l+1}^2 = M\sum_{l=n+1}^{N} M\left\{v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\le\tau}\eta_{l+1}^2 \middle| F_l\right\} =$$

$$= M\sum_{l=n+1}^{N} v_l^2 a_l^T a_l \chi_{l\le\tau} M\left\{\eta_{l+1}^2 \middle| F_l\right\} = M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l.$$

Так как $\tau(N)\to\tau$ при $N\to\infty$, отсюда с учетом (10) – (12) получаем

$$M\sum_{l=n+1}^{\tau(N)} v_l^2 a_l^T a_l \eta_{l+1}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} M\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l =$$

$$= M\sum_{l=n+1}^{n+m-1} v_l^2 a_l^T a_l + M\sum_{l=n+m}^{\tau} v_l^2 a_l^T a_l \le M\left(\frac{p}{\Gamma_n}+\frac{H}{\Gamma_n}\right) = M\left(\frac{H+p}{\Gamma_n}\right).$$

Аналогично можно показать, что второе слагаемое в (16) равно нулю. Подставляя полученные результаты в (17), а затем в (16) и используя (7), получаем

$$M\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2 \le \frac{H+p}{H^2} M\left(\frac{B^2(\lambda_0+\ldots+\lambda_p)^2}{\Gamma_n}\right) \le \frac{H+p}{H^2} \qquad (18)$$

Теорема доказана.

3. Асимптотические свойства оценки

Рассмотрим свойства предложенной оценки при больших значениях параметра *H*.

Теорема 2. Если шумы ε_l в (1) имеют конечный четвертый момент $M\varepsilon_l^4<\infty$, то для квадрата отклонения оценки (8) от истинного значения имеет место неравенство

$$P\left\{\left\|\Lambda^*-\Lambda\right\|^2 > x\right\} \le p\left[1-2\Phi\left(\sqrt{\frac{xH}{pb^2}}\right)+P\left\{\Gamma_n < \frac{B^2\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_p\right)^2}{b^2}\right\}\right], \qquad (19)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения, $b^2>1$.

Доказательство. Рассмотрим оценку (8). Используя (4), имеем

$$\left\|\Lambda^*-\Lambda\right\|^2=\left\|\left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l\left(\Lambda a_{l-1}+\Lambda a_{l-1}B\eta_l\right)a_l^T\right)A^{-1}(\tau)-\Lambda\right\|^2=\left\|\left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l\Lambda a_l a_l^T B\eta_l\right)A^{-1}(\tau)\right\|^2.$$

Воспользовавшись неравенством Коши – Буняковского, соотношениями $\|A(k)\|\geq \nu_{\min}(k)$ и (12), а также соотношением $\Lambda a_l \leq \lambda_0+\ldots+\lambda_p$, получаем

$$\left\|\Lambda^*-\Lambda\right\|^2\leq\frac{B^2\left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)}{H^2}\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} v_{l.}a_l^T\eta_{l+1}\right\|^2.$$

Отсюда

$$P\left\{\left\|\Lambda^*-\Lambda\right\|^2>x\right\}\leq P\left\{\frac{B^2\left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)}{H}\left\|\sum_{l=n+1}^{\tau} v_{l.}a_l^T\eta_{l+1}\right\|^2>xH\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{B^2\left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)}{H}\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_{l.}a_l^k\eta_{l+1}\right)^2>xH\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{p}P\left\{\frac{B^2\left(\lambda_0+\ldots+\lambda_p\right)}{H}\left(\sum_{l=n+1}^{\tau} v_{l.}a_l^k\eta_{l+1}\right)^2>\frac{xH}{p}\right\},$$

где a_l^k – k-я компонента вектора a_l.

Введем обозначение

$$X_\tau=X_\tau(H)=\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{l=n+1}^{\tau} v_l a_l^k\eta_{l+1}.$$

Найдем характеристическую функцию величины X_τ. Здесь используется доказательство центральной предельной теоремы для мартингалов, приведенное в [5]. Введем обозначения

$$\zeta_l=\zeta_l(H)=\frac{1}{\sqrt{H}}v_l a_l^k\eta_{l+1}\chi_{[l\leq\tau]},\quad X_N=\sum_{l=n+1}^{N}\zeta_l. \qquad (20)$$

Очевидно, $X_N\to X_\tau$ при $N\to\infty$ почти наверное. Следовательно, для нахождения характеристической функции X_τ требуется найти предел характеристической функции X_N. Для этого введем обозначение

$$E^N(\lambda)=\prod_{l=n+1}^{N} M\left(e^{i\lambda\zeta_l}\middle|F_l\right).$$

Лемма [5]. Если (для данного λ) $\left|E^N(\lambda)\right|\geq c(\lambda)>0$, $N>1$, то для сходимости $M\left(e^{i\lambda X_N}\right)\to M\left(e^{i\lambda X}\right)$ достаточно сходимости по вероятности $E^N(\lambda)\to M\left(e^{i\lambda X}\right)$.

Проверим условия леммы.

$$\left|E^N(\lambda)\right|=\prod_{l=n+1}^{N}\left|M\left[e^{i\lambda\zeta_l}\middle|F_l\right]\right|=\prod_{k=n+1}^{N}\left|1+M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]\right|.$$

Используя неравенство $\left|e^{i\lambda x}-1-i\lambda x\right|\le(\lambda x)^2/2$, получаем

$$\left|E^N(\lambda)\right|\ge\prod_{l=n+1}^{N}\left(1-M\left[\left|e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\right|\middle|F_l\right]\right)\ge\prod_{l=n+1}^{N}\left(1-\frac{1}{2}M\left[(\lambda\zeta_l)^2\middle|F_l\right]\right)=$$

$$=\prod_{k=n+1}^{N}\left(1-\frac{\left(\lambda v_l a_l^k\right)^2\chi_{[l\le\tau]}}{2H}M\eta_{l+1}^2\right)=\exp\left\{\sum_{l=n+1}^{N}\ln\left(1-\frac{\left(\lambda v_l a_l^k\right)^2\chi_{[l\le\tau]}}{2H}\right)\right\}.$$

Поскольку $0\le a_l^k\le 1$, то $(\lambda v_l a_l^k)^2\chi_{[l\le\tau]}/H\to 0$ при $H\to\infty$. Используя неравенство $\ln(1-x)\ge -2x$, где $x\in(0,1/2]$, для всех $H\ge H_0(\lambda)$ получаем

$$\left|E^N(\lambda)\right|\ge\exp\left\{-\sum_{l=n+1}^{\min(N,\tau)}\frac{\left(\lambda v_l a_l^k\right)^2}{H}\right\}\ge\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{H}\sum_{l=n+1}^{\tau}\left(v_l a_l^k\right)^2\right\}.$$

Учитывая (12), окончательно имеем

$$\left|E^N(\lambda)\right|\ge\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{H}\frac{H}{\Gamma_n}\right\}=e^{-\lambda^2/\Gamma_n}.$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение $E^N(\lambda)$. Представим эту величину в виде

$$E^N(\lambda)=\exp\left\{\sum_{k=n+1}^{N}M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{l=n+1}^{N}M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]\right\}\prod_{l=n+1}^{N}\left(1+M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]\right).\qquad(21)$$

Рассмотрим произведение последних двух множителей и покажем, что оно стремится к единице. Введем обозначение $\alpha_l=M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]$. Воспользовавшись неравенством $|e^x-1|\le e^{|x|}|x|$, имеем

$$\left|\prod_{l=n+1}^{N}(1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}-1\right|=\left|\exp\left\{\ln\prod_{l=n+1}^{N}(1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}\right\}-1\right|\le$$

$$\le\exp\left\{\left|\ln\prod_{l=n+1}^{N}(1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}\right|\right\}\left|\ln\prod_{l=n+1}^{N}(1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}\right|.$$

Используя неравенство $|\ln(1+x)-x|\le 2|x|^2$ для $|x|<1/2$ и $\left|e^{i\lambda x}-1-i\lambda x\right|\le$ $\le(\lambda x)^2/2$, для $H>H_0(\lambda)$, получаем

$$\left|\ln\prod_{l=n+1}^{N}(1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}\right|\le\sum_{l=n+1}^{N}\left|\ln(1+\alpha_l)-\alpha_l\right|\le 2\sum_{l=n+1}^{N}|\alpha_l|^2=$$

$$=2\sum_{l=n+1}^{N}\left(M\left[e^{i\lambda\zeta_l}-1-i\lambda\zeta_l\middle|F_l\right]\right)^2\le\frac{\lambda^4}{H^2}M\sum_{l=n+1}^{\tau}\left(v_l a_l^k\right)^4.$$

Так как $\left(v_l a_l^k\right)^2 \le 1$, учитывая (12), получаем, что

$$\left|\ln \prod_{k=n+1}^{N} (1+\alpha_l)e^{-\alpha_l}\right| \le \frac{\lambda^4}{H^2} M \sum_{l=n+1}^{\tau} \left(v_l a_l^k\right)^2 \le \frac{\lambda^4}{H} M\left(\frac{1}{\Gamma_n}\right) \xrightarrow[H\to\infty]{} 0.$$

Значит, произведение двух последних множителей в представлении $E^N(\lambda)$ (21) стремится к единице по вероятности при $N\to\infty$, $H\to\infty$.

Рассмотрим первый множитель:

$$\exp\left\{\sum_{l=n+1}^{N} M\left[e^{i\lambda\zeta_l} - 1 - i\lambda\zeta_l \middle| F_l\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l=n+1}^{N} M\left[(\lambda\zeta_l)^2 \middle| F_l\right]\right\} \exp\left\{\sum_{l=n+1}^{N} M\left[e^{i\lambda\zeta_l} - 1 - i\lambda\zeta_l + \frac{(\lambda\zeta_l)^2}{2} \middle| F_l\right]\right\}. \quad (22)$$

Воспользовавшись неравенством $\left|e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x + (\lambda x)^2/2\right| \le |\lambda x|^3/6$, получаем

$$\left|\sum_{l=n+1}^{N} M\left[e^{i\lambda\zeta_l} - 1 - i\lambda\zeta_l + \frac{(\lambda\zeta_l)^2}{2} \middle| F_l\right]\right| \le \frac{1}{6H\sqrt{H}} \sum_{l=n+1}^{N} M\left[\left|\lambda v_k a_l^k \eta_{l+1}\right|^3 \chi_{[l\le\tau]} \middle| F_l\right] =$$

$$= \frac{|\lambda|^3 M|\eta_{l+1}|^3}{6H\sqrt{H}} \sum_{l=n+1}^{N} \left|v_l a_l^k\right|^3 \chi_{[l\le\tau]}.$$

Последнее выражение стремится к нулю, что следует из неравенства $\left(v_l a_l^k\right)^2 \le 1$ и соотношений (12), а значит, второй множитель в (21) стремится к единице при $H\to\infty$. Рассмотрим первый множитель:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l=n+1}^{N} M\left[(\lambda\zeta_l)^2 \middle| F_l\right]\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2H}\sum_{l=n+1}^{\min\{\tau,N\}} \left(v_l a_l^k\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2 \langle X_N\rangle\right\}$$

Отметим сначала, что, согласно (12), $\langle X_N\rangle$ является ограниченным субмартингалом, следовательно, по теореме Дуба [5] с вероятностью 1 существует предел $\langle X_\infty\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle X_N\rangle$, причем $\langle X_\infty\rangle \le 1/\Gamma_n$. С другой стороны, $\langle X_N\rangle \to \langle X_\tau\rangle$ при $N\to\infty$. Следовательно, $\langle X_\tau\rangle$ можно представить как α^2/Γ_n, где $\alpha\in(0,1]$ – случайная величина. Окончательно имеем

$$\lim_{H\to\infty}\lim_{N\to\infty} E^N(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\alpha^2\lambda^2}{2\Gamma_n}\right\}.$$

Отсюда получаем, что случайная величина $B\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_p\right)|X_\tau|$ при $H\to\infty$ имеет асимптотически нормальное распределение с дисперсией $d^2 = \alpha^2 B^2\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_p\right)^2/\Gamma_n$, причем, согласно (7), $Md^2 \le 1$. Оценим теперь $P\left\{B\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_p\right)|X_\tau\|X_\tau|>x\right\}$:

$$\lim_{H\to\infty} P\left\{B\left(\lambda_1+\ldots+\lambda_p\right)|X_\tau|>x\right\} = 2M\frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}}\int_x^\infty e^{-t^2/2d^2}\,dt.$$

Так как для любых $d_1^2 \le d_2^2 \le t$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi d_1^2}} e^{-t^2/2d_1^2} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi d_2^2}} e^{-t^2/2d_2^2},$$

то для любых значений $1 \le b^2 \le x$

$$2M \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}} \int_x^\infty e^{-t^2/2d^2} dt \le 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} \int_x^\infty e^{-t^2/2b^2} dt + P\left\{d^2 > b^2\right\} \le$$

$$\le 1 - 2\Phi\left(\frac{x}{b}\right) + P\left\{\Gamma_n < \frac{B^2\left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p\right)^2}{b^2}\right\}.$$

Отсюда получаем (19). Теорема доказана.

Пример. Если случайные величины $\{\varepsilon_l\}_{l \ge 1}$ имеют стандартное нормальное распределение и множитель Γ_n выбирается в форме (6*а*), то сумма $\chi^2(n-p) = \sum_{l=p+1}^{n} \varepsilon_l^2$ имеет распределение хи-квадрат с $n-p$ степенями свободы. Тогда $B^2 = 2$, а константа $C_n = 2/(n-p-2)(n-p-4)$ и определена для $n-p \ge 5$, а искомая вероятность имеет вид

$$P\left\{\left\|\Lambda^* - \Lambda\right\|^2 > x\right\} \le p\left(1 - 2\Phi\left(\sqrt{\frac{xH}{pb^2}}\right) + P\left\{\chi^2(n-p) < \sqrt{\frac{(n-p-2)(n-p-4)}{2b}}\right\}\right).$$

Для $n-p \ge 5$ и $b^2 \ge 1{,}1$ последнее слагаемое в скобке не превосходит 0,1. В частности, для $n-p=6$ и $b^2 = 1{,}5$ эта величина минимальна на области $5 \le n-p \le 10; 1{,}1 \le b^2 \le 2$ и равна 0,033.

4. Результаты моделирования

Предложенный алгоритм был реализован на ЭВМ. Для каждого параметра H проводилось 100 реализаций процедуры оценивания параметров процесса (1). В следующей таблице приведен пример оценивания параметров процесса порядка $p=2$ при $\lambda_0 = 0{,}9$, $\lambda_1 = 0{,}5$ и $\lambda_2 = 0{,}3$. Нормирующий множитель Γ_n полагался равным единице.

H	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\Delta}$	$\hat{\tau}$	τ_{max}
20	0,9468	0,5921	0,1972	1,0670	72	137
40	0,9969	0,5314	0,2362	0,3835	131	210
60	0,9514	0,4613	0,2824	0,2148	193	313
80	0,9954	0,4081	0,2967	0,2098	253	410
100	0,9217	0,5192	0,3282	0,1478	309	424

Здесь $\hat{\lambda}_i$ – средние оценки параметров, $\hat{\Delta}$ – среднеквадратическое отклонение вектора оценок от истинных значений параметров, $\hat{\tau}$ и τ_{max} – среднее и максимальное время оценивания. Моделирование показало работоспособность процедуры. Среднеквадратическое отклонение оценки от истинного значения параметра обратно пропорционально H, что соответствует теоретическим результатам. Кроме того, среднее и максимальное число наблюдений, необходимое для оценивания, растет линейно относительно H, что говорит о хорошем качестве процедуры оценивания. Максимальное число наблюдений отличается от среднего не более чем в два раза и эта величина уменьшается с ростом H.

В следующей таблице приведен пример оценивания параметров процесса порядка $p = 3$ при $\lambda_0 = 0,9$, $\lambda_1 = 0,5$ $\lambda_2 = 0,3$ и $\lambda_3 = 0,1$. Нормирующий множитель Γ_n полагался равным единице.

H	$\hat{\lambda}_0$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\Delta}$	$\hat{\tau}$	τ_{max}
20	1,1525	0,4793	0,1836	0,0967	1,3623	87	166
40	0,8636	0,4724	0,3368	0,0888	0,5805	144	227
60	0,9578	0,5071	0,3230	0,0902	0,4399	212	356
80	0,9712	0,5223	0,2635	0,0647	0,2859	282	432
100	0,9515	0,4967	0,2605	0,1133	0,2025	339	422

Из таблицы видно, что среднеквадратическое отклонение вектора оценок от истинных значений параметров, как и в предыдущем случае, обратно пропорционально параметру процедуры H. Среднее и максимальное число наблюдений лишь незначительно (не более чем на 22 %) превышает аналогичные показатели в случае процесса второго порядка, что показывает применимость процедуры оценивания и для процессов более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буркатовская Ю.Б.*, *Воробейчиков С.Э.* Взвешенный метод наименьших квадратов гарантированного оценивания параметров процесса ARCH(1) // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. №3(8). С. 27–32.
2. *Дмитриенко А.А.*, *Конев В.В.* О последовательной классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией помех // Проблемы передачи информации, 1995. Т. 31. Вып. 4. С. 51–62.
3. *Vorobeychikov S.E.*, *Meder N.A.* On guaranteed estimation of parameter of random processes by the weighted least square method // Preprints of the 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control. Barcelona. Spain, 21-26 July 2002, N 1200.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
5. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Буркатовская Юлия Борисовна
Томский политехнический университет
Воробейчиков Сергей Эрикович
Томский государственный университет
E-mail: burkatovskaya@sibmail.com sev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 20 сентября 2010 г.