ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Управление, вычислительная техника и информатика № 4(13)

УДК 519.865

Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин

КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНА КУПЛИ НА ДИФФУЗИОННОМ (*B*, *S*)-РЫНКЕ В СЛУЧАЕ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ ПО РИСКОВОМУ АКТИВУ

Рассматривается задача нахождения цены опциона, портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала, обеспечивающих платежное обязательство с заданной вероятностью, для Европейского опциона купли в случае выплаты дивидендов по рисковому активу при использовании диффузионной модели рынка. Исследуются свойства решения.

Ключевые слова: *финансовый рынок*, *цена опциона*, *хеджирующая стратегия*, *Европейский опцион купли*, *дивиденды.*

Используемые на рынках, особенно на внебиржевых, финансовые инструменты становятся все более разнообразными [1]. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов требуют применения математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность приобрела финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [2 – 4]. Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право купли или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по определенной цене, а продавец опциона за премию, являющуюся ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли, а во втором – продажи. Стандартная платежная функция опциона купли, определяющая величину выплаты при предъявлении опциона к исполнению, имеет вид $f_T=(S_T-K)^+$, где S_T – цена базисного актива в момент исполнения T, K – цена исполнения контракта, $a^+=\max(a;0)$ Опцион, соответствующий такой платежной функции в случае фиксированного T, получил название стандартного опциона купли европейского типа. В случае стандартных опционов, которые исполняются с вероятностью единица, с платежными функциями данного вида выплата по опциону может быть достаточно большой, что представляет существенный риск для эмитента (инвестора) и порождает требование ограничения этого риска. В предлагаемой работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе квантильного хеджирования с вероятностью выполнения платежного обязательства [4, 5], которая, в отличие от стандартного опциона, меньше единицы. В случае опциона продажи с платежной функцией вида $f_T=(K-S_T)^+$ задача квантильного хеджирования рассмотрена в [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, представленного безрисковым (банковский счет) B и рисковым (акция) S активами с ценами соответственно B_t и S_t в момент времени $t\in[0,T]$. При этом активы B и S называют основными активами или основными ценными бумагами, образующими (B,S)-рынок с непрерывным временем. Предполагается, что величина банковского счета B задается детерминированной функцией $B = (B_t)_{t>0}$, отвечающей диффузионному уравнению

$$dB_t = rB_t dt\,, \tag{1}$$

решение которого имеет вид

$$B_t = B_0 e^{rt}, \quad B_0 > 0, \quad r > 0\,, \tag{2}$$

где r – процентная ставка, или банковский процент. Изменение стоимости акции $S = (S_t)_{t\geq 0}$ происходит на стохастическом базисе $\left(\Omega, F, \boldsymbol{F} = (F_t)_{t>0}, \boldsymbol{P}\right)$ [2 – 4]. Ввиду того, что реально наблюдаемые флуктуации цен акций имеют случайный характер, для описания эволюции S используется модель «геометрического», или «экономического», броуновского движения [2, 3]. Такой процесс описывается стохастическим диффузионным уравнением

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right), \tag{3}$$

с решением

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left(\left(\mu = \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \tag{4}$$

где $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс, $S_0 > 0, \mu \in R = (-\infty, +\infty), \sigma > 0$.

Рассмотрим некоторого инвестора, значение капитала X_t в момент времени t которого определяется как

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t\,, \tag{5}$$

где F_t-измеримые процессы β_t и γ_t – части безрискового и рискового активов соответственно – составляют портфель ценных бумаг $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$. За обладание акцией осуществляются выплаты дивидендов в размере D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, $0 \leq \delta < r$, пропорциональной рисковой составляющей капитала, а именно: $dD_t = \delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами определяется в виде $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t$. Из (5) следует, что $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + {}$ ${}+ S_t d\gamma_t$. Таким образом, получаем балансовое соотношение $B_t d\beta_t + S_t d\gamma = dD_t$, заменяющее условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче [2 – 4]. Аналогично задаче без дивидендов [2] в рассматриваемой задаче риск-нейтральная (мартингальная) мера $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$, которая связана с исходной мерой преобразованием вида $d\boldsymbol{P}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} d\boldsymbol{P}_t$, где

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \tag{6}$$

При этом вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)\left((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}\right), \tag{7}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)\left((r - \delta)dt + \sigma dW_t\right) \tag{8}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$, где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t^* = W_t + \frac{(\mu - r + \delta)}{\sigma} t \tag{9}$$

является винеровским относительно меры $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta} = \boldsymbol{P}^*$.

Задача. Требуется определить капитал X_t^*, соответствующий ему портфель $\pi_t^* = \left(\beta_t^*, \gamma_t^*\right)$ и начальное значение капитала $X_0^* = C_T$ как стоимости вторичной ценной бумаги – опциона, при которых обеспечивается выполнение платежного обязательства

$$X_T^* = f_T(S_T), \tag{10}$$

где $f_T(S_T) = (S_T - K)^+$ – платежная функция для опциона купли, с вероятностью $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, [4, 5].

Базовая теория рассматривает хеджирование с единичной вероятностью, когда $\varepsilon = 0$ [1] и платежное обязательство выполняется на каждой траектории S_t [1 – 3]. Подобная идеализация приводит к тому, что решение не зависит от параметра роста μ, который является существенным и определяет тенденцию изменения цены рискового актива. Хеджирование с вероятностью меньше единицы (квантильное хеджирование) является более реалистичным. В рамках проведенного исследования рассматривается задача хеджирования с заданной вероятностью стандартного опциона купли в случае выплаты дивидендов, когда находится не только формула для справедливой цены опциона C_T, но и формулы, определяющие эволюцию во времени портфеля (хеждирующей стратегии) и капитала, обеспечивающих платежное обязательство с заданной вероятностью.

2. Цена опциона

Рассматривается задача квантильного хеджирования стандартного опциона купли (*call*-опциона) с функцией выплат $f_T = (S_T - K)^+ = \max(0, S_T - K)$ [2, 3]. По теореме 6.1 из [4] имеем, что оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем (с вероятностью единица) платежного обязательства $f_T^\varepsilon = f_T I_A$, где I_A – индикатор множества A, имеющего вид

$$A = \left\{\omega : \frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{P}^*} > \text{const} \cdot f_T \right\}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{P}^*$ – рискнейтральная (мартингальная) мера, т. е. мера, относительно которой процесс $\tilde{S}_t = S_t / B_t$ является мартингалом и существование которой обеспечивает разрешимость задачи на неарбитражных стратегиях хеджирования, т.е. стратегиях, не допускающих получения прибыли без риска. Из (6), (9) следует

$$\frac{d\boldsymbol{P}_t^*}{d\boldsymbol{P}_t} = Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma} W_t^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}, \tag{12}$$

где $W_t^* = W_t^{\mu-r+\delta}$ вида (9) есть винеровский процесс относительно меры $\boldsymbol{P}^*$. С учетом (4) и вида платежной функции для опциона купли область успешного хеджирования A примет вид

$$A=\left\{\exp\left\{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}W_t^*-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\right\}>\mathrm{const}\cdot\left(S_T-K\right)^+\right\}=$$

$$=\left\{S_T^{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\frac{\mu+r+\delta-\sigma^2}{2}\right)T\right\}>\mathrm{const}\cdot\left(S_T-K\right)^+\right\}. \quad (13)$$

Далее рассматривается случай $\left[(\mu-r+\delta)/\sigma^2\right]<1$.

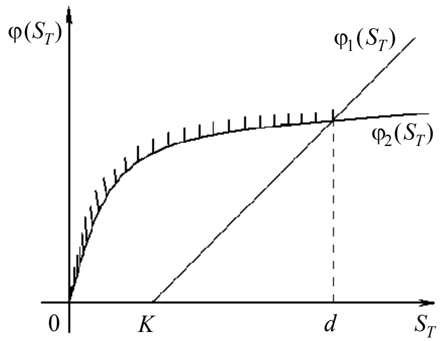

Рис.1. Структура множества хеджирования при $\left[(\mu-r+\delta)/\sigma^2\right]<1$

На рис. 1 $\varphi_1(S_T)=\mathrm{const}\left(S_T-K\right)^+$, $\varphi_2(S_T)=S_T^{(\mu-r+\delta)/\sigma^2}$. Заштрихованная область является областью решения неравенства (13). Так как, согласно (4) и (9),

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(r+\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T^*\right\}, \quad (14)$$

то множество A может быть представлено следующим образом:

$$A=\left\{S_T<d\right\}=\left\{W_T^*<b\right\}=\left\{S_T<S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}\right\}. \quad (15)$$

Тогда

$$\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}\left\{S_T<S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}\right\}, \quad (16)$$

И с учетом (14) из (16) следует

$$\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}\left\{S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}<S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}\right\}=$$

$$=\boldsymbol{P}\left\{\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}<\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}\right\}=$$

$$=\boldsymbol{P}\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T<\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}=$$

$$=\boldsymbol{P}\left\{\sigma W_T<b\sigma-(\mu-r+\delta)T\right\}=\boldsymbol{P}\left\{W_T<b-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)T\right\}. \quad (17)$$

Замечание 1. Далее всюду $\Phi^{-1}(y)$ означает функцию, обратную функции Лапласа

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy\,,\ \ \varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

Так как винеровский процесс W_t имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t, то из (17) получаем

$$\boldsymbol{P}(A)=\Phi\left(\left(b-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right), \tag{18}$$

где $\boldsymbol{P}(A)=1-\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1$, есть вероятность успешного хеджирования. Следовательно, для нахождения константы $b=b_c^T$ имеем соотношение

$$b_c^T=\sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\,. \tag{19}$$

Теорема 1. Пусть $y_0(T, S_0)$ определяется по формуле

$$y_0(T,S_0)=\frac{\ln\dfrac{K}{S_0}-(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,. \tag{20}$$

Тогда цена опциона купли в случае $\left[(\mu-r+\delta)/\sigma^2\right]<1$ определяется формулой

$$C_T=S_0e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right]-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right]. \tag{21}$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$C_T=e^{-rT}E^*\{f_TI_A\}\,, \tag{22}$$

где E^* – усреднение по мартингальной мере $\boldsymbol{P}^*$. Используя (4) и (6), находим согласно (22)

$$C_T=e^{-rT}E^*\{f_TI_A\}=e^{-rT}E^*\left\{(S_T-K)^+I_A\right\}=$$

$$=e^{-rT}E\left\{Z_T^{\mu-r+\delta}\left(S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}-K\right)^+I_A\right\}=$$

$$=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T}-\frac{T}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma x\sqrt{\mathrm{T}}\right\}-K\right)^+I_A\cdot\varphi(x)dx=$$

$$=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T}-\frac{T}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}\left(x+\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)\sqrt{T}\right)\right\}-K\right)^+I_A\cdot\varphi(x)dx\,.$$

Делая замену переменных $z = x + \left[(\mu + \delta - r)/\sigma\right]\sqrt{T}$, получаем с учетом (17) – (19), что

$$C_T = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{b_c^T/\sqrt{T}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\cdot\left(S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}z\right\}-K\right)^{+} dz\ .$$

Так как подынтегральное выражение больше нуля при

$$S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}z\right\}-K>0,$$

то окончательно с учетом определения функции $\Phi(x)$ и (20) получаем

$$C_T = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{y_0(T,S_0)}^{b_c^T/\sqrt{T}}\left(S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}z\right\}-K\right)\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\right]=$$

$$=S_0e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right]-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right],$$

т.е. пришли к (21). Теорема доказана.

3. Капитал и портфель

Теорема 2. При $\left[(\mu-r+\delta)/\sigma^2\right]<1$ портфель $\pi_t^*=\left(\beta_t^*,\gamma_t^*\right)$ и капитал X_t^* определяются формулами

$$\gamma_t^* = e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]; \qquad (23)$$

$$\beta_t^* = -e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right]; \qquad (24)$$

$$X_t^* = S_te^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right], \qquad (25)$$

где b_c^{T-t} и $y_0(T-t,S_t)$ определяются по формулам (19) и (20) с заменами $T\to(T-t)$ и $S_0\to S_t$, т.е.

$$b_c^{T-t}=\sqrt{T-t}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}(T-t),$$

$$y_0(T-t,S_t)=\frac{\ln\frac{K}{S_t}-\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \qquad (26)$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$X_t^* = E^*\left\{e^{-r(T-t)} f_T I_A \middle| S_t\right\}, \tag{27}$$

$$\gamma_t^* = \frac{\partial X_t^*(s)}{\partial s}\Big|_{s=S_t}, \ \beta_t^* = \frac{X_t^* - \gamma_t^* S_t}{B_t}. \tag{28}$$

Проводя вычисления, которые использовали при выводе формулы (21), согласно (27) получаем

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{y_0(T-t,S_t)}^{b_c^{T-t}/\sqrt{T-t}} \left(S_t \exp\left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,z \right\} - K \right) \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz \right] =$$

$$= S_t e^{-\delta(T-t)} \left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} \right) - \Phi(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) \right] -$$

$$-Ke^{-r(T-t)} \left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} \right) - \Phi(y_0(T-t,S_t)) \right],$$

т.е. пришли к (25). Согласно (25), (28),

$$\gamma_t^* = e^{-\delta(T-t)} \left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} \right) - \Phi(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) \right] +$$

$$+Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_t} \Phi(y_0(T-t,S_t)) - S_t e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_t} \Phi\left(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \right). \tag{29}$$

Учитывая вид функции $y_0(T-t,S_t)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \Phi(y_0(T-t,S_t)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{y_0(T-t,S_t)} \exp\left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz \right] \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2} \right\} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2} \right\} \frac{\partial}{\partial S_t} y_0(T-t,S_t) = -\frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{ -\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2} \right\}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \Phi\left(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \right) = -\frac{1}{S_t \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{ -\frac{\left(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \right)^2}{2} \right\}.$$

Подставляя полученные выражения в (29), получаем

$$\gamma_t^* = -S_t e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_t} \Phi\left(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \right) + Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S_t} \Phi(y_0(T-t,S_t)) +$$

$$+e^{-\delta(T-t)} \left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} \right) - \Phi(y_0(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) \right] =$$

$$
=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}\times
$$
$$
\times\left[e^{-\delta(T-t)}\exp\left\{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+y_0(T-t,S_t)\sigma\sqrt{T-t}\right\}-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t}\right]+
$$
$$
+e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T}-t}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]. \qquad (30)
$$

Так как с учетом (26)

$$
e^{-\delta(T-t)}\exp\left\{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+y_0(T-t,S_t)\sigma\sqrt{T-t}\right\}-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t}=0,
$$

то

$$
\gamma_t^*=e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T}-t}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right],
$$

т.е. пришли к (23). Используя (23) и (25) в (28), получаем

$$
\beta_t^*=\frac{X_t^*-\gamma_t^*S_t}{B_t}=-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}\left[\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right],
$$

т.е. пришли к (24). Теорема доказана.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 дают полное решение задачи квантильного хеджирования опциона купли при наличии выплаты дивидендов. При отсутствии этих выплат формула (21) переходит в формулу (6.44) из [4] с учетом свойства $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.

4. Свойства решения

Утверждение 1. Для стандартного опциона купли в случае выплаты дивидендов решение задачи определяется формулами

$$
\tilde{C}_T=S_0e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)T-\ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-
$$
$$
-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)T-\ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right); \qquad (31)
$$

$$
\tilde{\gamma}_t=e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \qquad (32)
$$

$$
\tilde{\beta}_t=-e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \qquad (33)
$$

$$\tilde{X}_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) -$$

$$-K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \tag{34}$$

Данные формулы следуют в результате обобщения соответствующих формул из [2, 3] на случай выплаты дивидендов.

Следствие. При $\varepsilon = 0$ формулы (21), (23) – (25) переходят в формулы (31) – (34), т. е. несовершенное хеджирование переходит в совершенное.

Доказательство. В случае, когда $\varepsilon = 0$, вероятность успешного хеджирования $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon = 1$, т. е. переходим к совершенному виду хеджирования. Рассмотрим формулы (21), (23) – (25) при $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ константа b_c^T принимает вид

$$b_c^{T-t} = \sqrt{T-t}\,\Phi^{-1}(1) + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}(T-t) = \infty .$$

Тогда

$$\Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} \right) = 1, \quad \Phi\left(\frac{b_c^{T-t}}{\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t} \right) = 1 . \tag{35}$$

Согласно (23) – (25) с учетом (35), (26) и свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, получаем

$$\tilde{X}_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) \right] - K e^{-r(T-t)} \left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t)) \right] =$$

$$= S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) -$$

$$-K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right),$$

$$\tilde{\gamma}_t = e^{-\delta(T-t)} \left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t}) \right] =$$

$$= e^{-\delta(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right),$$

$$\tilde{\beta}_t = -e^{-r(T-t)} \frac{K}{B_t} \left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t)) \right] =$$

$$= -e^{-r(T-t)} \frac{K}{B_t} \Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).$$

Таким образом, пришли к (32) – (34). Так как $\tilde{C}_T = \tilde{X}_0$, то (31) следует из (34). Следствие доказано.

Представляют интерес зависимости стоимости опциона от параметров S_0, K, μ и ε, определяющих начальную цену рискового актива, оговариваемую цену исполнения опциона, коэффициент роста и вероятность хеджирования $P(A)=1-\varepsilon$. Эти зависимости характеризуются величинами

$$C_T^{S_0}=\partial C_T/\partial S_0\,,\; C_T^{K}=\partial C_T/\partial K\,,\; C_T^{\mu}=\partial C_T/\partial \mu\,,\; C_T^{\varepsilon}=\partial C_T/\partial \varepsilon\,. \tag{36}$$

Утверждение 2. Коэффициенты чувствительности $C_T^{S_0}$, C_T^{K}, C_T^{μ}, C_T^{ε} определяются формулами

$$C_T^{S_0}=e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right];$$

$$C_T^{K}=-e^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right]; \tag{37}$$

$$C_T^{\mu}=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left[S_0e^{-\delta T}\left(\varphi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)\right)-Ke^{-rT}\left(\varphi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}\right)\right)\right];$$

$$C_T^{\varepsilon}=\sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{\left(\Phi^{-1}(1-\varepsilon)\right)^2}{2}\right\}\left[Ke^{-rT}\varphi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}\right)-S_0e^{-\delta T}\varphi\left(\frac{b_c^T}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)\right]. \tag{38}$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения $C_T^{S_0}$, C_T^{K}, C_T^{μ}, C_T^{ε} с учетом (19) – (21).

Исследования $C_T^{S_0}$ и C_T^{K} с привлечением численных расчетов показали, что $C_T^{S_0}>0$, $C_T^{K}<0$, т.е. рациональная стоимость опциона купли является возрастающей функцией от начальной цены акции S_0 и убывающей функцией от цены исполнения опциона K. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Увеличение начальной цены S_0 приводит в среднем к увеличению S_T. Это повышает вероятность того, что S_T превзойдет K, т.е. вероятность предъявления опциона к исполнению. В этом случае риск покупателя опциона уменьшается, а за уменьшающийся риск следует боьше платить. Увеличение K приводит к повышению вероятности того, что S_T не превзойдет K. Таким образом, риск для покупателя опциона увеличивается, а за увеличивающийся риск следует меньше платить.

Если $S_0>K$, то $C_T^{\mu}>0$, $C_T^{\varepsilon}<0$, т.е. стоимость опциона купли является возрастающей функцией коэффициента роста μ и убывающей функцией параметра ε, т.е. возрастающей функцией вероятности хеджирования $P(A)=1-\varepsilon$. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Так как с ростом μ повышается в среднем тенденция к росту цены рискового актива S_t, то тем самым повышается вероятность превышения величиной S_T барьера K, т.е. вероятность предъявления опциона к исполнению. Поскольку за увеличение вероятности получить доход следует больше платить, то это объясняет увеличение C_T с ростом μ. С ростом ε уменьшается вероятность хеджирования, т.е. вероятность исполнения платежного обязательства, что уменьшает вероятность предъявления опциона к исполнению. Поскольку за уменьшение вероятности получить доход следует меньше платить, то это объясняет уменьшение C_T с ростом ε.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем. В случае квантильного хеджирования, то есть в случае выполнения платежного обязательства для опциона купли с вероятностью меньшей единицы:

- найдена формула для цены опциона купли;
- найдены формулы, определяющие оптимальный портфель (хеджирующую стратегию) и отвечающий этому портфелю капитал;
- исследованы некоторые свойства цены опциона, касающиеся характера ее зависимости от начальной цены акции и цены исполнения опциона, коэффициента роста цены акции и вероятности хеджирования;
- решение задачи для случая совершенного хеджирования при выплате дивидендов получено как предельный случай квантильного хеджирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
2. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типа: Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применение.1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80–129.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. 1017 с.
4. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
5. *Новиков А.А.* Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. Вып. 1. С. 152–161.
6. *Данилюк Е. Ю.*, *Демин Н. С.* Хеджирование опциона продажи с заданной вероятностью в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 4(9). С. 32–42.

Данилюк Елена Юрьевна
Демин Николай Серапионович
Томский государственный университет
E-mail: Daniluc_Elena@sibmail.com; dyomin@fpmk.tsu.ru
Поступила в редакцию 5 мая 2010 г.