УДК 519.872

А.А. Назаров, И.Л. Лапатин

АСИМПТОТИЧЕСКИ ПУАССОНОВСКИЕ МАР-ПОТОКИ[1]

В работе рассматриваются МАР- и ММР-потоки. Сформулированы условия, при выполнении которых рассматриваемые потоки являются асимптотически простейшими. Получена оценка области применимости асимптотических результатов.

Ключевые слова: *простейший поток*, *ММР-поток*, *МАР-поток.*

В работах по теории массового обслуживания в качестве модели входящего потока часто используется простейший поток [1]. Это касается как фундаментальных работ, которые послужили базой построения теории, так и современных. В 1955 году А.Я. Хинчин [2] сформулировал три условия, при выполнении которых случайный поток однородных событий является простейшим. Это условия стационарности, ординарности и отсутствия последействия. С тех пор это является основным определением простейшего потока.

Популярность этого потока долгое время объяснялась тем, что он вполне удовлетворительно описывал многие реальные потоки, а также простотой его исследования. В то же время было замечено, что простейший поток появляется и в качестве предельного для некоторых последовательностей потоков. В связи с этим в середине XX века появился ряд работ, посвященных анализу сходимости суммы большого числа независимых потоков малой интенсивности к простейшему потоку. Среди них следует отметить работы Пальма [3], Реньи [4], Г.А. Ососкова [5], Б.И. Григелиониса [6] и А.Я. Хинчина. Вопрос о скорости сходимости таких предельных сумм к потокам Пуассона рассматривался в работах [7, 8].

В то же самое время Реньи (в упомянутой выше работе) показал, что простейший поток может получаться не только в результате суммирования бесконечно малых независимых потоков. Он рассматривал произвольный поток восстановления и применял к нему операцию прореживания (с некоторой вероятностью каждое событие убиралось из рассматриваемого потока). Реньи доказал, что при многократном повторении этой операции и соответствующей нормировке времени рассматриваемый поток сходится к простейшему.

Таким образом, как для теоретических, так и для практических целей представляет интерес исследование таких моделей, которые приводят к пуассоновским потокам.

В частности, в качестве существенного обобщения простейших потоков для более адекватного описания реальных потоков была предложена модель МАР (Markovian Arrival Process). Его понятие впервые было введено М. Ньютсом [9], а затем уточнено Д. Лукантони в работе [10], которая также содержит первые исследования основных характеристик МАР-потоков. В русскоязычной литературе определения таких потоков даны в книгах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко [1], А.Н. Дудина, В.И. Клименок [11], А.А. Назарова, С.П. Моисеевой [12].

[1] Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2010 годы)» Федерального агентства по образованию проект № 4761.

Широко используемым частным случаем MAP-потоков является класс MMP-потоков (Markov Modulated Poisson Process). В данной работе формулируется предельное условие, при выполнении которого последовательность MMP-потоков сходится к простейшему. Аналогичное условие формулируется и для случая общего MAP-потока.

1. Исследование MAP-потока

Случайный поток однородных событий будем определять в виде случайного процесса $r(t)$ – числа событий рассматриваемого потока, наступивших за время t. Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний задана матрицей инфинитезимальных характеристик Q с элементами $q_{\nu k}$. Также задан набор неотрицательных чисел λ_k и вероятности $d_{\nu k}$, причем $d_{kk} = 0$, которые целесообразно определять матрицей $D = [d_{\nu k}]$ и диагональной матрицей Λ с элементами λ_k на главной диагонали.

Случайный поток однородных событий будем называть [12] MAP-потоком (Markovian Arrival Process), управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства

$$P\{r(t+\Delta t) = r+1 \mid r(t) = r, k(t) = k\} = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t) ,$$

$$P\{r(t+\Delta t) > r+1 \mid r(t) = r, k(t) = k\} = o(\Delta t) ,$$

$$P\{r(t+\Delta t) = r+1, k(t+\Delta t) = k \mid r(t) = r, k(t) = \nu\} = d_{\nu k} q_{\nu k} \Delta t + o(\Delta t) ,$$

$$P\{r(t+\Delta t) = r, k(t+\Delta t) = k \mid r(t) = r, k(t) = \nu\} = \left(1 - d_{\nu k}\right) q_{\nu k} \Delta t + o(\Delta t) .$$

Заметим, что пока управляющая цепь Маркова $k(t)$ находится в некотором состоянии ν, события в MAP-потоке наступают как в простейшем с параметром λ_ν. Кроме событий на интервалах постоянства состояний управляющей цепи могут наступать события при переходах цепи из одного состояния в другое. Если управляющая цепь Маркова переходит из состояния ν в некоторое состояние k, событие в MAP-потоке наступает с вероятностью $d_{\nu k}$, а с вероятностью $1 - d_{\nu k}$ событие не наступает. В MMP-потоке все $d_{\nu k} = 0$, то есть события могут наступать только на интервалах постоянства состояний управляющей цепи $k(t)$. Состояния управляющей цепи Маркова будем называть состояниями рассматриваемого потока.

Наиболее полной и удобной для исследования характеристикой марковских потоков (MMP, MAP) является вектор-функция $H(u,t)$, компоненты которой определяются равенством

$$H(k,u,t) = \sum_r e^{jur} P(k,r,t) ,$$

где $P(k, r, t)$ – распределение вероятностей значений двумерной цепи Маркова $\{k(t), r(t)\}$.

Известно [12], что вектор-функция $H(u,t)$ для MMP-потока является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left[Q + \left(e^{ju} - 1\right)\Lambda\right], \\ H(0,0) = R, \end{cases} \tag{1}$$

а интенсивность κ рассматриваемого MMP-потока определяется равенством

$$\kappa = R\Lambda E , \tag{2}$$

где R – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases} \tag{3}$$

а E – единичный вектор-столбец.

Соответствующая задача для MAP-потока имеет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left[Q + \left(e^{ju} - 1\right)B\right], \\ H(0,0) = R \end{cases} \tag{4}$$

а интенсивность к рассматриваемого MAP-потока определяется равенством

$$\kappa = RBE\ , \tag{5}$$

где R – вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, определяемый системой (3), E – единичный вектор-столбец, а B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{\upsilon k} \cdot q_{\upsilon k}$ вне главной диагонали.

Мы используем одинаковые обозначения в (1), (2) и (4), (5), так как MMP-поток является частным случаем MAP-потока, а функции $H(u,t)$ и величины к для них имеют одинаковый смысл.

2. Условие предельно частых изменений состояний MMP-потока

Будем рассматривать MMP-поток в условии предельно частых изменений его состояний. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$, которая определяет управляющую цепь Маркова $k(t)$, и матрицу Λ. Затем, полагая, что S – некоторая положительная величина, в задаче (1) сделаем следующие замены:

$$Q = S \cdot Q^{(1)},\ H(u,t) = F(u,t,S)\,.$$

Тогда для вектор-функций $F(u,t,S)$ можно записать

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(u,t,S)}{\partial t} = F(u,t,S)\left[S \cdot Q^{(1)} + \left(e^{ju} - 1\right)\Lambda\right], \\ F(0,0,S) = R. \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, что стационарные распределения вероятностей состояний управляющей цепи $k(t)$, заданной матрицами инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$ и $Q=S\ Q^{(1)}$, совпадают (не зависят от S), но при увеличении значений параметра S интенсивности перехода цепи Маркова $k(t)$ из одного состояния в другое возрастают, что соответствует условию предельно частых изменений состояния потока.

Теорема 1. *Сумма компонентов предельного, при* $S \to \infty$, *значения вектор-строки* $F(u,t)$ *решения* $F(u,t,S)$ *задачи* (6) *имеет вид*

$$F(u,t)E = \exp\left\{(e^{ju} - 1)\kappa t\right\}, \tag{7}$$

где E – единичный вектор-столбец, величина к *определяется равенством* (2).

Доказательство. Поделив левую и правую части уравнения для $F(u,t,S)$ задачи (6) на S и устремив S к бесконечности, получим систему

$$F(u,t)Q^{(1)} = 0,$$

которая совпадает по виду с системой (3), поэтому ее решение имеет вид

$$F(u,t) = R \cdot \Phi(u,t)\,, \tag{8}$$

где R – вектор стационарного распределения состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, а $\Phi(u,t)$ – некоторая скалярная функция. Для определения вида этой функции умножим справа уравнение для $F(u,t,S)$ задачи (6) на единичный вектор-стобец E соответствующей размерности:

$$\frac{\partial F(u,t,S)}{\partial t} E = F(u,t,S)\left(e^{ju} - 1\right)\Lambda E\,,$$

устремим S к бесконечности и подставим разложение (8). Тогда, учитывая (2) и условие нормировки RE=1, функция $\Phi(u,t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial t} = \Phi(u,t)\left(e^{ju} - 1\right)\kappa$$

с начальным условием $\Phi(0,0)$=1. Подставляя решение этого уравнения в разложение (8), получим

$$F(u,t) = R\exp\left\{(e^{ju} - 1)\kappa t\right\}.$$

В силу условия нормировки RE=1, функция $F(u,t)E$ удовлетворяет равенству (7). Теорема доказана.

Сформулированная теорема говорит о том, что MMP-поток в условии предельно частых изменений состояний управляющей цепи (то есть когда средние времена пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии стремятся к нулю) является асимптотически простейшим. При этом равномерный рост интенсивностей перехода управляющее цепи Маркова $k(t)$ из одного состояния в другое не влияет на стационарное распределение состояний этой цепи и на интенсивность потока.

3. Условие предельно частых изменений состояний MAP-потока и согласованного интенсивного прореживания

Рассмотрим аналогичную схему для MAP-потока. Так как события в нем могут наступать при переходе управляющей цепи Маркова из одного состояния в другое, то рост интенсивностей перехода повлечет за собой появления большого числа событий в потоке. Чтобы избежать этой ситуации, вероятности $d_{\nu k}$ наступления событий в MAP-потоке при переходе управляющей цепи Маркова из одного состояния в другое будем уменьшать пропорционально росту интенсивностей перехода $q_{\nu k}$.

Итак, рассмотрим MAP-поток в условии предельно частых изменений его состояний и согласованного интенсивного прореживания. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$, которая определяет управляющую цепь Маркова $k(t)$, матрицу $D^{(1)}$ вероятностей наступления событий в потоке при переходе управляющей цепи из одного состояния в другое и матрицу Λ. Затем, полагая, что S – некоторая положительная величина, в задаче (4) сделаем следующие замены:

$$Q = S \cdot Q^{(1)},\ D = \frac{1}{S} D^{(1)},\ H(u,t) = F(u,t,S)\,.$$

Тогда для вектор-функций $F(u,t,S)$ можно записать

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(u,t,S)}{\partial t} = F(u,t,S)\left[S\cdot Q^{(1)} + \left(e^{ju}-1\right)B\right], \\ F(u,0,S)=R. \end{cases} \qquad (9)$$

Заметим, что стационарные распределения вероятностей состояний управляющей цепи $k(t)$, заданной матрицами инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$ и Q=$S\ Q^{(1)}$, совпадают (не зависят от S), а матрица B при сделанных заменах не изменяется.

Теорема 2. *Сумма компонентов предельного, при* $S\to\infty$, *значения вектор-строки* $F(u,t)$ *решения* $F(u,t,S)$ *задачи* (9) *имеет вид*

$$F(u,t)E = \exp\left\{(e^{ju}-1)\kappa t\right\}, \qquad (10)$$

где E *– единичный вектор-столбец, величина* κ *определяется равенством* (5).

Доказательство этой теоремы полностью повторяет рассуждения доказательства теоремы 1.

Терема 2 говорит о том, что MAP-поток в условии предельно частых изменений его состояний и согласованного интенсивного прореживания является асимптотически простейшим. Здесь под согласованным интенсивным прореживанием понимается, что рост значений инфинитезимальных характеристик и уменьшение вероятностей наступления событий при переходе управляющей цепи из одного состояния в другое происходит пропорционально одному параметру S. При этом сохраняется интенсивность рассматриваемого потока.

4. Численный эксперимент

Для оценки области применимости полученных асимптотических результатов проведем численный эксперимент. Будем рассматривать наши потоки для различных значений параметра S. В работе [13] была получена формула для нахождения распределения вероятностей числа событий, наступивших в MAP (MMP)-потоках за некоторое время t:

$$P(n,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\alpha t} R\left((B-Q-j\alpha I)^{-1}B\right)^n (B-Q-j\alpha I)^{-1} E d\alpha. \qquad (11)$$

Таким образом, для того чтобы найти распределение вероятностей $P(n,t)$, достаточно задать матрицу инфинитезимальных характеристик Q, матрицу B и найти вектор-строку стационарного распределения состояний цепи Маркова R и применить формулу (11) для заданного значения времени t и набора значений n=0,1,2…. Здесь I является единичной матрицей соответствующей размерности.

Полученное с помощью формулы (11) распределение будем сравнивать с распределением Пуассона, которое соответствует асимптотическому распределению вероятностей числа событий, наступивших в MAP (MMP)-потоках за некоторое время t в условии предельно частых изменений состояний потока. Это поможет показать, при каких значениях параметра S эти распределения достаточно близки, а значит, MAP (MMP)-поток можно аппроксимировать простейшим. Время наблюдения за потоками t будем брать равное 10.

Пример 1. Рассмотрим класс MMP-потоков, заданных следующими параметрами:

$$Q = S\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0.4 & 1.6 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность этих потоков κ равна 2,49, а асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в предельном, при $S\to\infty$, потоке за некоторое время t является пуассоновским с параметром κt.

В качестве меры отличия распределений вероятностей предлагается брать расстояние Колмогорова между функциями распределения, которое обозначим за Δ:

$$\Delta = \max_i \left|F_1(i) - F_2(i)\right|,$$

где $F_1(i)$ и $F_2(i)$ – сравниваемые функции распределения.

Результаты сравнения (для различных значений параметра S) допредельного распределения вероятностей, полученного с помощью формулы (11), и распределения Пуассона, найденного методом асимптотического анализа, представлены в табл. 1.

Таблица 1

S	0.1	1	10	100	1000
Δ	0.0650	0.0270	0.0110	0.0055	0.0034

Пример 2. Рассмотрим класс МАР-потоков, заданных следующими параметрами:

$$Q = S\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0.4 & 1.6 & -2 \end{pmatrix},\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad Q = \frac{1}{S}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Интенсивность этих потоков κ равна 3,468, а асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в предельном, при $S\to\infty$, потоке за некоторое время t является пуассоновским с параметром κt.

Результаты сравнения (для различных значений параметра S) допредельного распределения вероятностей, полученного с помощью формулы (11), и распределения Пуассона, найденного методом асимптотического анализа, представлены в табл. 2.

Таблица 2

S	0.1	1	10	100	1000
Δ	0.0630	0.0280	0.0170	0.0079	0.0024

Погрешность меньше 0,02 можно считать приемлемой для практики. Заметим, что аналогичные результаты были получены для потоков с другими наборами параметров и временем наблюдения.

Заключение

В данной работе были рассмотрены условия, при выполнении которых МАР-потоки сходятся к пуассоновским. Для класса ММР-потоков это условие предельно частых изменений состояний потока, то есть когда интенсивности перехода потока из состояния в состояние неограниченно равномерно возрастают. А для класса общих МАР-потоков это условие предельно частых изменений состояний потока и согласованного интенсивного прореживания. При сравнении асимптотических результатов с допредельными было показано, что ММР-потоки с интенсивностью порядка нескольких единиц можно аппроксимировать пуассоновскими при значениях интенсивностей перехода состояний потока порядка десяти и больше. Аналогичные результаты получились и для МАР-потоков при достаточно малых значениях вероятностей наступления событий при смене состояния потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
2. *Хинчин А.Я.* Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1955. Т. 49. С. 1–123.
3. *Palm. C.* Intensitatsschwankungen in fernsprechverkehr // Ericson Technics. 1943. V.44. No. 1. P. 1–189.
4. *Renyi A.* Poisson-folyamat egy jemllemzёse // Тр. Мат. ин-та АН Венгрии. 1956. Т. 1. № 4. С. 519–527.
5. *Ососков Г.А.* Одна предельная теорема для потоков однородных событий // Теория вероятностей и ее применение. 1956. Т. 1. № .2. С. 274–282.
6. *Григелионис Б.И.* Уточнение многомерной предельной теоремы о сходимости к закону Пуассона // Литов. мат. сб. 1962. Т. 2. № 2. С. 143–148.
7. *Григелионис Б.И.* О точности приближения композиции процессов восстановления пуассоновским процессом // Литов. мат. сб. 1962. Т. 2. № 2. С. 135–143.
8. *Погожев И.Б.* Оценка отклонения потока отказов в аппаратуре многофазового использования от пуассоновского потока // Кибернетика – на службе коммунизма. Т. 2. М.: Энергия, 1964. С. 228–245.
9. *Neuts M.F.* A versatile Markovian arrival process // J. Appl. Prob. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. *Lucantoni D.* New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. *Дудин А.Н.*, *Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000. 175 с.
12. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 109 с.
13. *Лопухова С.В.*, *Назаров А.А.* Численный алгоритм нахождения распределения вероятностей для МСМР-потока // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 16. С. 113–119.

Назаров Анатолий Андреевич
Лапатин Иван Леонидович
Томский государственный университет
E-mail: nazarov@fpmk.tsu.ru, ilapatin@mail.ru