ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.865

Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин

ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНА КУПЛИ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ НА ДИФФУЗИОННОМ (B, S)-РЫНКЕ В СЛУЧАЕ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ ПО РИСКОВОМУ АКТИВУ

Рассматривается задача нахождения цены опциона, портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала, обеспечивающих платежное обязательство с заданной вероятностью, для Европейского опциона купли в случае выплаты дивидендов по рисковому активу при использовании диффузионной модели рынка и выполнении определенного условия, связывающего параметры модели. Исследуются свойства решения.

Ключевые слова: *финансовый рынок*, *цена опциона*, *хеджирующая стратегия*, *Европейский опцион купли*, *дивиденды*.

Опцион является производной (вторичной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право купли или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного актива по определенной цене, а продавец опциона за премию, являющуюся ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению [1 – 4]. В первом случае имеем опцион купли, а во втором – продажи. Стандартная платежная функция опциона купли, определяющая величину выплаты при предъявлении опциона к исполнению, имеет вид $f_T = (S_T - K)^+$, где S_T – цена базисного актива в момент исполнения T (спотовая цена), K – цена исполнения контракта (страйковая цена), $a^+ = \max(a;0)$ Опцион, соответствующий такой платежной функции в случае фиксированного T, получил название стандартного опциона купли европейского типа. В случае опционов, которые исполняются с вероятностью единица (совершенное хеджирование, или суперхеджирование), выплата по опциону может быть достаточно большой, что представляет существенный риск для эмитента (инвестора) и порождает требование ограничения этого риска. В предлагаемой работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе квантильного хеджирования с вероятностью выполнения платежного обязательства, которая, в отличие от стандартного опциона, меньше единицы [5], и при выполнении некоторого условия, связывающего параметры модели рынка. В случае опциона продажи с платежной функцией вида $f_T = (K - S_T)^+$ задача квантильного хеджирования рассмотрена в [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, представленного безрисковым (банковский счет) B и рисковым (акция) S активами с ценами соответственно B_t и S_t в момент времени $t \in [0,T]$. При этом активы B и S называют основными активами или основными ценными бумагами, образующими (B, S)-рынок с непрерывным временем. Предполагается, что величина банковского счета B задается детерминированной функцией $B = (B_t)_{t>0}$, отвечающей дифференциальному уравнению

$$dB_t = rB_t dt, \tag{1}$$

решение которого имеет вид

$$B_t = B_0 e^{rt}, B_0 > 0, r > 0, \tag{2}$$

где r – процентная ставка, или банковский процент. Изменение стоимости акции $S = (S_t)_{t\geq 0}$ происходит на стохастическом базисе $(\Omega, F, \mathbf{F} = (F_t)_{t>0}, \boldsymbol{P})$ [2 – 4]. Для описания эволюции S используется модель «геометрического», или «экономического», броуновского движения [2, 3]. Такой процесс описывается стохастическим диффузионным уравнением

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \tag{3}$$

с решением

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \tag{4}$$

где $W = (W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс, $S_0 > 0, \mu \in R = (-\infty, +\infty), \sigma > 0$.

Рассмотрим некоторого инвестора, значение капитала X_t в момент времени t которого определяется как

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \tag{5}$$

где F_t-измеримые процессы β_t и γ_t – части безрискового и рискового активов соответственно составляют портфель ценных бумаг $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$. За обладание акцией осуществляются выплаты дивидендов в размере D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, $0 \leq \delta < r$, пропорциональной рисковой составляющей капитала, а именно: $dD_t = \delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами определяется в виде $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t$. Из (5) следует, что $dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t$. Таким образом, получаем балансовое соотношение $B_t d\beta_t + S_t d\gamma = dD_t$, заменяющее условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче [2 – 4]. Аналогично задаче без дивидендов [2] в рассматриваемой задаче рискнейтральная (мартингальная) мера $\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$, которая связана с исходной мерой преобразованием вида

$$d\boldsymbol{P}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} d\boldsymbol{P}_t, \; Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \tag{6}$$

При этом вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)\left((r-\delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}\right), \tag{7}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)\left((r-\delta)dt + \sigma dW_t\right) \tag{8}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$, где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t^* = W_t + \frac{(\mu - r + \delta)}{\sigma}t \tag{9}$$

является винеровским относительно меры $\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta} = \boldsymbol{P}^*$.

Задача. Требуется определить капитал X_t^*, соответствующий ему портфель $\pi_t^* = \left(\beta_t^*, \gamma_t^*\right)$ и начальное значение капитала $X_0^* = C_T$ как стоимости вторичной ценной бумаги – опциона, при которых обеспечивается выполнение платежного обязательства

$$X_T^* = f_T(S_T), \tag{10}$$

где $f_T(S_T) = (S_T - K)^+$ – платежная функция для опциона купли, с вероятностью $\boldsymbol{P}(A) = 1-\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, [4, 5].

Базовая теория рассматривает хеджирование с единичной вероятностью, когда $\varepsilon = 0$ [1] и платежное обязательство выполняется на каждой траектории S_t [1 – 3]. Подобная идеализация приводит к тому, что решение не зависит от параметра роста μ, который является существенным и определяет тенденцию изменения цены рискового актива. Хеджирование с вероятностью меньше единицы (квантильное хеджирование) является более реалистичным. В рамках проведенного исследования рассматривается задача хеджирования с заданной вероятностью стандартного опциона купли при выполнении определенного условия для параметров модели в случае выплаты дивидендов, когда находится не только формула для справедливой цены опциона C_T, но и формулы, определяющие эволюцию во времени портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала, а также исследуются свойства решения.

2. Цена опциона

Рассматривается задача квантильного хеджирования стандартного опциона купли (*call*-опциона) с функцией выплат $f_T = (S_T - K)^+ = \max(0, S_T - K)$ [2, 3]. По теореме 6.1 из [4] имеем, что оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем (с вероятностью единица) платежного обязательства $f_T^\varepsilon = f_T I_A$, где I_A – индикатор множества A, имеющего вид

$$A = \left\{\omega : \frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{P}^*} > \text{const} \cdot f_T\right\}. \tag{11}$$

С учетом (4), (6) – (9) и вида платежной функции для опциона купли область успешного хеджирования A примет вид

$$A = \left\{\exp\left\{\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2}W_t^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right\} > \text{const} \cdot (S_T - K)^+\right\} =$$

$$= \left\{S_T^{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\mu - r + \delta}{\sigma^2}\left(\ln S_0 + \frac{\mu + r + \delta - \sigma^2}{2}\right)T\right\} > \text{const} \cdot (S_T - K)^+\right\}. \tag{12}$$

Далее рассматривается случай

$$\left[(\mu - r + \delta)/\sigma^2\right] > 1. \tag{13}$$

На рис. 1 $\varphi_1(S_T) = \text{const}(S_T - K)^+$, $\varphi_2(S_T) = S_T^{(\mu - r + \delta)/\sigma^2}$. Заштрихованная область является областью решения неравенства (12). Так как, согласно (3), (4) и (7) – (9),

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(r + \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + \sigma W_T^*\right\}, \tag{14}$$

то множество A может быть представлено следующим образом:

$$A = \{S_T < d_1\} \cup \{S_T > d_2\} = \left\{W_T^* < b_1\right\} \cup \left\{W_T^* > b_2\right\}. \tag{15}$$

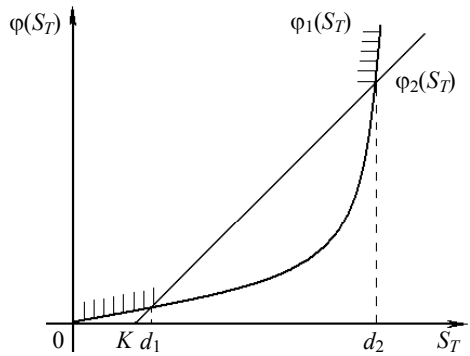

Рис. 1. Структура множества хеджирования при $\left[(\mu - r + \delta)/\sigma^2\right] > 1$

Тогда

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\left\{S_T < S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + b_1\sigma\right\}\right\} + \\ + \boldsymbol{P}\left\{S_T > S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + b_2\sigma\right\}\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

и с учетом (14) из (16) аналогично (17) в [6] следует

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}\left\{S_0 \exp\left\{\left(\mu - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + \sigma W_T\right\} < S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + b_1\sigma\right\}\right\} + \\ + \boldsymbol{P}\left\{S_0 \exp\left\{\left(\mu - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + \sigma W_T\right\} > S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + b_2\sigma\right\}\right\} = \\ = \boldsymbol{P}\left\{W_T < b_1 - \left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)T\right\} + \boldsymbol{P}\left\{W_T > b_2 - \left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)T\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Замечание 1. Далее всюду $\Phi^{-1}(y)$ означает функцию, обратную функции Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \ \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

Так как винеровский процесс W_t имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t, то из (17) получаем

$$\boldsymbol{P}(A) = \Phi\left(\left(b_1 - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right) + \Phi\left(\left(-b_2 + \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right), \qquad (18)$$

где $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$, есть вероятность успешного хеджирования. Следовательно, константы $b_1 = b_1^T$ и $b_2 = b_2^T$ должны удовлетворять условию (18), но в явном виде в отличие от [6] они не находятся.

Теорема 1. Пусть $y_0(T, S_0)$ определяется по формуле

$$y_0(T, S_0) = \frac{\ln\dfrac{K}{S_0} - (r - \delta - \dfrac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \qquad (19)$$

Тогда цена опциона купли в случае выполнения условия (13) определяется формулой

$$C_T = S_0 e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\left(b_1^T/\sqrt{T}\right) - \sigma\sqrt{T}\right) - \Phi(y_0(T, S_0) - \sigma\sqrt{T}) + \Phi\left(-\left(b_2^T/\sqrt{T}\right) + \sigma\sqrt{T}\right)\right] -$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(b_1^T/\sqrt{T}\right) - \Phi(y_0(T, S_0)) + \Phi\left(-b_2^T/\sqrt{T}\right)\right]. \qquad (20)$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$C_T = e^{-rT}E^*\{f_T I_A\}, \qquad (21)$$

где E^* – усреднение по мартингальной мере $\boldsymbol{P}^*$. Используя (4) и (6), находим согласно (21)

$$C_T = e^{-rT}E^*\{f_T I_A\} = e^{-rT}E^*\left\{(S_T - K)^+ I_A\right\} =$$

$$= e^{-rT}E\left\{Z_T^{\mu - r + \delta}\left(S_0 \exp\left\{\left(\mu - \left(\sigma^2/2\right)\right)T + \sigma W_T\right\} - K\right)^+ I_A\right\} =$$

$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T} - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma x\sqrt{\mathrm{T}}\right\} - K\right)^+ I_A \cdot \varphi(x)dx =$$

$$= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)x\sqrt{T} - \frac{T}{2}\left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2\right\}\times$$

$$\times\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\left(x + \left(\frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)\sqrt{T}\right)\right\} - K\right)^+ I_A \cdot \varphi(x)dx.$$

Делая замену переменных $z = x + [(\mu + \delta - r)/\sigma]\sqrt{T}$, получаем с учетом (17) – (19), что

$$C_T = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\cdot\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z\right\} - K\right)^+ dz +$$

$$+e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\cdot\left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z\right\} - K\right)^+ dz = C_1 + C_2. \qquad (22)$$

Так как подынтегральное выражение больше нуля при

$$S_0 \exp\left\{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)T+\sigma\sqrt{T}z\right\}-K>0,$$

то окончательно с учетом определения функции $\Phi(x)$ получаем с учетом доказательства теоремы 1 из [6], что

$$C_1 = S_0 e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\left(b_1^T/\sqrt{T}\right)-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right]- \\ -Ke^{-rT}\left[\Phi\left(b_1^T/\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right], \qquad (23)$$

а для $C_2 = C_2^1 - C_2^2$

$$C_2^1 = S_0 e^{-\delta T}\left[\Phi\left(-\left(b_2^T/\sqrt{T}\right)+\sigma\sqrt{T}\right)\right], C_2^2 = Ke^{-rT}\Phi\left(-b_2^T/\sqrt{T}\right).$$

Таким образом

$$C_2 = S_0 e^{-\delta T}\left[\Phi\left(-\left(b_2^T/\sqrt{T}\right)+\sigma\sqrt{T}\right)\right]-Ke^{-rT}\Phi\left(-b_2^T/\sqrt{T}\right). \qquad (24)$$

Использование (23), (24) в (22) приводит к (20). Теорема доказана.

3. Капитал и портфель

Теорема 2. При выполнении условия (13) портфель $\pi_t^* = \left(\beta_t^*, \gamma_t^*\right)$ и капитал X_t^* записываются как

$$\gamma_t^* = e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\left(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)-\sigma\sqrt{T-t}\right)+\Phi\left(-\left(b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\right)- \\ -\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]; \qquad (25)$$

$$\beta_t^* = -e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\left[\Phi\left(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)+\Phi\left(-b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right]; \qquad (26)$$

$$X_t^* = S_t e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\left(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)-\sigma\sqrt{T-t}\right)+ \\ +\Phi\left(-\left(b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]- \\ -Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)+\Phi\left(-b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right], \qquad (27)$$

где b_1^{T-t}, b_2^{T-t} и $y_0(T-t,S_t)$ определяются по формулам (18) и (19) с заменами $T \to (T-t)$ и $S_0 \to S_t$, т.е.

$$\boldsymbol{P}(A) = \Phi\left(\left(b_1^T - \frac{\mu-r+\delta}{\sigma}(T-t)\right)\Big/\sqrt{T-t}\right)+\Phi\left(\left(-b_2^T+\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}(T-t)\right)\Big/\sqrt{T-t}\right),$$

$$y_0(T-t,S_t) = \frac{\ln\dfrac{K}{S_t}-\left(r-\delta-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \qquad (28)$$

Доказательство. Согласно [2 – 4],

$$X_t^* = E^*\left\{e^{-r(T-t)}f_T I_A \,|\, S_t\right\}; \qquad (29)$$

$$\gamma_t^* = \frac{\partial X_t^*(s)}{\partial s}\Big|_{s=S_t}, \beta_t^* = \frac{X_t^* - \gamma_t^* S_t}{B_t}. \qquad (30)$$

Из сравнения (21) и (29) видно, что формула (27) следует из формулы (20) с заменами $T \to (T-t)$ и $S_0 \to S_t$. Согласно (27), (30),

$$\gamma_t^* = e^{-\delta(T-t)}\left[\Phi\left(\left(b_1^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)-\sigma\sqrt{T-t}\right)+\Phi\left(-\left(b_2^{T-t}/\sqrt{T-t}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]+Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_0(T-t,S_t))-$$
$$-S_t e^{-\delta(T-t)}\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right). \qquad (31)$$

Учитывая вид функции $y_0(T-t,S_t)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)\right)=-\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{(y_0(T-t,S_t))^2}{2}\right\}; \qquad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right)=-\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{\left(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}\right\}. \qquad (33)$$

Так как с учетом (28)

$$e^{-\delta(T-t)}\exp\left\{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}+y_0(T-t,S_t)\sigma\sqrt{T-t}\right\}-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S_t}=0, \qquad (34)$$

то, используя (32) – (34) в (31), приходим к (25), а (26) следует из (25), (27), (30). Теорема доказана.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 дают полное решение задачи квантильного хеджирования опциона купли при наличии выплаты дивидендов в случае выполнения условия (13). При отсутствии этих выплат формула (20) переходит в соответствующую формулу из [4, с. 146].

4. Свойства решения

Утверждение 1. Для стандартного опциона купли в случае выплаты дивидендов решение задачи определяется формулами

$$\tilde{C}_T = S_0 e^{-\delta T}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)T-\ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)T-\ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right); \qquad (35)$$

$$\tilde{\gamma}_t = e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \qquad (36)$$

$$\tilde{\beta}_t = -e^{-r(T-t)}\frac{K}{B_t}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right); \qquad (37)$$

$$\tilde{X}_t = S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta+\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$
$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\left(r-\delta-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)-\ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \qquad (38)$$

Данные формулы следуют в результате обобщения соответствующих формул из [2, 3] на случай выплаты дивидендов.

Следствие. При ε = 0 формулы (20), (25) – (27) переходят в формулы (35) – (38), т. е. несовершенное хеджирование переходит в совершенное.

Доказательство. В случае, когда ε = 0, вероятность успешного хеджирования $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \varepsilon = 1$, т. е. переходим к совершенному виду хеджирования. Рассмотрим формулы (20), (25) – (27) при ε = 0. При ε = 0 с учетом свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ из формулы (18) при $\boldsymbol{P}(A) = 1$ следует, что

$$\Phi\left(\left(b_1^T - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma} T\right) \Big/ \sqrt{T}\right) = \Phi\left(\left(b_2^T - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma} T\right) \Big/ \sqrt{T}\right). \qquad (39)$$

Из (39) получаем, что $b_1^T = b_2^T = b_c^T$. Согласно (25) – (27), с учетом (39), (28) и свойства $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ получаем для $\tilde{X}_t = \lim X_t$, $\tilde{\gamma}_t = \lim \gamma_t$, $\tilde{\beta}_t = \lim \beta_t$ при ε = 0, что

$$\tilde{X}_t = S_t e^{-\delta(T-t)}\left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t})\right] - Ke^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t))\right] =$$

$$= S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r - \delta + \left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right);$$

$$\tilde{\gamma}_t = e^{-\delta(T-t)}\left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t})\right] = e^{-\delta(T-t)} \Phi\left(\frac{\left(r - \delta + \left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right);$$

$$\tilde{\beta}_t = -e^{-r(T-t)} \frac{K}{B_t}\left[1 - \Phi(y_0(T-t, S_t))\right] = -e^{-r(T-t)} \frac{K}{B_t} \Phi\left(\frac{\left(r - \delta - \left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t) - \ln(K/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Таким образом, пришли к (36) – (38). Так как $\tilde{C}_T = \tilde{X}_0$, то (35) следует из (38). Следствие доказано.

Представляют интерес зависимости стоимости опциона от параметров S_0 и K, определяющих начальную цену рискового актива и оговариваемую цену исполнения опциона. Эти зависимости характеризуются величинами $C_T^{S_0} = \partial C_T / \partial S_0$, $C_T^K = \partial C_T / \partial K$.

Утверждение 2. Коэффициенты чувствительности $C_T^{S_0}$ и C_T^K определяются формулами

$$C_T^{S_0} = e^{-\delta T}\left[\Phi\left(\left(b_1^T / \sqrt{T}\right) - \sigma\sqrt{T}\right) + \Phi\left(-\left(b_2^T / \sqrt{T}\right) + \sigma\sqrt{T}\right) - \Phi(y_0(T, S_0) - \sigma\sqrt{T})\right], \quad (40)$$

$$C_T^K = -e^{-rT}\left[\Phi\left(b_1^T / \sqrt{T}\right) + \Phi\left(-b_2^T / \sqrt{T}\right) - \Phi(y_0(T, S_0))\right]. \qquad (41)$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения $C_T^{S_0}$, C_T^K с учетом (19), (20).

Исследование $C_T^{S_0}$ и C_T^K с привлечением численных расчетов показало, что $C_T^{S_0} > 0$, $C_T^K < 0$, т.е. рациональная стоимость опциона купли является возрастающей функцией от начальной цены акции S_0 и убывающей функцией от цены исполнения опциона K. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Увеличение начальной цены S_0 приводит в среднем к увеличению S_T. Это повышает вероятность того, что S_T превзойдет K, т.е. вероятность предъявления опциона к исполнению. В этом случае риск покупателя опциона умень-

шается, а за уменьшающийся риск следует больше платить. Увеличение K приводит к повышению вероятности того, что S_T не превзойдет K. Таким образом, риск для покупателя опциона увеличивается, а за увеличивающийся риск следует меньше платить.

Численные расчеты показали, что стоимость опциона купли является возрастающей функцией коэффициента роста μ и убывающей функцией параметра ε, т.е. возрастающей функцией вероятности хеджирования $P(A) = 1 - \varepsilon$. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Так как с ростом μ повышается в среднем тенденция к росту цены рискового актива S_t, то тем самым повышается вероятность превышения величиной S_T барьера K, т.е. вероятность предъявления опциона к исполнению. Поскольку за увеличение вероятности получить доход следует больше платить, то это объясняет увеличение C_T с ростом μ. С ростом ε уменьшается вероятность хеджирования, т.е. вероятность исполнения платежного обязательства, что уменьшает вероятность предъявления опциона к исполнению. Поскольку за уменьшение вероятности получить доход следует меньше платить, то это объясняет уменьшение C_T с ростом ε.

Заключение

В случае квантильного хеджирования, то есть в случае выполнения платежного обязательства для опциона купли с вероятностью меньшей единицы, при выполнении условия (13) для параметров модели рынка получены следующие результаты:

1. Найдена формула для цены опциона.
2. Найдены формулы, определяющие оптимальный портфель (хеджирующую стратегию) и отвечающий этому портфелю капитал.
3. Исследованы некоторые свойства цены опциона, касающиеся характера ее зависимости от начальной цены акции, цены исполнения опциона, коэффициента роста цены акции и вероятности хеджирования.
4. Решение задачи для случая совершенного хеджирования при выплате дивидендов получено как предельный случай квантильного хеджирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
2. *Ширяев А.Н.*, *Кабанов Ю.М.*, *Крамков Д.О.*, *Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типа: Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применение.1994. Т. 39. Вып. 1. С. 80–129.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. 1017 с.
4. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001.
5. *Новиков А.А*. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. Вып. 1. С. 152–161.
6. *Данилюк Е. Ю.*, *Демин Н. С.* Хеджирование опциона продажи с заданной вероятностью в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 4. С. 32–42.

Данилюк Елена Юрьевна
Демин Николай Серапионович
Томский государственный университет
E-mail: Daniluc_Elena@sibmail.com

Поступила в редакцию 21 октября 2010 г.